McKay correspondence for some finite reflection groups

石井 亮

1　序文

McKay 対応は，商特異点 $\mathbb{C}^n/G$ の特異点解消の幾何と，有限群 G の表現論を結びつけるものである．ADE 型の Dynkin 図形で分類される $G \subset SL(2,\mathbb{C})$ の場合に始まり，$G \subset SL(3,\mathbb{C})$ の場合, small な $G \subset GL(2,\mathbb{C})$ の場合などへと拡張されてきた．川又によって確立された $GL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群に対する McKay 対応においては，商特異点と $\mathbb{Q}$ 因子の組みを考えることにより，G は必ずしも small である必要はなくなっている．そこで，small なものとは対極にある鏡映群の場合に McKay 対応がどのようであるかを考察し，その応用として $\mathbb{C}^3$ 上の G-同変連接層の導来圏の半直交分解に関する Polishchuk-Van den Bergh の予想を考えたい．それは，$\mathbb{C}^3$ の鏡映群 G による商と判別式因子（に適切な係数をつけたもの）の組の極大 $\mathbb{Q}$ 分解的端末化の $\mathbb{C}^3/G \cong \mathbb{C}^3$ 上の MMP の各ステップが G の共役類に対応するか，という問題に翻訳される．本稿は，いくつかの例について報告する．

2　McKay 対応

2.1　既約例外曲線と非自明既約表現の対応

G を $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群，$X=\mathbb{C}^2/G$ を商特異点とする．この場合極小特異点解消 $\tau : Y \to X$ はクレパント解消であり，例外集合の双対グラフは ADE 型の Dynkin 図形になることはよく知られている．一方 G の既約表現に，$G \subset SL(2,\mathbb{C})$ により定まる 2 次元の表現をテンソルして分解することで，G の既約表現を頂点とする箙を作ることができる．この箙が同じ ADE 型の拡大 Dynkin 図形の二重箙になる，というのが本質的に McKay の発見したこと [McK80] であった．この古典的な McKay 対応においては，τ の既約例外曲線と G の非自明な既約表現が対応する，ということになる．

2.2 点軌道の Hilbert スキーム

この McKay 対応を記述する道具として中村により導入されたのが，点軌道の Hilbert スキーム，いわゆる G-Hilb である．有限群 G が代数多様体 M に忠実に作用するとする．M 上の *G-cluster* とは，M の G-不変な有限部分スキーム Z で，$H^0(\mathcal{O}_Z)$ が G の表現として正則表現であるもの，すなわち群環 $\mathbb{C}[G]$ を G の表現とみたものと同型であるようなもののことである．例えば自由 G-軌道に非約なスキーム構造を入れたものは G-cluster である．そして G-cluster のモジュライ空間として G-軌道の Hilbert スキーム

$$G\text{-Hilb}(M) := \{Z \subset M \mid Z \text{ は } G\text{-cluster}\}$$

が定義される．例えば $M = \mathbb{C}^2$ の場合 G-Hilb$(\mathbb{C}^2)$ は

$$\{I \subset \mathbb{C}[x,y] \mid \ I \text{ は } G\text{-不変イデアルで } G \text{ の表現として } \mathbb{C}[x,y] \cong \mathbb{C}[G]\}$$

と解釈される．

次の定理は，$n = 2$ のときが伊藤-中村 [IN99] と Kapranov-Vasserot[KV00]，$n = 3$ のときが Bridgeland-King-Reid[BKR01] による：

定理 2.1. *$G \subset SL(n,\mathbb{C})$ は有限部分群で，$n \leq 3$ とする．このとき，$Y =$ G-Hilb$(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n/G$ のクレパント解消であり，Fourie-Mukai 変換によって導来同値*

$$D^b(\mathrm{coh}\, Y) \cong D^b(\mathrm{coh}^G(\mathbb{C}^3))$$

が導かれる．ここで，$\mathrm{coh}^G(\mathbb{C}^3)$ は $\mathbb{C}^3$ 上の G-同変な連接層のなすアーベル圏である．

