

# 水の密度逆転領域を含む自然対流と凍結・融解の多相場数値解法

西本 和貴<sup>1</sup>・本西 亮太<sup>2</sup>・鳥生 大祐<sup>3</sup>・牛島 省<sup>4</sup>

<sup>1</sup>非会員 京都大学大学院 工学研究科 修士課程 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)

E-mail: nishimoto.kazuki.35n@st.kyoto-u.ac.jp (Corresponding Author)

<sup>2</sup>学生員 京都大学大学院 工学研究科 修士課程 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)

E-mail: motonishi.ryota.65z@st.kyoto-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 博(工) 京都大学 学術情報メディアセンター (〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: toriu.daisuke.8v@kyoto-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 工博 京都大学 学術情報メディアセンター (〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: ushijima.satoru.3c@kyoto-u.ac.jp

本研究では、密度逆転領域を含む自然対流を伴った水の凍結および水の融解問題に対し、相平均モデルに基づく多相場数値解法を適用した。凍結・融解モデルについては、固液界面におけるステファン条件の計算手法を改良し、計算セル内における界面位置を考慮して凍結層厚さを計算する方法を提案した。1次元の凍結問題を計算して提案手法の基礎的検討を行った後、矩形領域内における非定常凍結問題および非定常融解問題を計算した。その結果、計算により得られた固液界面位置の変化が既往の実験結果によく一致することが示された。また、密度逆転を伴う自然対流についても適切に計算されることが示された。

**Key Words:** phase-change, freezing, melting, multiphase-model, natural convection, density inversion, finite volume method

## 1. 緒言

寒冷地における貯水槽内や水道管内では、自然対流を伴った水の凍結および水の融解現象が見られる。水は約4°C付近で密度が最大となるため、上記のような現象では密度逆転現象を含む自然対流が発生する場合も多い<sup>1)</sup>。界面付近での流れが凍結・融解過程に与える影響は大きく、このような現象に対して数値計算を行う際には水と氷の力学的・熱的連成を考慮しながら凍結・融解による界面移動を扱える手法が必要となる。また、相変化によって界面形状が大きく変化する場合も多く、任意形状の固体に対する適用性も重要となる。

任意形状の移動固体を含む多相場を扱える計算手法として、例えば牛島ら<sup>2)</sup>は流体計算において固体領域を仮想的な流体とみなして相平均された流体の基礎方程式をEuler格子上で計算し、得られた流速と固体の速度を質量平均して最終的な多相場の流速を得る手法を提案している。この手法は流体と固体の熱的な連成を扱うことも可能であり、例えば多孔質体内部の自然体流や回転物体周りの非等温流れに適

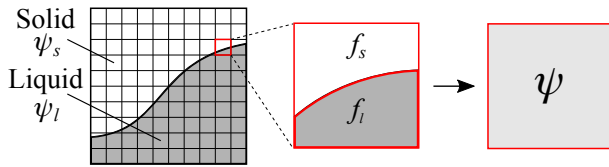
用されている<sup>3),4)</sup>。

本研究では、この牛島ら<sup>2)</sup>の多相場数値解法に凍結・融解モデルを導入し、空間に固定された等間隔の直交構造格子上で水と氷の力学的・熱的連成を考慮しながら凍結・融解による界面移動を扱える手法を構築する。凍結・融解に伴う界面の移動を数値計算で再現計算するための手法としては、例えば界面上でステファン条件を扱う手法<sup>5),6)</sup>や、エンタルピー法<sup>7),8)</sup>など様々な手法が提案されている。本研究では、その中でも導入が比較容易だと考えられる田子ら<sup>6)</sup>の手法について、界面を含む計算セル内でのステファン条件の計算方法に改良を加えた上で牛島ら<sup>2)</sup>の多相場数値解法に導入する。本研究ではまず、提案手法の基本的な性質を確認するために、液体の運動を無視した1次元凍結問題を計算し、凍結厚さや温度分布について理論解と比較する。次に、矩形領域内における自然対流を伴う凍結問題、融解問題をそれぞれ計算し、界面形状について既往の実験結果<sup>9),10)</sup>と比較して提案手法の適用性を確認する。

