Shokurov's index conjecture and PIA conjecture for quotient singularities

中村 勇哉 *

この記事は, 2023 年城崎シンポジウムの講演内容をまとめたものであり, 柴田康介氏との共同研究 [NS22, NSa, NSb, NSc] の内容の解説である.

1 イントロダクション

極小ログ食い違い係数 (MLD) は, 双有理幾何学で定義された特異点の不変量である. MLD について ACC 予想と LSC 予想と呼ばれる 2 つの重要な予想がある. この 2 つの予想の重要性はこの 2 つの予想がフリップの停止予想を導くことにある (Shokurov の定理 [Sho04]). その他関連する予想として, PIA 予想と Shokurov の index 予想と呼ばれているものがある. この記事では, 商特異点や超商特異点に対する LSC 予想と PIA 予想, 商特異点に対する ACC 予想と index 予想についての進展 (柴田康介氏との共同研究) について説明する. 以下, k を標数 0 の代数閉体とし, k 上の代数多様体を扱う.

2 MLD

(X, Δ) が**ログ対**であるとは, X が正規代数多様体, Δ が係数正の $\mathbb{R}$-因子で, $K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-Cartier であるときをいう. $f : Y \to X$ が正規代数多様体 Y からの双有理写像であるとき, Y 上の $\mathbb{R}$-因子 Δ_Y が

$$f^*(K_X + \Delta) = K_Y + \Delta_Y$$

により定まる. E を Y 上の素因子とするとき, **食い違い係数** $a_E(X, \Delta)$ が

$$a_E(X, \Delta) := 1 - \mathrm{coeff}_E\, \Delta_Y$$

により定まる. 閉点 $x \in X$ に対し, **極小ログ食い違い係数** $\mathrm{mld}_x(X, \Delta)$ が

$$\mathrm{mld}_x(X, \Delta) := \inf_E a_E(X, \Delta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$$

により定まる. ここで E は X 上空の素因子で X での中心 (像のこと) が $\{x\}$ に一致するもの全てを考える. $\mathrm{mld}_x(X, \Delta)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ に値をとることが知られている.

$\mathrm{mld}_x(X, \Delta)$ は X の x での特異点の良さ・悪さを反映していると考えられている (MLD が小さいほど特異点は悪い).

* 東京大学数理科学研究科, nakamura@ms.u-tokyo.ac.jp

この記事の後半ではイデアル版のログ対 $(X, \mathfrak{A})$ を中心に扱う．ここで X は $\mathbb{Q}$-Gorenstein であることを仮定し, $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}$ は $\mathbb{R}$-イデアルである．つまり, $\mathfrak{a}_i \subset \mathcal{O}_X$ は非零のイデアルであり, $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ である．このセッティングでも同様に $a_E(X, \mathfrak{A})$ が

$$a_E(X, \mathfrak{A}) := 1 + \operatorname{coeff}_E(K_{Y/X}) - \sum_{i=1}^{s} r_i \operatorname{ord}_E \mathfrak{a}_i$$

により定義され, $\operatorname{mld}_x(X, \mathfrak{A})$ が定義される．

3 MLD に関する予想

予想 3.1 (ACC 予想, Shokurov [Sho96])**.** d を正整数, I を DCC を満たす集合とする (つまり, I の元からなる無限列であって単調減少するものは存在しない)．このとき以下の集合

$$\{\operatorname{mld}_x(X, \Delta) \mid x \in X,\, \dim X = d,\, \Delta \in I\}$$

は ACC を満たす (つまり, 単調増加する無限部分列をもたない)．ただし, $\Delta \in I$ で Δ の Weil 因子としての係数がすべて I に属することを表す.

ACC 予想は 2 次元の場合に Shokurov [Sho94] と Alexeev [Ale93] によって証明された．3 次元の場合には川北 [Kaw15b, Kaw14], 中村 [Nak16b], Han-Liu-Luo [HLL] による部分的な結果がある．Han-Liu-Luo [HLL] による結果が最も一般的で, 3 次元 terminal 対に対して ACC 予想を証明している.

予想 3.2 (LSC 予想, Ambro [Amb99])**.** (X, Δ) をログ対とする．このとき関数

$$|X| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \quad x \mapsto \operatorname{mld}_x(X, \Delta)$$

は下半連続となる．ただし, 位相空間 $|X|$ は X の閉点からなる集合に Zariski 位相をいれたものである.

