Cox 実現に付随する不変 Hilbert スキーム

久保田　絢子

正規アファイン多様体 Y に対して, 因子類群 $\mathrm{Cl}(Y)$ が有限生成であって Y 上の可逆な正則関数が定数関数のみであるとき, $\mathrm{Cox}(Y) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Cl}(Y)} \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y(D))$ によって定まる $\mathrm{Cl}(Y)$-次数環は Y の Cox 環と呼ばれる. Cox 環はその次数付けにより, 因子類群 $\mathrm{Cl}(Y)$ の指標群であるところの準トーラス $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{Cl}(Y)])$ の作用を持ち, 不変式環 $\mathrm{Cox}(Y)^G$ は座標環 $\mathbb{C}[Y]$ に一致する. 特に, Cox 環 $\mathrm{Cox}(Y)$ が有限生成であるならば, 多様体 Y は $\mathrm{Cox}(Y)$ から復元されることが知られている. すなわち, Cox 環のスペクトラムの G-作用による商多様体 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(Y))/\!/G$ が元の多様体 Y と同型になる. このとき商射 $\pi : X = \mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(Y))/\!/G \to Y$ はしばしば Y の Cox 実現と呼ばれる[1]. さて, 商射 π の一般ファイバーの Hilbert 関数を h とおくと, 組 (G, X, h) に付随する不変 Hilbert スキーム $\mathscr{H}_Y = \mathrm{Hilb}^G_h(X)$ は Hilbert–Chow 射 $\gamma_Y : \mathscr{H}_Y \to Y$ によって Y と双有理な既約成分 (これを $\mathscr{H}_Y$ の主成分といい, $\mathscr{H}^{main}$ で表す) を持つ. すなわち, $\mathscr{H}_Y$ (もしくは $\mathscr{H}^{main}$) は Y の特異点解消の候補となるわけである. 本稿では, Y が n の分割 $\mathbf{d}= [2^k, 1^{n-2k}]$ $(n > 2k)$ に対応する A 型の冪零軌道閉包の場合に, その Cox 実現の不変 Hilbert スキームについて考察する. 当該研究は永井保成氏との共同研究である.

1　不変 Hilbert スキームと商多様体の特異点解消

簡約代数群 G の作用のあるアファイン多様体 X, および Hilbert 関数 h に対して, 組 (G, X, h) に付随する不変 Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^G_h(X)$ とは, X の G-安定閉部分スキームであってその座標環が G-表現として Hilbert 関数 h で定まる表現と同型であるもののモジュライ空間である. すなわち, G の既約表現の同型類の集合を $\mathrm{Irr}(G)$ で表せば, 閉点の集合は

$$\mathrm{Hilb}^G_h(X) = \left\{ Z \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \text{ は } G\text{-安定閉部分スキーム} \\ G\text{-加群として } \mathbb{C}[Z] \cong \bigoplus_{M\in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus h(M)} \end{array} \right\}$$

と与えられる[2]. 不変 Hilbert スキームは最初に, Alexeev–Brion [AB05] によって G が連結簡約代数群である場合に導入された. しかし, 特異点解消の文脈で調べられるようになったのはそれよりも後のことである. すなわち, のちに Brion [Bri13] によって連結とは限らない簡約代数群 G に対してもその存在の証明が拡張され, それにより不変 Hilbert スキームは (G-Hilbert スキームの一般

---

[1] Cox 実現について, 詳しくは [ADHL15], [AG10] を参照されたい.

[2] G が有限群の場合, h として G の正則表現 $\mathbb{C}[G]$ の Hilbert 関数 $h_{\mathbb{C}[G]}$ を選ぶと, 組 $(G, X, h_{\mathbb{C}[G]})$ に付随する不変 Hilbert スキームは Ito–Nakamura [IN96] による G-Hilbert スキーム G-$\mathrm{Hilb}(X)$ と一致する.