## 2. 数値解析手法

### (1) 多相場の取り扱い

本研究では、**図-1**に示すように、固相と液相から構成される多相場を等間隔の直交構造格子で分割し、各計算セルに占める固体の体積割合(固相率)  $f_s$  に基づいて相平均された基礎方程式を用いて液体の流動、固体内の熱伝導、液体・固体間の相変化を統一的に計算する。ここで、**図-1**において液相率  $f_l$  は各計算セルに占める液相の体積割合を表し、 $f_s + f_l = 1$  が成り立つ。なお、既往の研究<sup>11)-13)</sup>においても見られるように、液体は非圧縮性流体、固体についても非圧縮であるとし、水の凍結時には、各計算セルで減少する水の体積と増加する氷の体積は等しいと仮定する。融解においても同様に、融解により減少する氷の体積と増加する水の体積は等しいと仮定する。すなわち、本研究では各時間ステップにおける固相率および液相率の時間変化  $\Delta f_s$  および  $\Delta f_l$  について、 $\Delta f_s + \Delta f_l = 0$  が成り立つ。



**図-1** 固相と液相からなる多相場(ここで、 $f_s + f_l = 1$ 。また、 $\psi_s$  および  $\psi_l$  はそれぞれ固相および液相の物性値を表し、 $\psi = f_s \psi_s + f_l \psi_l$  が成り立つ。)

### (2) 基礎方程式

基礎方程式として、既報<sup>2)</sup>に示された非圧縮条件と運動方程式に加え、以下に示す凍結・融解の相変化時に生じる潜熱量を含むエネルギー方程式およびステファン条件を用いる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = & -g \delta_{i2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (T u_j)}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{(\rho c_p)_m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho_s h_L \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\} \quad (3)$$

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_i} = \rho_s h_L \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、 $t$  は時間、 $x_i$  は2次元直交座標系の座標成分、 $g$  は重力加速度、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ、 $\rho_s$  は固相の密度、 $h_L$  は凍結潜熱量である。また、 $\rho$  は液相の密度であり、温度  $T$  の関数とする。 $u_i$ 、 $\lambda$ 、 $c_p$  はそれぞれ流速の  $x_i$  成分、熱伝導率および定圧比熱である。なお、 $\lambda$  および式(3)の  $(\rho c_p)_m$  の下添字  $m$  は、液相と固相の界面である凍結界面上の値を表し、各計算セルに占める固体の体積割合  $f_s$  を用いて、固液相の体積平均から求める。式(3)、(4)の変数の下添字  $s$  と  $l$  は、それぞれ固相と液相の変数を表しており、 $\xi_i$  は各セルにおける凍結層厚さの  $x_i$  成分を表す。

### (3) 計算手順の概要

本研究で提案する手法の計算手順を**図-2**に示す。まず、基礎方程式(1)、(2)を有限体積法に基づいてコロケート格子上で離散化し、非圧縮性流体の解法であるMAC系解法<sup>14)</sup>を用いて、予測段階、圧力計算段階、修正段階の計算により次ステップの圧力  $p^{n+1}$  と流速  $u_i^{n+1}$  を求める。なお、上添字  $n$  は計算の時間ステップを表す。

まず予測段階において、セル境界上の値を用いて、式(2)より流速の予測値  $u_i^*$  を求める。このとき、移流項の計算には5次精度のTVDスキーム<sup>15)</sup>を用いた。圧力計算段階では、以下の圧力ポアソン方程式を離散化し、Bi-CGSTAB法<sup>16)</sup>を用いて計算を行なった。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (5)$$

ここで、 $\phi$  は圧力  $p$  の時間変化であり、 $\phi = p^{n+1} - p^n$  と表される。修正段階では、圧力計算段階で得られた圧力から流速を以下のように更新する。

$$u_i^{**} = u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - p^n) \quad (6)$$