LSC 予想は 3 次元以下の場合に Ambro [Amb99] により証明された．また, Ein-Mustaţă-安田 [EMY03] は弧空間の理論を応用することで, X が非特異の場合に LSC 予想を証明した (次元の制約はない)．Ein-Mustaţă [EM04] はこの結果を局所完全交差多様体に拡張している．中村 [Nak16a] は別の方向の拡張として, 商特異点の場合に証明した．中村と柴田 [NS22, NSa, NSc] はさらに, 超商特異点の場合に証明した.

イントロダクションで述べた通り, ACC 予想と LSC 予想の重要性は Shokurov [Sho04] により証明された「ACC 予想と LSC 予想を認めると, フリップの停止問題が導かれる」ことにある.

予想 3.3 (PIA 予想)**.** (X, Δ) をログ対とする．S を X の正規 Cartier 素因子で, $S \not\subset \operatorname{Supp}(\Delta)$ を満たすと仮定する．x を S の閉点とするとき,

$$\operatorname{mld}_x(X, \Delta + S) = \operatorname{mld}_x(S, \Delta|_S)$$

が成立する.

PIA 予想が証明されている状況は LSC 予想が証明されている状況と同じである. まず, 3 次元以下の場合に正しい. Ein-Mustaţă-安田 [EMY03] は X が非特異の場合に PIA 予想を証明し, Ein-Mustaţă [EM04] は局所完全交差多様体に拡張している. 中村と柴田 [NS22, NSa, NSc] は, X が商特異点の場合に (より一般に, 超商特異点の場合に) 証明した.

PIA 予想の重要性は「MLD の問題を次元の低い問題に帰着できる」ことにある. 極小モデル理論の様々な結果は次元に関する帰納法により証明されており, MLD の問題を次元の帰納法で考える上で PIA 予想の解決は重要なステップとなりうる. また, 特異点理論の面ではこの逆の方向性も重要である. PIA 予想を認めると「X について LSC 予想が成立していれば S についても成立する」ことが証明できる. X は S よりも次元が高いが, 特異点は S よりも通常良くなっている. 例えば, 非特異多様体 X に対する PIA 予想と LSC 予想から, 超曲面特異点に対する LSC 予想が導かれることになる.

予想 3.4 (Shokurov の index 予想)**.** 正整数 d と非負実数 a に対し, 以下の条件を満たす正整数 $r(n,a)$ が存在する: d 次元正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 多様体 X 上の閉点 $x \in X$ が $\mathrm{mld}_x(X) = a$ をみたすとき, $r(n,a) \cdot K_X$ は x で Cartier となる.

index 予想は一見するとかなり非自明な予想に思われる. mK_X が x で Cartier である場合, MLD の定義から $\mathrm{mld}_x(X) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$ となることがすぐにわかる. 従って, X の Gorenstein index から MLD の可能性が “ほぼ” (上界があれば) 有限になることが分かる. index 予想はある意味この逆も成り立つことを主張している. 即ち, MLD を固定して考えたときに Gorenstein index の取りうる可能性が有限であることを主張しているのだ. index 予想は ACC 予想の証明に利用できる可能性がある (中村 [Nak16b] により「Gorenstein index が有界であり, 係数集合が有限集合である場合の ACC 予想」が証明されている).

index 予想は, $(d,a) = (2,0)$ の場合に, 曲面の分類により証明されている (cf. [Sho92, Corollary 5.10]). $n = 2$ の場合に (より一般にログ対に対するバージョンも), Chen-Han [CH21, Theorem 1.4] により証明されている. $(d,a) = (3,0)$ の場合に, 石井 [Ish00] と藤野 [Fuj01] により証明されている. 藤野 [Fuj01] は一般次元であっても, $a = 0$ の場合の index 予想を双有理自己同型射に関する別の予想に帰着させている. X が 3 次元 terminal 多様体の場合, 川又 [Kaw92] による分類から index 予想は証明することができる (Han-Liu-Luo [HLL] ではさらにログ対に対しても証明している). X が 3 次元 canonical 多様体の場合, 川北 [Kaw15a] により証明された. X がトーリック多様体の場合, Ambro [Amb09] により証明された. X が商特異点をもち, a が次元に対して十分小さいときに, index 予想は Moraga [Mor] により証明されている. 中村-柴田 [NSb] は X が商特異点を持つ場合に (a の条件なしに) index 予想を証明した.