2.3 $GL(2,\mathbb{C})$ の場合

一般に有限位数の元 $g \in GL(n,\mathbb{C})$ が 擬鏡映とは，g が固有値 1 を重複度 $n-1$ で持つことを言う．つまり，g の $\mathbb{C}^n$ における固定点集合が超平面になっているということである．有限部分群 $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ が *small* であるとは，G が擬鏡映を含まないこと，つまり，G の $\mathbb{C}^n$ への作用が余次元 2 の閉集合を除いて自由であることである．$G \subset GL(2,\mathbb{C})$ が small で $G \not\subset SL(2,\mathbb{C})$ のときは，極小特異点解消 $\tau : Y \to X$ の既約例外曲線の数より G の非自明既約表現の数の方が必ず多くなる．Wunram [Wun88] は既約表現の中から既約例外曲線に対応すべきものを特定したが，それらの表現は *special representation* と呼ばれる．導来圏の間には埋め込み

$$D^b(\mathrm{coh}\, Y) \hookrightarrow D^b(\mathrm{coh}^G(\mathbb{C}^2))$$

があって，その差は exceptional collection によって埋められる [IU15],[Kaw16].

3　川又による $GL(3,\mathbb{C})$ McKay 対応

有限群 $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ に対して $\pi : \mathbb{C}^n \to X := \mathbb{C}^n/G$ を商写像とする．G が small でないときは，π は因子に沿って分岐するので，X 上の $\mathbb{Q}$-因子 B を $\pi^*(K_X + B) = K_{\mathbb{C}^n}$ となるように定めることができる．このとき，組 (X,B) は KLT であり，$f : Y \to X$ が射影的双有理射で Y が $\mathbb{Q}$-分解的かつ端末特異点のみを持つならば，

$$K_Y + f_*^{-1}B = f^*(K_X + B) + \sum_{E:\text{例外因子}} a_E E$$

と書いたとき，$a_E > -1$ である．

定義 3.1 ([Kaw18])**.** $f : Y \to B$ が組 (X,B) の極大 $\mathbb{Q}$ 分解的端末化とは，f の例外因子の集合が，$a_E \leq 0$ となる X の上空の因子の集合と一致することを言う．

極大 $\mathbb{Q}$ 分解端末化の存在は [BCHM10, Corollary 1.4.3] による．なお，一般には複数の極大 $\mathbb{Q}$ 分解端末化が存在する．

定理 3.2 ([Kaw18])**.** $G \subset GL(3,\mathbb{C})$ は有限部分群で，境界因子 B は上のように定義されるとする．このとき，極大 $\mathbb{Q}$ 分解端末化 $Y \to X$ で次のようなものが存在する．

- Y は商特異点のみを持つ．Y に付随する滑らかな *Deligne-Mumford* スタックを $\tilde{Y}$ とする．
- 充満忠実な埋め込み $\Phi : D^b(\mathrm{coh}\,\tilde{Y}) \hookrightarrow D^b(\mathrm{coh}^G(\mathbb{C}^3))$ がある．
- $D^b(\mathrm{coh}^G(\mathbb{C}^3))$ は $D^b(\mathrm{coh}\,\tilde{Y})$ といくつかの滑らかなアフィン多様体の導来圏に半直交分解される．

半直交分解については，次の節で説明する．上の定理における極大 $\mathbb{Q}$ 分解端末化 Y は [Kaw18] において次のように構成される．$H := G \cap SL(3,\mathbb{C})$ とおくと

$$Y_1 := H\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3) \xrightarrow{f_1} \mathbb{C}^3/H$$

はクレパント解消である．$\overline{G} := G/H \subset GL(3,\mathbb{C})/SL(3,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ は巡回群であるから，商 $X_1 := Y_1/\overline{G}$ と $Y_1 \to X_1$ により定まる $\mathbb{Q}$ 因子 B_1 を考えると，組 (X_1, B_1) はトロイダル KLT 特異点のみを持ち，その極大 $\mathbb{Q}$ 分解端末化として Y を得る．

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Y \\ & & & & \downarrow g \\ & & Y_1 & \xrightarrow{\pi_1} & X_1 \\ & & f_1 \downarrow & & \downarrow \bar{f}_1 \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\pi_3} & \mathbb{C}^3/H & \xrightarrow{\pi_2} & X \end{array} \tag{3.1}$$

この構成において，次の事実は重要である．

系 3.3. 導来圏 $D^b(\mathrm{coh}^{\overline{G}}(Y_1)) = D^b(\mathrm{coh}[Y_1/\overline{G}])$ は $D^b(\mathrm{coh}^G(\mathbb{C}^3))$ に三角圏同値である．ここで，$[Y_1/\overline{G}]$ は商スタックを表す．