化として自然に期待されるように) 商多様体の特異点解消の文脈でも研究されるようになった. このことをもう少し詳しく見ていきたい. 一般に, 多様体 X が滑らかであってもそのアファイン商 $X/\!/G$, すなわち G-作用による不変式環のスペクトラム $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$ は特異点を持つ. 商射 $X \to X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$ に対し, その一般ファイバーの Hilbert 関数を h_X とおくと, G の自明表現での h_X の値が 1 となるため, 組 (G, X, h_X) に付随する不変 Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^G_{h_X}(X)$ から商多様体 $X/\!/G$ への射

$$\gamma : \mathrm{Hilb}^G_{h_X}(X) \to X/\!/G, \quad [Z] \mapsto Z/\!/G$$

が定まる. この γ は射影的であり, $X/\!/G$ のある開集合 U 上で同型となることが知られている ([Bri13]). このとき, $X/\!/G$ を双有理的に支配する $\mathrm{Hilb}^G_{h_X}(X)$ の既約成分 $\overline{\gamma^{-1}(U)}$ は主成分と呼ばれ, $\mathscr{H}^{main}$ で表される. 射 γ (もしくはその $\mathscr{H}^{main}$ への制限) でもって $\mathrm{Hilb}^G_{h_X}(X)$ は $X/\!/G$ の特異点解消の候補となる. なお, G が有限群の場合, h_X は正則軌道の Hilbert 関数となるため, 射 γ は G-Hilbert スキームに対する Hilbert–Chow 射に他ならない[3].

さて, 上では, 組 (G, X) が与えられたときに Hilbert 関数を適切に選ぶことで商多様体 $X/\!/G$ の特異点解消の候補となる Hilbert–Chow 射 γ が定まることを見た. ここで少し視点を変えて, はじめに特異点 Y が与えられたとしたらどうであろうかと問うてみる. 与えられた特異点 Y を商多様体の形として $Y = X/\!/G$ と書き表すことができれば, それに対応する Hilbert–Chow 射 γ が得られる. こうして得た γ は X と G に依存するため, 特異点 Y の商多様体としての記述の仕方を変えればそれに伴い対応する Hilbert–Chow 射の挙動も変化する. そのため, 与えられた特異点を商多様体として表す方法のうち, 対応する Hilbert–Chow 射が特異点解消の観点から良い性質を持ちうるものは何か, という問いは自然である. 本稿では, 特異点を商多様体として構成する方法のうち, 上述の Cox 実現によるものに着目し, 以下を問う[4].

問題 1. 特異点 Y の Cox 実現に対応する Hilbert–Chow 射 γ_Y (もしくはその主成分への制限 $\gamma_Y|_{\mathscr{H}^{main}}$) は Y の特異点解消を与えるか.

問題 1 は筆者による [Kub21] の枠組みの自然な一般化になっている.

例 2. Y が A 型の冪零錐 $\overline{\mathscr{O}}_{[n]} \subset \mathfrak{sl}_n$ の場合は問題 1 に肯定的な解答を与える ([Kub23]). この場合 $\mathrm{Cl}(\overline{\mathscr{O}}_{[n]}) \cong \mathbb{Z}/n$ となるため ([Fu03]), Cox 実現の不変 Hilbert スキームは $\mathscr{H} = \mu_n\text{-}\mathrm{Hilb}(\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(\overline{\mathscr{O}}_{[n]})))$ となる. Hilbert–Chow 射 $\gamma_{\overline{\mathscr{O}}_{[n]}} : \mathscr{H} \to \overline{\mathscr{O}}_{[n]}$ の主成分への制限は冪零錐の Springer 特異点解消に一致する. さらに,

[3]有限とは限らない G に対する γ も同様に Hilbert–Chow 射と呼ばれている.

[4][ADHL15] より, Cox 実現の一般ファイバーの Hilbert 関数 $h_{\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(Y))}$ は $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{Cl}(Y)])$ の正則表現の Hilbert 関数に一致する. ここで G は準トーラスであるから, $h_{\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(Y))}$ は全ての既約表現において恒等的に 1 を取る関数とわかる.