4　LSC 予想と PIA 予想に弧空間の理論が有効な理由

前章で解説した LSC 予想・PIA 予想について知られている結果 [EMY03, EM04, Nak16a, NS22, NSa] では弧空間の理論が本質的に利用されている. この章では, Ein-Mustaţă-安田

[EMY03] の理論を概観し, LSC 予想と PIA 予想に対して弧空間の理論が, X が非特異の場合に有効な理由 (そして, X が特異点を持つ場合にうまくいかない理由) を説明する.

まず, Ein-Mustaţă-安田 [EMY03] は MLD を弧空間の言葉で記述した. ここでは簡単のため, $(X, \mathfrak{a}^r)$ の形のイデアル版のログ対 ($\mathbb{R}$-イデアルの定義において $s = 1$ の場合である) を考える (実際には一般の $\mathbb{R}$-イデアルについても公式がある).

定理 4.1 (Ein-Mustaţă-安田 [EMY03])**.** $(X, \mathfrak{a}^r)$ をログ対, ℓK_X が Cartier であると仮定する. このとき

$$C_{a,b} := \mathrm{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x) \cap \mathrm{cont}^{b}(\mathfrak{n}_{\ell,X}) \subset X_\infty$$

とおくと,

$$\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a}^r) = \inf_{a,b \geq 0} \left\{ \mathrm{codim}\, C_{a,b} - \frac{b}{\ell} - ra \right\}$$

が成立する.

ここで, X_∞ や cont, codim, $\mathfrak{n}_{\ell,X}$ など弧空間に関連する未定義用語を以下簡単に説明する. より詳しい弧空間の解説は [EM09] に委ねる.

まず, X_∞ は X の弧空間である. X を k 上の代数多様体とする. このとき X_m を X の m **次 jet 空間**, X_∞ を X の**弧空間**として定める. 集合としては

$$X_m = \{\mathrm{Spec}(k[t]/(t^{m+1})) \to X : k\text{-morphism}\}, \quad X_\infty = \{\mathrm{Spec}\, k[[t]] \to X : k\text{-morphism}\}$$

が成立している. X_m は有限次元の scheme になるが, X_∞ は一般には無限次元である. $X_\infty = \varprojlim X_m$ が成立しており, $\varphi_m : X_\infty \to X_m$ により射影を表す.

X のイデアル $\mathfrak{a}$ と非負整数 m に対し, **contact locus** $\mathrm{cont}^m(\mathfrak{a})$ と $\mathrm{cont}^{\geq m}(\mathfrak{a})$ が

$$\mathrm{cont}^m(\mathfrak{a}) := \{\gamma \in X_\infty \mid \mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a}) = m\}, \quad \mathrm{cont}^{\geq m}(\mathfrak{a}) := \{\gamma \in X_\infty \mid \mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a}) \geq m\}$$

により定義される. ここで, $\mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a})$ は次のように定義される. まず, γ は環の射 $\gamma^* : \mathcal{O}_X \to k[[t]]$ を定める. 像 $\gamma^*(\mathfrak{a})$ で生成される $k[[t]]$ のイデアルは $(t^{m'})$ の形をしているが, この m' を $\mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a})$ として定める.

$\mathrm{codim}\, C$ は, X_∞ の部分集合 C の中で cylinder と呼ばれる特別なものに対して定義される. $C \subset X_\infty$ が cylinder であるとはある m に対し X_m の構成可能集合が存在し C がその φ_m による逆像となっているときをいう. contact locus やそのいくつかの共通部分は cylinder となる. C が cylinder であることのポイントは $\varphi_m(C)$ が任意の m について構成可能集合となることであり, 特に $\dim \varphi_m(C)$ が定義できることである. cylinder C に対する $\mathrm{codim}\, C$ の一般的な定義は [EM09] を見ていただきたい. X が非特異である場合には, 十分大きな m に対し

$$\mathrm{codim}\, C = \dim X_m - \dim \varphi_m(C)$$

が成立している (十分大きな m について一定の値になる). また X が非特異である場合にはジェット空間 X_m は簡単な構造をしており, $\dim X_m = (m+1) \dim X$ が成立している.