ここで計算された  $u_i^{**}$  は、固相の影響を考慮していない流速であるので、固相の影響を流れ場に反映させるため、以下の相平均操作によって流速を再度更新する。

$$u_i^{n+1} = \frac{f_s \rho_s u_s + f_l \rho_l u_i^{**}}{\rho_s f_s + \rho_l f_l} \quad (7)$$

本研究では固相部分は静止しているとし、上式中において  $u_s = 0$  とする。

上記のように流速を更新した後、式(3)の右辺第2項を無視し、時間方向に離散化した次式(8)を用いて温度の推定値  $T^*$  を求める。

$$T^* = T^n - \Delta t \frac{\partial (T u_j)}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{(\rho c_p)_m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (8)$$

ここで式(8)の移流項の計算には5次精度のTVDス

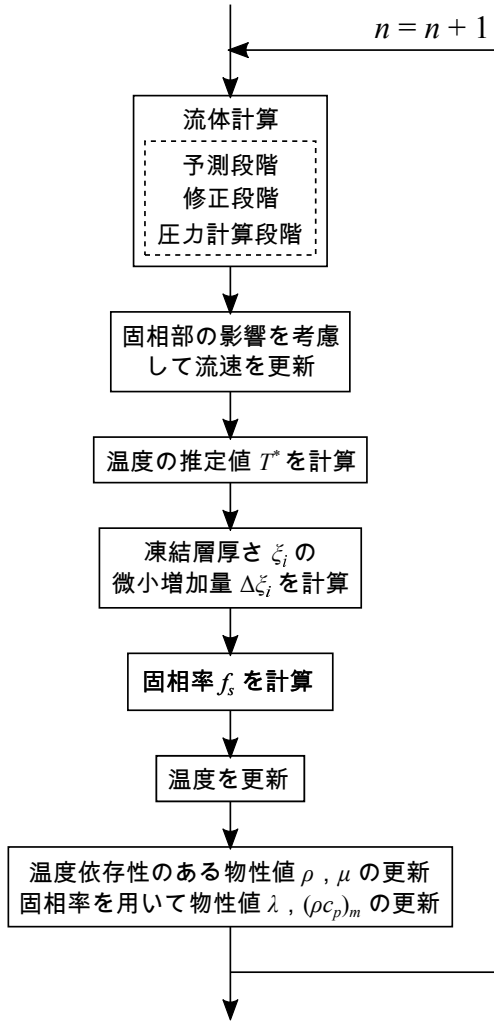


図-2 計算手順 (n は時間ステップ数を表す)

キーム<sup>15)</sup>を用いる。次に、式(4)から凍結層厚さ  $\xi_i$  を求め、固相率  $f_s$  を算定する。 $\xi_i$  および  $f_s$  の具体的な計算方法については次節で述べる。求めた次ステップの固相率  $f_s^{n+1}$  を用いて、次式(9)から  $T$  を更新する。

$$T^{n+1} = T^* + \frac{1}{(\rho c_p)_m} \rho_s h_L (f_s^{n+1} - f_s^n) \quad (9)$$

最後に、得られた  $T$  を用いて  $\rho$  および  $\mu$ 、 $f_s$  を用いて  $\lambda$  および  $(\rho c_p)_m$  をそれぞれを更新して次の時間ステップに進む。

#### (4) 凍結の数値計算法

本研究では、凍結・融解が生じている間は、凍結界面の温度  $T_m$  は一定と仮定する。図-3(a)に示す田子ら<sup>6)</sup>の手法では、凍結界面を含むセル中心温度が凍結界面の温度  $T_m$  と一致するとし、時間  $\Delta t$  間の  $\xi_i$  の変化量  $\Delta \xi_i$  を求める。しかし、この方法では、凍結界面の温度が  $T_m$  以外の値も取るため、凍結・融解

が生じている間、凍結界面の温度  $T_m$  が一定であるという仮定が成立しないという問題点がある。そこで、本研究では、凍結界面の温度を  $T_m$  と固定し、凍結界面を中心としてそれぞれ  $\Delta x_i/2$  離れた温度を考慮する  $\Delta \xi_i$  の計算方法を提案し、以下のように計算する。

$$\Delta \xi_1 = \frac{\Delta t}{\rho_s h_L} \left( \lambda_s \frac{T_m - T_{sx_1}}{\Delta x_1/2} - \lambda_l \frac{T_{lx_1} - T_m}{\Delta x_1/2} \right) \quad (10)$$