4 半直交分解

定義 4.1. $\mathcal{D}$ を三角圏とする．$\mathcal{D}$ がその充満部分三角圏 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ によって $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \rangle$ と半直交分解するとは，

- $\alpha_1 \in \mathcal{D}_1$, $\alpha_2 \in \mathcal{D}_2$ ならば，$\mathrm{Hom}(\alpha_2, \alpha_1) = 0$.
- 任意の $\alpha \in \mathcal{D}$ に対し，$\alpha_1 \in \mathcal{D}_1$, $\alpha_2 \in \mathcal{D}_2$ と完全三角 $\alpha_2 \to \alpha \to \alpha_1 \to \alpha_2[1]$ が存在する．

例えば代数幾何学における次のような操作に付随して半直交分解は現れる．

例 4.2 ([Orl92]). X を滑らかな代数多様体，$i : C \hookrightarrow X$ を余次元 c の滑らかな部分多様体とする．C を中心とする X のブローアップを $f : Y \to X$, その例外因子を $j : E \hookrightarrow Y$ で表し，射 $E \to C$ を g とおく．このとき函手 $\Phi_k : D^b(C) \to D^b(Y)$ を

$$\Phi_k(-) = j_*(g^*(-)) \otimes \mathcal{O}_E(-k)$$

で定めると，

$$D^b(Y) = \langle \Phi_{-c+1}(D^b(C)), \dots, \Phi_{-1}(D^b(C)), \mathbb{L}f^* D^b(X) \rangle$$

と半直交分解する．

例 4.3 ([Kaw06]). $\phi : X \to Y$ を高々商特異点しか持たないトーリック多様体の小収縮とし，$\phi^+ : X^+ \to Y$ をそのフリップとする．$\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$ でそれぞれ対応する非特異 DM スタックを表す．また，$D \subset X$ を ϕ の例外集合とし，$F = \phi(D)$ 上に境界因子 C を適切に定義して組 (F, C) に対応する DM スタックを $\mathcal{F}$ とする．このとき，$D^b(\mathcal{X})$ は $D^b(\mathcal{X}')$ といくつかの $D^b(\mathcal{F})$ のコピーへと半直交分解される．この主張はトロイダルなログフリップの場合に拡張される [Kaw18].

例 4.4 ([IU15] Theorem 1.6, [BS20]). X が滑らかな準射影的多様体，D がその上の滑らかな既約因子であるとき，整数 $r \geq 2$ に対して r 次の根スタック $f : \mathcal{X} \to X$ が定義される．f は $X \setminus D$ 上は同型であり，$f^{-1}(D)$ が $\mathcal{X}$ 上の既約因子の r 倍になるようなものである．この DM スタック $\mathcal{X}$ の導来圏 $D^b(\mathcal{X})$ は，$D^b(X)$ と $r-1$ 個の $D^b(D)$ のコピーへと半直交分解される．

3つ以上の部分三角圏への半直交分解も同様に定義されて，例えば $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2' \rangle$，$\mathcal{D}_2' = \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \rangle$ のときは $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \rangle$ となる．半直交分解の定義は順序に依存しているが，変異という操作で部分圏の埋め込み函手を変更することにより，順序を入れ替えることができる．

5 Polishchuk と Van den Bergh の予想

ここで，Polishchuk-Van den Bergh による予想を紹介する．V を滑らかな準射影的多様体，G を V に効果的に作用する有限群とする．元 $g \in G$ に対し，$C(g) \subset G$ で g の中心化部分群を表す．

予想 5.1 ([PVdB19])**.** 次の仮定をする：

$$\forall g \in B,\, V^g/C(g) \text{ は滑らかである．} \tag{$*$}$$

このとき，$\mathcal{D} = D^b(\mathrm{coh}^G(V))$ の半直交分解で，その各成分は G の共役類 $[g]$ により添字付けられており，その成分を $\mathcal{D}_{[g]}$ と書いたとき，$\mathcal{D}_{[g]} \cong D^b(\mathrm{coh}(V^g/C(g)))$ が成立するものが存在する．

ここで，条件 $(*)$ を $g = e$ の場合に考えると，V/G が滑らかということになり，$V = \mathbb{C}^n$ で G の作用が線形であるときは，Chevalley-Shephard-Todd の定理によって G は擬鏡映で生成されるということになる．従って，考察するのはおもにそのような場合になる．