Nash イデアル $\mathfrak{n}_{\ell,X}$ は $\Omega_X^{\dim X}$ と ω_X のズレを測るようなイデアルである. まず, 自然な射 $f : (\Omega_X^{\dim X})^{\otimes \ell} \to \mathcal{O}_X(\ell K_X)$ がある. ここで仮定から $\mathcal{O}_X(\ell K_X)$ は可逆層となる. したがって

f の像を

$$\operatorname{Im} f = \mathfrak{n}_{\ell,X} \otimes \mathcal{O}_X(\ell K_X)$$

と表すことができるようなイデアル $\mathfrak{n}_{\ell,X} \subset \mathcal{O}_X$ が存在する．これが Nash イデアルの定義である．定義から X が非特異であれば $\mathfrak{n}_{\ell,X} = \mathcal{O}_X$ となる．X が特異点を持つ場合は, Nash イデアルの存在が, 弧空間を用いた MLD の研究を難しくしている．定理 4.1 に Nash イデアルが登場する理由を簡単に説明する．MLD は双有理射 $Y \to X$ に対する ω_{-} (標準因子 K_{-} に対応) のズレを使って定義されている．一方で, 弧空間はその定義から微分加群 Ω_{-} と相性が良い．実際, 双有理射 $Y \to X$ が与えられたとき, 弧空間における cylinder の余次元のズレは, 微分加群 Ω_{-} を使って記述される (モチーフ積分における変数変換公式)．X が特異点を持つ場合には, $\Omega_X^{\dim X}$ と ω_X にズレが生じ, 定理 4.1 に Nash イデアルが登場することになるのである．

Ein-Mustaţă-安田 [EMY03] は定理 4.1 を利用して,「X が非特異である場合の LSC 予想・PIA 予想」を証明した．以下, X が非特異である場合になぜ弧空間の理論が LSC 予想・PIA 予想の証明に有効であるかを以下簡単に説明する (定理 4.1 自体は特異点をもつ X についても成立することに注意)．X は非特異であることの特殊性は, $C_{a,b} \subset X_\infty$ が閉 cylinder となることである．X が特異点を持つ場合,

$$C_{a,b} := \operatorname{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x) \cap \operatorname{cont}^{b}(\mathfrak{n}_{\ell,X})$$

は $\operatorname{cont}^{b}(\mathfrak{n}_{\ell,X})$ の寄与により一般に閉とはならない ($\operatorname{cont}^{\geq b}$ ではなく cont^{b} であることに注意)．しかし, X が非特異である場合, Nash イデアルが自明 $\mathfrak{n}_{\ell,X} = \mathcal{O}_X$ となるため, 定理 4.1 内の $C_{a,b}$ は

$$C_a = \operatorname{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x)$$

に置き換えることができる．以下説明するように C_a が (その形から) 閉 cylinder となることが重要となる．

X が非特異である場合, codim の定義から

$$\operatorname{codim} C_a = \dim X_m - \dim \varphi_m(C_a)$$

が十分大きな m に対し成立する．自然な射影 $X_m \to X$ を $\varphi_m(\operatorname{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a})) \subset X_m$ に制限したもの $g : \varphi_m(\operatorname{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a})) \to X$ を考える．このとき $\varphi_m(C_a)$ は g の $x \in X$ でのファイバーに一致する．従って,「非特異多様体 X に対する LSC 予想」は定理 4.1 により「g のファイバーの次元の上半連続性」に言い換えることができる．「g のファイバーの次元の上半連続性」を示す際に C_a が閉となることが重要となることは想像に難くないであろう[*1]．以上が, LSC 予想への弧空間を使ったアプローチが, X が非特異である際にうまくいく (そして X が特異点を持つ場合にうまく行かない) 理由である．

次に PIA 予想についても簡単に説明する．PIA 予想は定理 4.1 により,「$\operatorname{codim}_{X_\infty} C_a$ と $\operatorname{codim}_{S_\infty}(C_a \cap S_\infty)$ の比較」が必要となる．そのために, “弧空間における intersection