ここで、 $T_{sx_1}$  と  $T_{lx_1}$  は凍結界面を含むセルの中心温度と隣接するセルの中心温度を線形内挿することにより求める。 $x_2$  方向についても同様に計算を行う。

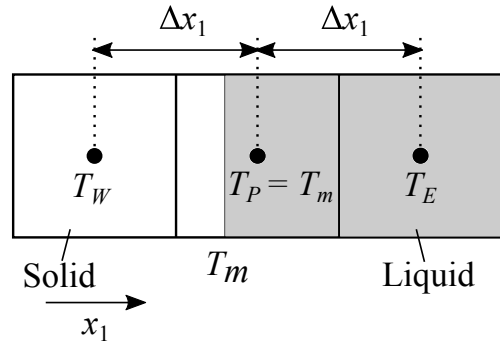
次に、計算時間刻み幅  $\Delta t$  における固相率  $f_s$  の増加量  $\Delta f_s$  の計算法を示す。田子ら<sup>6)</sup>の手法では、 $\Delta f_s$  は図-4における左図の黄色の領域で表され、以下のように計算する。

$$\Delta f_s = \frac{\Delta \xi_1 \Delta x_2 + \Delta \xi_2 \Delta x_1 - \Delta \xi_1 \Delta \xi_2}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (11)$$

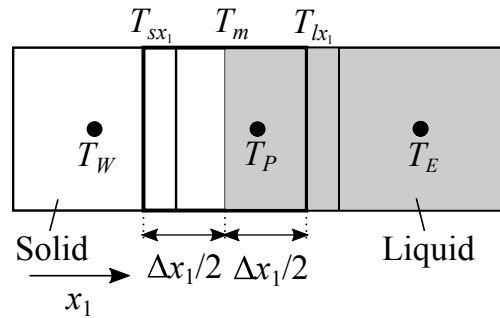
対して、本研究では  $\xi_i$  を用いて  $\Delta f_s$  を図-4の右図の黄色の領域で表し、以下のように計算する。

$$\Delta f_s = \frac{\Delta \xi_1 (\Delta x_2 - \xi_2^n) + \Delta \xi_2 (\Delta x_1 - \xi_1^n) - \Delta \xi_1 \Delta \xi_2}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (12)$$

両手法ともに、求めた  $\Delta f_s$  を足し合わせていくことで、固相率  $f_s$  を計算する。なお、両手法ともに  $0 < f_s < 1$  の場合、完全に凍結しておらず、 $f_s = 1$  の場合、完全に凍結したと判定する。

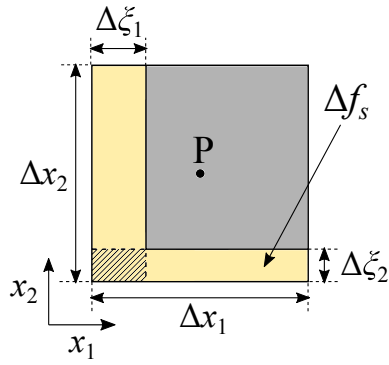


(a) 田子ら<sup>6)</sup>による手法

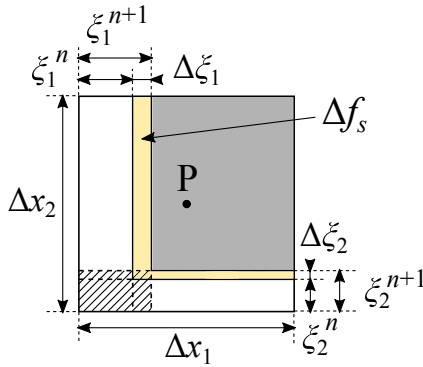


(b) 提案手法

図-3 凍結界面の計算法



(a) 田子ら<sup>6)</sup>による手法



(b) 提案手法

図-4 固相率の計算法

### 3. 1次元凍結問題

凍結層厚さを求める本手法の基礎的な性質を検証するため、図-5に示すような1次元の凍結界面の移動のみを考える液体の凍結問題の計算を行い、各解法の結果を比較する。なお、以下では基礎的な検討として、凍結現象および融解現象のそれぞれに対する提案手法の適用性を確認するために、凍結・融解現象が同時に生じる場合は考えないとする。凍結・融解現象が同時に生じる場合については、既報<sup>17)</sup>において検討を行なっている。