$\mathscr{H}$ は $n=2$ の場合に限って既約である．なお，$n=2$ のとき，冪零錐 $\overline{\mathcal{O}}_{[2]}$ の Cox 実現は $\mathbb{C}^2$ への $\mu_2 \subset SL_2$ の自然な作用による商射 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/\mu_2$ に他ならず，Hilbert–Chow 射 $\gamma_{\overline{\mathcal{O}}_{[2]}} : \mathscr{H} \to \overline{\mathcal{O}}_{[2]}$ は A_1-特異点の極小特異点解消に一致する．

2 $\overline{\mathcal{O}}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ の Cox 環

A 型の冪零軌道，すなわち $\mathfrak{sl}_n$ の冪零元の随伴作用による軌道は n の分割と一対一に対応することが知られている．本稿では特異点が分割 $\mathbf{d}=[2^k,1^{n-2k}]$ $(n>2k)$ に対応する冪零軌道 $\mathcal{O}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ の閉包の場合に問題 1 を考察する．SL_n の標準表現を $V=\mathbb{C}^n$ で表すと，軌道の閉包は

$$\overline{\mathcal{O}}_{[2^k,1^{n-2k}]} = \{Y \in \mathrm{End}(V) \mid Y^2 = O,\ \mathrm{rank}\, Y \le k\}$$

で与えられる．このとき，$\overline{\mathcal{O}}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ は Springer 特異点解消を二つ

$$\begin{aligned} W^+ &= \{(Y,V_1) \in \overline{\mathcal{O}}_{[2^k,1^{n-2k}]} \times \mathrm{Gr}(k,V) \mid \mathrm{Im}\, Y \subset V_1 \subset \ker Y\}, \\ W^- &= \{(Y,V_2) \in \overline{\mathcal{O}}_{[2^k,1^{n-2k}]} \times \mathrm{Gr}(n-k,V) \mid \mathrm{Im}\, Y \subset V_2 \subset \ker Y\} \end{aligned}$$

持ち，合成 $W^+ \dashrightarrow W^-$ は stratified 向井フロップと呼ばれる．以下，この節では $\overline{\mathcal{O}}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ の Cox 環の記述を見る．

サイズが ℓ の単位行列を $\mathbb{1}_\ell$ で表す．また，右上の k 行 k 列のブロックが k 次単位行列 $\mathbb{1}_k$ であってその他のブロックは全て零行列であるような n 次行列を $A_{2^k,1^{n-2k}}$ で表すものとする．すなわち，$A_{2^k,1^{n-2k}}$ の (i,j) 成分は Kronecker のデルタ $\delta_{i,j-n+k}$ に等しい．

SL_n の座標を $X=(x_{i,j})$ で表し，X の随伴行列を $\hat{X}=(\hat{x}_{i,j})$ で表す．このとき，冪零軌道 $\mathcal{O}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ は SL_n の共役作用による行列 $A_{[2^k,1^{n-2k}]}$ の軌道に他ならない．すなわち，$\mathcal{O}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ は射

$$SL_n \to \mathfrak{sl}_n, \quad X \mapsto Y = XA_{[2^k,1^{n-2k}]}X^{-1} \tag{$\clubsuit$}$$

の像である．以下，記号の簡単のために $A_{2^k,1^{n-2k}}$ および $\mathcal{O}_{[2^k,1^{n-2k}]}$ をそれぞれ $A_{(k)}$ および $\mathcal{O}_{(k)}$ で表す．また一般に，n 次行列 $M=(m_{i,j})$ に対し，M の i_ℓ $(1 \le \ell \le r)$ 行および j_e $(1 \le e \le s)$ 列を抜き出してできる $r \times s$ 行列を $M^{(i_1,\cdots,i_r)}_{(j_1,\cdots,j_s)}$ で表す．すなわち，

$$M^{(i_1,\cdots,i_r)}_{(j_1,\cdots,j_s)} = \begin{pmatrix} m_{i_1,j_1} & m_{i_1,j_2} & \cdots & m_{i_1,j_s} \\ m_{i_2,j_1} & m_{i_2,j_2} & \cdots & m_{i_2,j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i_r,j_1} & m_{i_r,j_2} & \cdots & m_{i_r,j_s} \end{pmatrix}$$