*1 一般に g が proper 射であれば「g のファイバーの次元は上半連続性」となる．しかし, 今回の g は proper 射にはならない．そのために, ファイバーへの k^*-作用を考える必要がある．いずれにしても, C_a が閉であることは「g のファイバーの次元は上半連続性」を示すために自然に要求したくなる条件である．

theory”のようなものが必要となる．通常の intersection theory では交わりにおいて想定通りに次元が下がるために, 交わりを考える対象が閉であることが要求される．“弧空間における intersection theory”においても, 考える対象が閉であることが重要であることは自然に理解していただけるものと思う．X が非特異である場合には, 先に述べた通り C_a が閉になり,「$\operatorname{codim}_{X_\infty} C_a$ と $\operatorname{codim}_{S_\infty}(C_a \cap S_\infty)$ の比較」がうまくいくのである.

5 商特異点の MLD

中村と柴田 [NS22, NSa, NSc] は, 商特異点をもつ多様体 X に対し PIA 予想と LSC 予想を証明した.

定理 5.1 ([NS22, NSa])**.** Y が閉点 $x \in Y$ で商特異点をもつと仮定する．X は Y の余次元 c の部分多様体で, y の周りで c 個の式で定義されているものと仮定する．S は X の Cartier 素因子で x を通るものとする．X と S は x の周りで klt であることを仮定する．このとき X と S に対し, PIA 予想 (予想 3.3) が成立する.

定理 5.2 ([NS22, NSa])**.** 定理 5.1 のセッティングにおいて, X に対し LSC 予想 (予想 3.2) が成立する.

中村 [Nak16a] は, 商特異点に対し LSC 予想を証明しているため, 定理 5.2 は定理 5.1 の系として得られる．定理 5.1 の証明のカギとなるのは, Denef と Loeser による商特異点の弧空間の研究 [DL02] である．以下, 簡単に Denef-Loeser の理論 [DL02] を解説する.

まず, $k[t]$-scheme に対する弧空間の理論が必要となる．X を $k[t]$-scheme とする．このとき X の m 次 jet 空間 X_m と弧空間 X_∞ を

$$X_m := \{\operatorname{Spec}(k[t]/(t^{m+1})) \to X : k[t]\text{-morphism}\},$$
$$X_\infty := \{\operatorname{Spec} k[[t]] \to X : k[t]\text{-morphism}\}$$

により定める．Denef-Loeser [DL02] は X_m と X_∞ に対しても (通常の k-scheme に対する弧空間と同じような) 理論を構築した．$k[t]$-scheme に対する弧空間の理論は, 通常の k-scheme に対する弧空間の理論の拡張とみなせる．実際, Y を k-scheme とし, $k[t]$-scheme X を $X = Y \times_k k[t]$ により定めると, $k[t]$-scheme としての jet 空間 X_m は k-scheme としての jet 空間 Y_m に同型となる.

続いて, Denef-Loeser [DL02] は商多様体の弧空間の理論を構築した．$G \subset \mathrm{GL}_N(k)$ を有限部分群とし, G のアファイン空間 $\overline{A} := \mathbb{A}_k^N$ への線型な作用を考える．$\overline{X} \subset \overline{A}$ を G-不変な部分多様体とする．このとき商多様体 $\overline{X}/G$ の弧空間 $(\overline{X}/G)_\infty$ を調べることが目標となる．Denef-Loeser [DL02] の理論とは簡単に述べると次のようなものである．各 $\gamma \in G$ に対し, $k[t]$-scheme $\overline{X}^{(\gamma)}$ を定義し (後で構成法を記す), 自然に誘導される弧空間の射

$$\bigsqcup_{\gamma \in G} \overline{X}^{(\gamma)}_\infty \to (\overline{X}/G)_\infty$$

が “ほとんど”全射な有限射であることを証明した．これにより, 商多様体の弧空間 $(\overline{X}/G)_\infty$

を $\overline{X}^{(\gamma)}_\infty$ を通じて研究することが可能となる.