Polishchuk-Van den Bergh [PVdB19] は，実際に G が A, B, G_2, F_4 型のルート系の Weyl 群であるときに $(*)$ および予想が成立することを証明している．なお，D 型のときは $(*)$ が成立せず，E 型のときにも $(*)$ が成立しないと予想されている．

6 実 3 次元の鏡映群の場合

実直交群 O(3) の有限鏡映部分群の場合は，$(*)$ は必ず成立する（[PVdB19, Proposition 2.2.6]）．そこで，O(3) の有限鏡映部分群の場合に McKay 対応 (系 3.3) を用いて予想 5.1 を示すことを試みる．つまり，系 3.3 の記号で $D^b(\mathrm{coh}[Y_1/\overline{G}])$ の半直交分解を代数幾何的方法で構成しようということである．今の場合 $\overline{G} = G/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり，$\overline{G}$ の非自明な元 (それは K_{Y_1} を自明化する切断の符号を反転する) の Y_1 における固定点集合の各連結成分の余次元は奇数になるので，次が成立する：

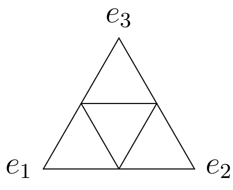
補題 6.1. $G \subset \mathrm{O}(3)$ が有限鏡映部分群のとき，図式 (3.1) において X_1 は高々端末商特異点しか持たず，従って X_1 が極大 $\mathbb{Q}$ 分解端末化となる．すなわち，$Y = X_1$ である．

商多様体 $X_1(= Y)$ の商特異点に滑らかなスタックの構造を入れたものを $\tilde{X}_1(= \tilde{Y})$ とし，$\tilde{X}_1$ 上の $\mathbb{Q}$ 因子 $\tilde{B}_1$ を X 上の B の狭義変換，$\tilde{D}_1$ を $\tilde{B}_1$ の台となっている被約整因子 (つまり $\tilde{D}_1 = \lceil \tilde{B}_1 \rceil$) とすると，商スタック $[Y_1/\overline{G}]$ は組 $(\tilde{X}_1, \tilde{D}_1)$ から定まる根スタックと同型である．よって，例 4.4 のように $D^b(\mathrm{coh}[Y_1/\overline{G}])$ は $D^b(\mathrm{coh}\,\tilde{X}_1)$ と $D^b(\mathrm{coh}\,\tilde{D}_1)$ へと半直交分解する．

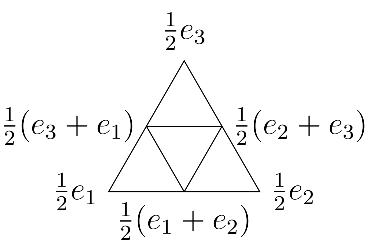
すると，例 4.2, 4.3 を念頭におけば，問題は，$X \cong \mathbb{C}^3$ 上の MMP によって X_1 から X へ至る過程で，$D^b(\mathrm{coh}\,\tilde{X}_1)$ はどのように半直交分解されるか，ということになる．ここでは，いくつかの場合を例に取って説明する．

6.1 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ の場合

最も簡単な $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 = \{\mathrm{diag}(\pm1, \pm1, \pm1)\}$ の場合を考える．この場合はトーリック幾何学的を用いて表示でき，わかりやすい．まず，商を取る前の $\mathbb{C}^3$ は，$N := \mathbb{Z}^3$ を 1-パラメータ部分群の格子として持ち，$\mathbb{R}^3 = \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{R}$ のなかの錐体 $C := (\mathbb{R}_{\geq 0})^3$ に付随するトーリック多様体である．有限対角部分群による商を取るときは，錐体としては同じ C を考えるが，格子が $\mathbb{Z}^3$ より細かくなる．$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ による商のときは格子は $N_G := (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$ であり，$H = G \cap SL(3, \mathbb{C})$ による商の場合は $N_H := \{(a, b, c) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3 \mid a + b + c \in \mathbb{Z}\}$ となる．$\mathbb{C}^3/H$ のクレパント解消を考えるときは，C を $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 1\}$ で切った三角形 (junior simplex) の N_H の格子点による三角形分割を考えれば良い．例えば $Y_1 = H\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$ は次の三角形分割に対応する：