である. この記号を用いると, $Y = XA_{(k)}\hat{X}$ の (i,j) 成分は $y_{i,j} = X^{(i)}_{(1,\,\cdots,\,k)}\hat{X}^{(n-k+1,\,\cdots,\,n)}_{(j)}$ と書けることがわかる. 行列 $A_{(k)}$ の安定化群は

$$F = \left\{ \tilde{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} B & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & B \end{array}\right) \in SL_n \;\middle|\; B \in GL_k \right\}$$

と与えられる. F の SL_n への作用を行列の右からの積, すなわち $SL_n \times F \to SL_n$, $(X,g) \mapsto Xg$ によって定めると, (♣) から同型 $SL_n/F \cong \mathcal{O}_{(k)}$ を得る. この同型射は行列の左からの積によって定まる自然な SL_n-作用のもとで同変になっていることに注意する. さて, F の指標群は B の行列式写像 $\det_B$ によって生成され ([Fu03]), その核は

$$F_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & * & * \\ \hline 0 & B_2 & * \\ \hline 0 & 0 & B_1 \end{array}\right) \;\middle|\; B_1 \in SL_k,\ B_2 \in SL_{n-2k} \right\}$$

となる. このとき, 冪零軌道 $\mathcal{O}_{(k)} \cong SL_n/F$ の Cox 環は不変式環 $\mathbb{C}[SL_n]^{F_1}$ と同型になることが [ADHL15] より従う. また, $\overline{\mathcal{O}}_{(k)} \setminus \mathcal{O}_{(k)}$ の余次元が 2 以上であるため, 同型 $\mathrm{Cox}(\overline{\mathcal{O}}_{(k)}) \cong \mathrm{Cox}(\mathcal{O}_{(k)})$ を得る. さらに, $\mathrm{Cl}(\overline{\mathcal{O}}_{(k)}) \cong \mathbb{Z}$ ([Fu03]) であり, 指標群 $\mathbb{C}^*(\det_B)$ の作用による $\mathbb{C}^*$-不変式環 $\mathrm{Cox}(\overline{\mathcal{O}}_{(k)})^{\mathbb{C}^*}$ は座標環 $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_{(k)}]$ に等しい.

$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ に対して, $I = (i_1, \cdots, i_k)$, $J = (j_1, \cdots, j_k)$ とおき,

$$t_I = t_{i_1,\,\cdots,\,i_k} = \det X^{(i_1,\,\cdots,\,i_k)}_{(1,\,\cdots,\,k)}, \quad s_J = s_{j_1,\,\cdots,\,j_k} = \det \hat{X}^{(n-k+1,\,\cdots,\,n)}_{(j_1,\,\cdots,\,j_k)}$$

と定める. t_I, s_J はそれぞれ $n\times k$ 行列 $X_{(1,\,\cdots,\,k)}$ および $k\times n$ 行列 $\hat{X}^{(n-k+1,\,\cdots,\,n)}$ の極大小行列式であるから, 以下の外積表現のベクトルの成分とみなすことができる

$$T = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} t_{i_1,\,\cdots,\,i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \in \wedge^k V,$$
$$S = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} s_{j_1,\,\cdots,\,j_k} e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_k} \in \wedge^k V^*.$$

ここで, $\{e_i\}$ は標準表現 V の基底を, V^* は双対表現を, $\{e^*_j\}$ はその双対基底をそれぞれ表す. また, $e_{i_1} \wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ および $e^*_{j_1} \wedge\cdots\wedge e^*_{j_k}$ を単に e_I および e^*_J と表すものとする. 簡単な計算により, t_I, $s_J \in \mathbb{C}[SL_n]^{F_1}$ となることがわかる. さらに, $\tilde{B} \in F$ の t_I および s_J への作用はそれぞれ $\det B$ および $(\det B)^{-1}$ で与えられるため, t_I と s_J は $\mathbb{C}^*(\det_B)$ の作用に関してそれぞれ重みが 1 と −1 の斉次元であることがわかる. これらの間の関係式として, 以下が成り立つ.

補題 3. (1) $t_I \cdot s_J - \det Y^I_J = 0$.