以下, $\gamma \in G$ を固定し, $k[t]$-scheme $\overline{X}^{(\gamma)}$ の構成法を述べる. $d := |G|$ を G の位数, $\xi \in k$ を原始 d 乗根とする. γ の位数は有限であるため, 対角化が可能である. $\mathbb{A}^N_k$ の座標を取り換えることにより, $\gamma = \mathrm{diag}(\xi^{e_1}, \dots, \xi^{e_N})$ と対角化可能である. ここで e_i は $0 \le e_i < d$ となるようにとることにする. Denef-Loeser [DL02] の重要なアイデアは次の環の射を考えることである:

$$\lambda^*_\gamma : k[x_1, \dots, x_N]^G \to k[t][x_1, \dots, x_N]; \quad x_i \mapsto t^{e_i/d} x_i.$$

ここで, 定義域を G-不変部分に定義しているため, 像が $k[t][x_1, \dots, x_N]$ に収まることに注意する. $I_X \subset k[x_1, \dots, x_N]^G$ を X の定義イデアルとする. 記号の使い方に多少問題があるが, $\lambda^*_\gamma(I_X)$ を I_X の像で生成されるイデアルを表すことにする. すると, λ^*_γ は商環の間の射

$$k[x_1, \dots, x_N]^G / I_X \to k[t][x_1, \dots, x_N]/\lambda^*_\gamma(I_X)$$

を誘導する. $k[t]$-scheme $\overline{X}^{(\gamma)}$ を

$$\overline{X}^{(\gamma)} := \mathrm{Spec}(k[t][x_1, \dots, x_N]/\lambda^*_\gamma(I_X))$$

と定義する. すると scheme の間の射

$$\overline{X}^{(\gamma)} \to \overline{X}/G$$

が得られ, 弧空間の間の射

$$\overline{X}^{(\gamma)}_\infty \to (\overline{X}/G)_\infty$$

も誘導される. ここで $\overline{X}^{(\gamma)}_\infty$ は $k[t]$-scheme としての弧空間である.

例 5.3. $\overline{X} \subset \mathbb{A}^3_k$ が $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_2 x_3 = 0$ で定義されるとする. さらに $d = 3$, $\gamma = \mathrm{diag}(\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ であるとする. このとき, $\overline{X}^{(\gamma)}$ は $x_1^3 + t x_2^3 + t^2 x_3^3 + t x_2 x_3 = 0$ で定義されるような $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^3_k$ の部分 scheme となる. この例からも分かることであるが, $t \neq 0$ のファイバーは $\overline{X}$ に同型となる. $t = 0$ への退化の仕方に群作用の情報を持たせていることが分かる.

Denef-Loeser [DL02] の理論を用いて, 中村と柴田 [NS22, NSa] は商多様体に対して, Ein-Mustaţă-安田型の公式を証明した.

定理 5.4 ([NS22, NSa]). $\mathfrak{a}$ を $\overline{X}/G$ のイデアルとする. このとき

$$C_{a,b,\gamma} := \mathrm{cont}^{\ge a}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}) \cap \mathrm{cont}^{\ge 1}(\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}) \cap \mathrm{cont}^b(\mathfrak{n}_{\ell, \overline{X}^{(\gamma)}}) \subset \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}$$

に対し,

$$\mathrm{mld}_x(\overline{X}/G, \mathfrak{a}^r) = \inf_{a,b \ge 0, \gamma \in G} \left\{ \mathrm{codim}\, C_{a,b,\gamma} + \mathrm{age}(\gamma) - \frac{b}{\ell} - ra \right\}$$

が成立する.

定理 5.4 を使って, 定理 5.1 (や商特異点に対する LSC 予想) を証明することができる. $\overline{X}$ が非特異である場合 (つまり $\overline{X} = \overline{A}$), Nash イデアルは $\mathfrak{n}_{\ell, \overline{X}^{(\gamma)}} = \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}$ をみたす. 従っ

て, $C_{a,b,\gamma}$ が閉 cylinder となり, 前節で説明した Ein-Mustaţă-安田の証明法が適用できることがポイントとなっている. $\overline{X}/G$ 上で対応する cylinder $C_{a,b}$ を考えると閉にならないが, Denef-Loeser が定義した $\overline{X}_\infty^{(\gamma)}$ に $C_{a,b}$ を引き戻して得られる $C_{a,b,\gamma}$ は閉になるのである.