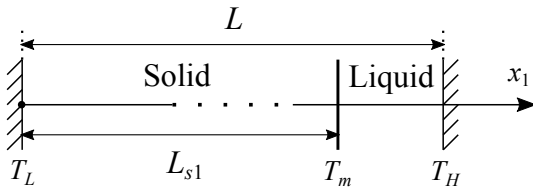


図-5 1次元凍結問題における計算領域

図-5の境界条件は、 $T_L = -10^\circ\text{C}$  および  $T_H = 10^\circ\text{C}$  とする。以降、本研究では液体として水を扱い、凍結界面の温度  $T_m$  は  $0^\circ\text{C}$  とする。また、 $L_{s1}$  は  $f_s$  を用いて求めた凍結界面の位置である。なお、水の密度の式は以下の式を用いた<sup>18)</sup>。

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4} \quad (13)$$

ここで、 $\rho_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 999.8396 \quad [\text{kg/m}^3] \\ \beta_1 &= -0.67896452 \times 10^{-4} \quad [^\circ\text{C}^{-1}] \\ \beta_2 &= 0.907294338 \times 10^{-5} \quad [^\circ\text{C}^{-2}] \\ \beta_3 &= -0.964568125 \times 10^{-7} \quad [^\circ\text{C}^{-3}] \\ \beta_4 &= 0.873702983 \times 10^{-9} \quad [^\circ\text{C}^{-4}] \end{aligned}$$

凍結が十分に進行した定常状態における凍結界面の位置を、田子ら<sup>6)</sup>の手法より得られる結果と比較するため、図-6に示すように分割格子数  $n_1$  と  $L_{s1}$  の理論解  $L_{th}$  に対する計算誤差を表す  $err$  との関係を考える。

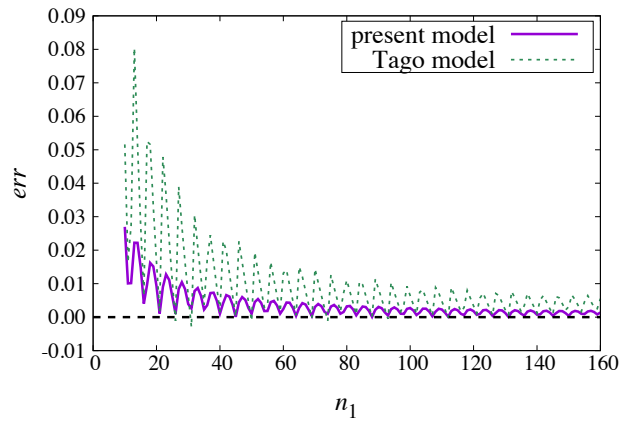


図-6  $n_1$  と  $err$  の関係

ここで、 $L_{s1}$ ,  $L_{th}$  および  $err$  は次式により与えられる。

$$L_{s1} = x_w + \left(\frac{1}{2} + f_s\right) \Delta x_1 \quad (14)$$

$$L_{th} = \frac{\lambda_s(T_m - T_L)}{\lambda_s(T_m - T_L) + \lambda_l(T_H - T_m)} L \quad (15)$$