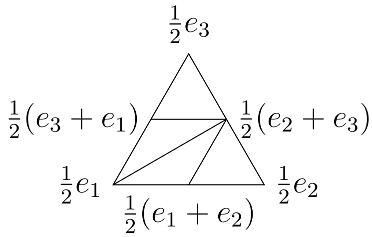


ここで，e_1, e_2, e_3 は $\mathbb{R}^3$ の標準基底である．$X_1 = Y_1/\overline{G}$ は同じ扇で格子を $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$ に取り替えたものであるから，次の図で表すことにする：



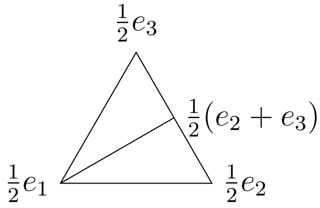
ここでは，1 次元錐を生成する原始的格子ベクトルは必ずしも平面上にはないので，それらを明示するために書き込んでいる．真ん中の三角形と原点でできる三角錐だけ体積が大きく，対応するアフィン多様体の原点に $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ 型端末商特異点がある．この商特異点のところにスタックの構造を入れたものが $\tilde{X}_1$ であり，商スタック $[Y_1/\overline{G}]$ は $\tilde{X}_1$ から $\frac{1}{2}e_i (i = 1, 2, 3)$ に対応する 3 枚のアフィン平面で分岐する 2 次の根スタックとして構成されるものである．従って，例 4.4 により $D^b(\mathrm{coh}([Y_1/\overline{G}])$ は $D^b(\mathrm{coh}(\tilde{X}_1))$ と 3 枚のアフィン平面の導来圏に半直交分解する．

次に (格子は X_1 から変更せずに) 扇の分割を変更して



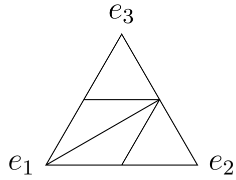
(6.1)

に対応するものを X_2 とすると，X_2 は滑らかで $X_1 \dashrightarrow X_2$ はトーリックフリップである．すると例 4.3 により $D^b(\operatorname{coh}\tilde{X}_1)$ は $D^b(\operatorname{coh}X_2)$ と 1 点の導来圏に半直交分解する．さらに扇を



に変更したものを X_3 とすると，X_2 は X_3 を 2 本のアフィン直線に沿ってブローアップしたものであるから，例 4.2 により $D^b(\operatorname{coh}X_2)$ は $D^b(\operatorname{coh}X_3)$ と 2 本のアフィン直線の導来圏に半直交分解する．最後に，X_3 は X をアフィン直線に沿ってブローアップしたのもであるから，$D^b(\operatorname{coh}X_3)$ は $D^b(\operatorname{coh}X)$ とアフィン直線の導来圏に半直交分解する．以上をまとめると，$D^b(\operatorname{coh}(Y_1/\overline{G}))$ は $D^b(\operatorname{coh}(X))$ と 3 枚のアフィン平面，3 本のアフィン直線，そして 1 点の導来圏に半直交分解する．これは予想 5.1 と一致する．

注 6.2. $\mathbb{C}^3/H$ のクレパント解消として，H-Hilb$(\mathbb{C}^3)$ の代わりに他の ($\overline{G}$ で保たれる) クレパント解消を取ることも可能である．例えば Y_1 として扇



から定まるものを考える．すると，$X_1 = Y_1/\overline{G}$ はいきなり (6.1) になるので，MMP のステップは少なくなりフリップは不要となる．その代わり，商スタック $[Y_1/\overline{G}]$ を X_1 の根スタックと見る時の因子の一つがアフィン平面の 1 点ブローアップになり，そこに点の導来圏が含まれていて，結果としてできる半直交分解は上で説明したものの順序を入れ替えたものになっている．

6.2 2 面体群と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の直積

位数 $2n$ の 2 面体群 $D_{2n} \subset \mathrm{O}(2) \subset GL(2)$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\} = \mathrm{O}(1) \subset GL(1)$ の直積

$$G = D_{2n} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(1) \subset \mathrm{O}(3)$$

を考える．これは O(3) の中で正 n 角形を保つ元のなす部分群である．この時，

$$H := G \cap SL(3, \mathbb{C}) = D_{2n} \subset \mathrm{SO}(3)$$

であり，n 角形の回転の群 $K \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が H の指数 2 の部分群として含まれている．ここでは，$\mathbb{C}^3/H$ のクレパント解消として H-Hilb$(\mathbb{C}^3)$ の代わりに

$$Y_1 := (H/K)\text{-Hilb}(K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)) \to \mathbb{C}^3/H$$