最後に定理 5.1 において $\overline{X}$ が klt であることを仮定している理由を説明する. PIA 予想の証明にあたり, 弧空間 $\overline{X}_\infty^{(\gamma)}$ の cylinder の余次元の比較が必要になる. この際, 想定通りに余次元が下がることを証明するために, 弧空間 $\overline{X}_\infty^{(\gamma)}$ が自明でない (1 点集合にならない) ことが必要となる. $\overline{X}$ が klt であることを仮定することで, Hacon-McKernan によって示された「klt 多様体の特異点解消のファイバーが有理鎖連結である」こと, Graber-Harris-Starr により示された「ファイバーが有理鎖連結であれば曲線はセクションをもつ」を利用し, $\overline{X}^{(\gamma)}$ 上に弧が十分多く存在することを証明することができる. この議論は Ein-Mustaţă-安田の証明には現れない, 論文 [NS22] の議論の新しい部分である (通常の k-scheme X の場合, $\dim X \geq 1$ であれば X_∞ は無限次元となる).

例 5.5. $\overline{X}$ が klt でない場合には弧空間 $\overline{X}_\infty^{(\gamma)}$ が自明になることがある. $\overline{X} \subset \mathbb{A}_k^3$ が $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ で定義されるとする. さらに $d = 3, \gamma = \mathrm{diag}(\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ であるとする. このとき, $\overline{X}^{(\gamma)}$ は $x_1^3 + tx_2^3 + t^2x_3^3 = 0$ で定義されるような $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^3$ の部分 scheme となる. このとき, $\overline{X}^{(\gamma)}$ が 1 点集合になることが, t の次数に着目することで分かる.

以上の説明は群 G が $\mathbb{A}_k^N$ に線形に作用する場合である (論文 [NS22] の内容). 論文 [NSa] では非線形な作用を扱っている. 非線形な作用は, 完備化を経ることにより線形な作用に置き換えることができる. 完備化を経ているため, $k[x_1, \dots, x_N][[t]]/I$ や $k[t][[x_1, \dots, x_N]]/J$ といった環の弧空間が登場する. 論文 [NSa] において, こういった弧空間の理論が整備され, 論文 [NS22] の証明が拡張されている. 論文 [NSc] では, 「$\mathbb{A}_k^N$ 内で semi-invariant な式で定義される完全交叉多様体の商多様体」を扱っている. 定理 5.2 の状況は「invariant な式で定義される完全交叉多様体の商多様体」であり, それよりも広いクラスを扱えるようになった (3 次元 terminal 特異点のクラスを含んでいる).

6 商特異点の ACC 予想・index 予想

この章では, 商特異点の弧空間の理論を使った ACC 予想・index 予想への応用を説明する.

まず, 定理 5.4 を使うことで, 次の事実を証明することができる.

命題 6.1 ([NS22]). 定理 5.4 と同じ状況において,

$$\mathrm{mld}_x(\overline{X}/G, \mathfrak{a}) = \min_{\gamma \in G} \mathrm{mld}_x\bigl(\overline{X}/\langle\gamma\rangle, \mathfrak{a}\mathcal{O}_{\overline{X}/\langle\gamma\rangle}\bigr)$$

が成り立つ.

これにより, Borisov [Bor97] が提起した問題「商特異点の MLD の集合は巡回商特異点の MLD の集合に一致するか？」を肯定的に解決することができる. さらに, 巡回商特異点の MLD はトーリック多様体の MLD になり, トーリック多様体に対する ACC 予想は Ambro [Amb06] により証明されている. 従って, 商特異点の ACC 予想 (因子なしのバージョン) が正

しいことが分かる.

定理 6.2 ([NS22]). d を正整数とする. このとき集合

$$\{\mathrm{mld}_x(X) \mid \dim X = d \text{ で } X \text{ は } x \text{ で商特異点をもつ }\}$$

は ACC を満たす.

命題 6.1 は Shokurov の index 予想にも応用することができる. 命題 6.1 と線型有限群に対する Jordan の定理を組み合わせることにより, 巡回商特異点の場合に帰着することができる. トーリック多様体に対する index 予想は Ambro [Amb09] により証明されているため, 一般の商特異点に対する証明が完結する.

定理 6.3 ([NSb]). 商特異点に対し, Shokurov の index 予想 (予想 3.4) が成立する.