(2) $\sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell y_{i_\ell,j} t_{i_0,\,\cdots,\,\hat{i_\ell},\,\cdots,\,i_k} = 0$, $\sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell y_{i,j_\ell} s_{j_0,\,\cdots,\,\hat{j_\ell},\,\cdots,\,j_k} = 0$.

(3) 任意の i および $(i_2, \cdots, i_k)$ に対して, $\sum_{\ell=1}^{n} y_{i,\ell} t_{\ell, i_2, \cdots, i_k} = 0$. 同様に, 任意の j および $(j_2, \cdots, j_k)$ に対して, $\sum_{\ell=1}^{n} y_{\ell, j} s_{\ell, j_2, \cdots, j_k} = 0$.

(4) t_I および s_J に対する Plücker 関係式.

予想 4. Cox 環 $\mathrm{Cox}(\overline{\mathscr{O}}_{(k)}) = \mathbb{C}[SL_n]^{F_1}$ は座標環 $\mathbb{C}[\overline{\mathscr{O}}_{(k)}] = \mathbb{C}[SL_n]^F$ 上の代数として $\{t_I \mid I = (i_1, \cdots, i_k),\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ および $\{s_J \mid J = (j_1, \cdots, j_k),\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\}$ で生成される.

予想 4 に鑑みて $R = \mathbb{C}[SL_n]^F[t_I, s_J \mid I, J] \subset \mathbb{C}[SL_n]^{F_1}$ とおくと, R は $\mathbb{C}^*(\det_B)$-作用から誘導される次数付け $R = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} R_m$ を持つ. このとき, $R_0 = \mathbb{C}[SL_n]^F \cong \mathbb{C}[\overline{\mathscr{O}}_{(k)}]$ となることに注意する.

3 $\overline{\mathscr{O}}_{[2^k, 1^{n-2k}]}$ の Cox 実現の不変 Hilbert スキーム

この節では, 予想 4 の成立を仮定したもとで, $\overline{\mathscr{O}}_{(k)}$ の Cox 実現の不変 Hilbert スキームを考察する. $\mathscr{H} = \mathrm{Hilb}_h^{\mathbb{C}^*}(\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(\overline{\mathscr{O}}_{(k)})))$ を冪零軌道閉包 $\overline{\mathscr{O}}_{(k)}$ の Cox 実現

$$\pi : \mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(\overline{\mathscr{O}}_{(k)})) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(\overline{\mathscr{O}}_{(k)}))/\!/\mathbb{C}^* \cong \overline{\mathscr{O}}_{(k)}$$

の不変 Hilbert スキームとする. ここで, h は $\mathbb{C}^*$ の正則表現の Hilbert 関数 $h_{\mathbb{C}[\mathbb{C}^*]} \equiv 1$ である. 対応する Hilbert–Chow 射

$$\gamma = \gamma_{\overline{\mathscr{O}}_{(k)}} : \mathscr{H} \to \overline{\mathscr{O}}_{(k)}, \quad [Z] \mapsto Z/\!/\mathbb{C}^*$$

は冪零軌道 $\mathscr{O}_{(k)}$ 上で同型となる.

定理 5. 予想 4 が成り立つとする. このとき, $\overline{\mathscr{O}}_{(k)}$ の Cox 実現の不変 Hilbert スキーム $\mathscr{H}$ は Springer 特異点解消 $W^{\pm} \to \overline{\mathscr{O}}_{(k)}$ のファイバー積 $W = W^+ \times_{\overline{\mathscr{O}}_{(k)}} W^-$ に同型である.

定理 5 の証明の概略を述べる. 閉点 $[Z] \in \mathscr{H}$ に対し, その γ による像を $y = \gamma([Z])$ とおく. ここで, $\overline{\mathscr{O}}_{(k)}$ は次のように軌道分解することに注意する

$$\overline{\mathscr{O}}_{(k)} = \coprod_{\ell=0}^{k} \mathscr{O}_{(\ell)}.$$

もし $y \in \mathscr{O}_{(k)}$ ならば, $Z \cong \mathbb{C}^*$ である. $y \in \mathscr{O}_{(\ell)} \subset \overline{\mathscr{O}}_{(k)} \setminus \mathscr{O}_{(k)}$ とすると, Z は $\wedge^k V \times \wedge^k V^*$ の原点で交わる 1 次元の部分空間 $L_+ \subset \wedge^k V$ および $L_- \subset \wedge^k V^*$ を用いて $Z = L_+ \cup L_-$ と書けることがわかる. $z_+ \in L_+ \setminus \{O\}$, $z_- \in L_- \setminus \{O\}$ とすると, $L_+ \setminus \{O\}$, $L_- \setminus \{O\}$ はそれぞれ z_+, z_- の $\mathbb{C}^*$-軌道と一致する.