$$err = \frac{L_{th} - L_{s1}}{L_{th}} \quad (16)$$

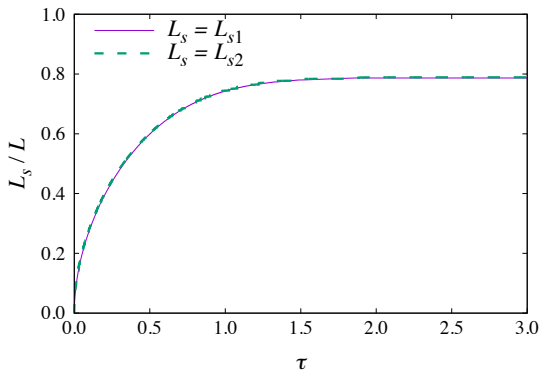
図-6より、両手法ともに、 $n_1$  を大きくとるほど、 $err$  が小さくなることが確認された。また、既往の手法と比較して、本手法では  $err$  の収束が早く、 $err$  の振動も小さいことが確認された。なお、 $err$  の振動の原因については明らかになっていないが、田子らの手法では、凍結界面の存在するセル中心の温度  $T_p$  を  $T_m$  に強制していることが原因で振動が発生していると考えており、検討を行なっている。

次に、非定常過程における凍結界面位置の時間変化を考える。ここでは、凍結界面の温度  $T_m$  が  $0^\circ\text{C}$

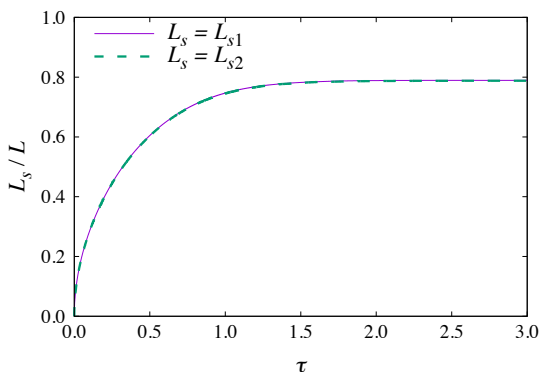
であるという仮定を満たす場合において、得られた温度分布より計算される凍結界面の位置  $L_{s2}$  と固相率  $f_s$  より計算される凍結界面の位置  $L_{s1}$  を比較する。凍結界面の温度  $T_m$  は  $0^\circ\text{C}$  であるので、温度の正負が変化するセルに凍結界面が存在すると考え、以下のように  $L_{s2}$  を計算する。

$$L_{s2} = x_P + \frac{T_m - T_P}{T_E - T_P} \Delta x_1 \quad (17)$$

ここで、 $x_P$  は凍結界面が存在するセルの中心の座標を表している。また、計算セル数  $n_1$  は 152、時間刻み幅  $\Delta t$  は  $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  とし計算した。図-7の横軸は無次元化した時間  $\tau = \alpha_s t / L^2$ 、縦軸は  $L_{s2}/L$  であり、凍結界面が進行していく様子を表している。ここで、 $\alpha_s$  は熱拡散率を表し、氷の物性値を用いて  $\alpha_s = \lambda_s / \rho_s c_{ps}$  と表した。また、図-7を一部拡大したものが図-8である。図-7および図-8より、両手法ともに  $L_{s1}$  と  $L_{s2}$  はほぼ一致しているが、多少の誤差がみられる。誤差の大きさについて、図-8より、田子らの手法と提案手法による計算結果を比べると、提案手法の方が誤差が小さく  $L_{s1}$  と  $L_{s2}$  がより一致していることがわかる。