Jordan の定理とは「各正整数 N に対し正整数 $d(N)$ が存在し, 任意の有限部分群 $G \subset \mathrm{GL}_N(k)$ に対し, 指数 $d(N)$ 以下の G の正規部分アーベル群 H が存在する」という定理である. Jordan の定理を index 予想に利用するというアイデアは Moraga の論文 [Mor] から拝借している. Jordan の定理を用い, 命題 6.1 を二度適用することで比較的簡単に定理 6.3 は証明できる.

参考文献

[Ale93] V. Alexeev, *Two two-dimensional terminations*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 527–545.

[Amb99] F. Ambro, *On minimal log discrepancies*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 573–580.

[Amb06] ______, *The set of toric minimal log discrepancies*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), no. 3, 358–370.

[Amb09] ______, *On the classification of toric singularities*, Combinatorial aspects of commutative algebra, Contemp. Math., vol. 502, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 1–3.

[Bor97] A. Borisov, *Minimal discrepancies of toric singularities*, Manuscripta Math. **92** (1997), no. 1, 33–45.

[CH21] G. Chen and J. Han, *Boundedness of (ϵ, n)-complements for surfaces*, Adv. Math. **383** (2021), Paper No. 107703, 40.

[DL02] J. Denef and F. Loeser, *Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence*, Compositio Math. **131** (2002), no. 3, 267–290.

[EM04] L. Ein and M. Mustaţă, *Inversion of adjunction for local complete intersection varieties*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1355–1365.

[EM09] L. Ein and M. Mustaţă, *Jet schemes and singularities*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 505–546.

[EMY03] L. Ein, M. Mustaţă, and T. Yasuda, *Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 519–535.

[Fuj01] O. Fujino, *The indices of log canonical singularities*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 2, 229–253.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[HM07] C. D. Hacon and J. Mckernan, *On Shokurov's rational connectedness conjecture*, Duke Math. J. **138** (2007), no. 1, 119–136.

[HLL] J. Han, J. Liu, and Y. Luo, *ACC for minimal log discrepancies of terminal threefolds*, available at `arXiv:2202.05287v2`.

[Ish00] S. Ishii, *The quotients of log-canonical singularities by finite groups*, Singularities—Sapporo 1998, Adv. Stud. Pure Math., vol. 29, Kinokuniya, Tokyo, 2000, pp. 135–161.

[Kaw14] M. Kawakita, *Discreteness of log discrepancies over log canonical triples on a fixed pair*, J. Algebraic Geom. **23** (2014), no. 4, 765–774.

[Kaw15a] ———, *The index of a threefold canonical singularity*, Amer. J. Math. **137** (2015), no. 1, 271–280.

[Kaw15b] ———, *A connectedness theorem over the spectrum of a formal power series ring*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 11, 1550088, 27.

[Kaw92] Y. Kawamata, *The minimal discrepancy coefficients of terminal singularities in dimension 3*, Appendix to V. V. Shokurov, *Three-dimensional log perestroikas*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 1, 105–203.

[Mor] J. Moraga, *Small quotient minimal log discrepancies*, available at `arXiv:2008.13311v1`.

[Nak16a] Y. Nakamura, *On semi-continuity problems for minimal log discrepancies*, J. Reine Angew. Math. **711** (2016), 167–187.

[Nak16b] ———, *On minimal log discrepancies on varieties with fixed Gorenstein index*, Michigan Math. J. **65** (2016).

[NS22] Y. Nakamura and K. Shibata, *Inversion of adjunction for quotient singularities*, Algebr. Geom. **9** (2022), no. 2, 214–251.

[NSa] ———, *Inversion of adjunction for quotient singularities II: Non-linear actions*, available at `arXiv:2112.09502v1`.

[NSb] ———, *Shokurov's index conjecture for quotient singularities*, available at `arXiv:2209.04845v1`.

[NSc] ———, *Inversion of adjunction for quotient singularities III: semi-invariant case*, available at `arXiv:2312.05808v1`.

[Sho94] V. V. Shokurov, *A.c.c. in codimension 2* (1994, preprint).

[Sho92] ———, *Three-dimensional log perestroikas*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 1, 105–203 (Russian); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **40** (1993), no. 1, 95–202.

[Sho96] ———, 3-*fold log models*, J. Math. Sci. **81** (1996), no. 3, 2667–2699. Algebraic geometry, 4.

[Sho04] ———, *Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips*, Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 328–351; English transl., Proc. Steklov Inst. Math. **3 (246)** (2004), 315–336.