以下, この記述を用いて分類写像を構成する. まず, $[Z] \in \mathscr{H}$ に対し点 $z_{\pm} \in Z$ を上のようにとる. ただし, $\gamma([Z]) \in \mathscr{O}_{(k)}$ の場合, $z_{\pm}$ は Z の任意の点とする.

$T(z_+), S(z_-)$ をそれぞれ T, S の z_+, z_- での値を取ったもの

$$T(z_+) = \sum_I t_I(z_+) e_I \in \wedge^k V, \quad S(z_-) = \sum_J s_J(z_-) e_J^* \in \wedge^k V^*$$

とすると, SL_n-同変な射

$$\mathscr{H} \to \overline{\mathscr{O}}_{(k)} \times \mathbb{P}(\wedge^k V) \times \mathbb{P}(\wedge^k V^*), \quad [Z] \mapsto (\gamma([Z]), T(z_+), S(z_-))$$

が定まる. 補題 3 より $t_I(z_+), s_J(z_-)$ は Plücker 関係式を満たすため, この射は $\overline{\mathscr{O}}_{(k)} \times \mathrm{Gr}(k,V) \times \mathrm{Gr}(k,V^*)$ を経由することがわかる. すなわち, SL_n-同変な可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \overline{\mathscr{O}}_{(k)} \times \mathrm{Gr}(k,V) \times \mathrm{Gr}(k,V^*) \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \overline{\mathscr{O}}_{(k)} \end{tikzcd}$$

を得る. その構成より, Φ の像が $W = W^+ \times_{\overline{\mathscr{O}}_{(k)}} W^-$ と一致することは簡単に確かめられる. さらに, Hilbert 関数 h を持つ $\mathbb{C}^*$-安定な閉部分スキームの族 $\mathscr{X} \subset \mathrm{Spec}(R) \times W$ を構成することで Φ の逆写像がスキームの射として得られるが, 詳細は割愛したい.

謝辞. 城崎代数幾何学シンポジウム 2023 において講演の機会をくださいました世話人の先生方に感謝申し上げます.

References

[AB05] V. Alexeev and M. Brion, *Moduli of affine schemes with reductive group action*, J. Algebraic Geom. **14** (2005), no. 1, 83–117.

[ADHL15] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, and A. Laface, *Cox rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[AG10] I. V. Arzhantsev and S. A. Gaĭfullin, *Cox rings, semigroups, and automorphisms of affine varieties*, Mat. Sb. **201** (2010), no. 1, 3–24 (Russian, with Russian summary); English transl., Sb. Math. **201** (2010), no. 1-2, 1–21.

[Bri13] M. Brion, *Invariant Hilbert schemes*, Handbook of moduli. Vol. I, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 24, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 64–117.

[Fu03] B. Fu, *Symplectic resolutions for nilpotent orbits*, Invent. Math. **151** (2003), no. 1, 167–186, DOI 10.1007/s00222-002-0260-9, available at `math.AG/0205048`.

[IN96] Y. Ito and I. Nakamura, *McKay correspondence and Hilbert schemes*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), no. 7, 135–138.

[Kub21] A. Kubota, *Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties*, Transform. Groups **26** (2021), no. 4, 1365–1415.

[Kub23] ———, *Invariant Hilbert scheme of the Cox realization of the nilpotent cone in* $\mathfrak{sl}(n)$, McKay correspondence, mutation and related topics, Adv. Stud. Pure Math., vol. 88, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2023, pp. 517–533.

早稲田大学理工学術院　kubota.a@aoni.waseda.jp