を取ると，注 6.2 同様 MMP は簡略化される．実際，

$$K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3) \cong K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}$$

であるが， K-Hilb$(\mathbb{C}^2)$ は曲面の A_{n-1} 型特異点のクレパント解消であり，$H/K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は K-Hilb$(\mathbb{C}^2)$ には A 型の Dynkin 図形を折り返すように作用，$\mathbb{C}$ には ± 1 で作用する．よって，K-Hilb$(\mathbb{C}^3)/(H/K)$ の特異点 は 2 次元 A_1 特異点とアフィン直線の積の形のものが 2 つまたは 1 つであり，$Y_1 \to K$-Hilb$(\mathbb{C}^3)/(H/K)$ はクレパント解消である．これをさらに G/H で割ると

$$X_1 \to K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)/(G/K) \cong \big((K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)/(H/K)\big) \times (\mathbb{C}/\pm 1)$$

という射ができて，X_1 は滑らかな右辺をアフィン直線 2 本または 1 本に沿ってブローアップしたものになる．このようにすると，話を本質的に 2 次元の場合に帰着できて，予想 5.1 を確かめることができる．

6.3 正 4 面体の対称群

$G \subset \mathrm{O}(3)$ を正 4 面体を保つものとする．このときも，部分群 $K \subset H = G \cap SL(3, \mathbb{C})$ として $K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となるものを取り，

$$Y_1 = H/K\text{-Hilb}(K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3))$$

とおいて，$Y_1/\overline{G} \to \mathbb{C}^3/G$ を

$$Y_1/\overline{G} \to K\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)/(G/K) \to \mathbb{C}^3/G$$

と分解すると，それぞれの射がアフィン直線についてのブローアップであることがわかり，やはり予想 5.1 を確かめることができる．なお，この場合 $G \cong S_4$ は A_3 型 Weyl 群であり，[PVdB19] ですでに示された場合に含まれている．

6.4 その他の場合

O(3) の部分群 (で O(2) の部分群でないもの) については，残る正８面体と正２０面体の場合についても，検討中である．ただし，特に後者について，正 20 面体群 H は単純群であり，上記のように正規部分群を用いて因子収縮等を構成することはできないので，適切な計算法を考えることになる．

References

[BCHM10] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon, and James McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468. MR 2601039

[BKR01] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535–554 (electronic). MR MR1824990 (2002f:14023)

[BS20] Daniel Bergh and Olaf M. Schnürer, *Conservative descent for semi-orthogonal decompositions*, Adv. Math. **360** (2020), 106882, 39. MR 4031114

[IN99] Y. Ito and I. Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 151–233. MR 1714824 (2000i:14004)

[IU15] Akira Ishii and Kazushi Ueda, *The special McKay correspondence and exceptional collections*, Tohoku Math. J. (2) **67** (2015), no. 4, 585–609. MR 3436544

[Kaw06] Yujiro Kawamata, *Derived categories of toric varieties*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 3, 517–535. MR MR2280493 (2008d:14079)

[Kaw16] ———, *Derived categories of toric varieties III*, Eur. J. Math. **2** (2016), no. 1, 196–207. MR 3454097

[Kaw18] ———, *Derived McKay correspondence for $GL(3, \mathbf{C})$*, Adv. Math. **328** (2018), 1199–1216. MR 3771150

[KV00] M. Kapranov and E. Vasserot, *Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras*, Math. Ann. **316** (2000), no. 3, 565–576. MR MR1752785 (2001h:14012)

[McK80] John McKay, *Graphs, singularities, and finite groups*, The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, pp. 183–186. MR MR604577 (82e:20014)

[Orl92] D. O. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 4, 852–862. MR MR1208153 (94e:14024)

[PVdB19] Alexander Polishchuk and Michel Van den Bergh, *Semiorthogonal decompositions of the categories of equivariant coherent sheaves for some reflection groups*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 9, 2653–2749. MR 3985610

[Wun88] Jürgen Wunram, *Reflexive modules on quotient surface singularities*, Math. Ann. **279** (1988), no. 4, 583–598. MR MR926422 (89g:14029)