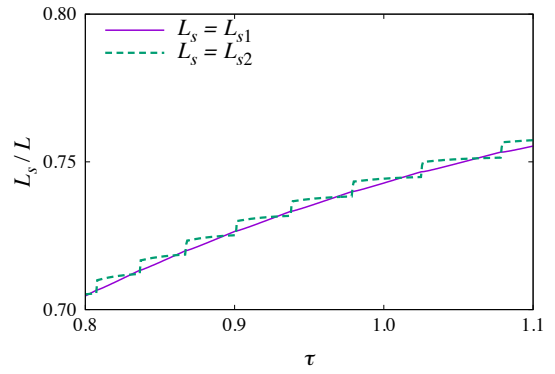


(a) 田子らによる手法

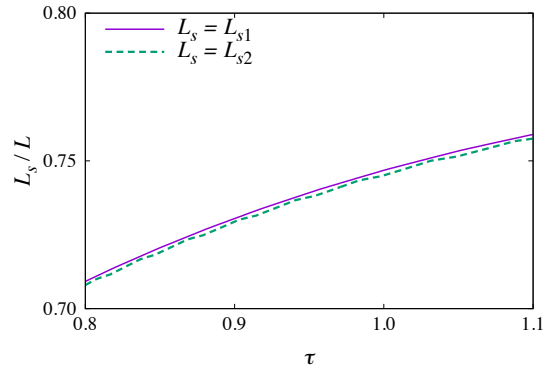


(b) 提案手法

図-7 田子ら<sup>6)</sup>による手法と提案手法のそれぞれの場合における  $L_{s1}$  と  $L_{s2}$  の比較 ( $L_{s1}$  は固相率,  $L_{s2}$  は温度分布より計算される凍結界面の位置)。



(a) 田子らによる手法



(b) 提案手法

図-8 図-7の拡大図

#### 4. 凍結・融解問題の数値解析

##### (1) 側壁からの冷却による矩形領域内の水の凍結

計算領域は図-9に示すような矩形領域とし、一定の温度  $T_L$  に保たれた壁面により、計算領域の左下部より水を冷却する。このような場合において、自然対流を伴う水の凍結計算を行い、田子ら<sup>6)</sup>の数値計算および佐貫ら<sup>9)</sup>の実験との比較を行った。ここで、 $x_1$  方向の長さを 50 mm、 $x_2$  方向の長さを 100 mm、一定温度  $T_L$  に保たれた冷却壁面の高さおよび温度をそれぞれ 20 mm、 $-10^\circ\text{C}$ 、計算領域内の初期水温  $T_0$  を  $4^\circ\text{C}$ 、壁面は冷却部分を除き全て断熱 (adiabatic) とした。また、流速の境界条件は non-slip 壁面条件を用いた。また、水の密度の式は式 (13) を用いた。また、水の粘性係数  $\mu_l$  と温度の関係式は以下の式を用いた<sup>19)</sup>。

$$\mu(T) = \mu_0 + \beta_1 e^{\beta_2 T} \quad (18)$$

ここで、 $\mu_0$ 、 $\beta_1$  および  $\beta_2$  は以下のように与えられる。

$$\mu_0 = 0.002601 \quad [\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$$

$$\beta_1 = 0.001517 \quad [\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$$

$$\beta_2 = -0.034688 \quad [^\circ\text{C}^{-1}]$$

水の密度  $\rho_s$  は  $916.8 \text{ kg}/\text{m}^3$ 、水および氷の熱伝導率



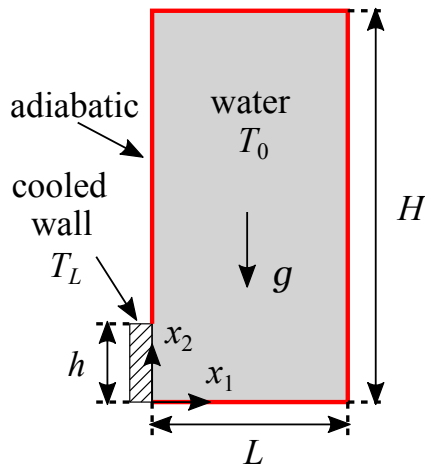


図-9 側壁からの冷却による矩形領域内の水の凍結の計算領域

$\lambda_l$ ,  $\lambda_s$  はそれぞれ,  $0.589 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $2.2 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , 定圧比熱  $c_{pl}$ ,  $c_{ps}$  は  $4.175 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $2.1 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  とした. 計算セル数は  $52 \times 10^2$  とし, 計算時間刻み幅  $\Delta t$  は  $2.0 \times 10^{-2} \text{ s}$  とした. また, 以下の計算では, 流速の推定値の計算や圧力計算における空間方向の繰り返し演算を OpenMP<sup>20)</sup> で並列化して, スレッド並列数は 36 とし, 京都大学のスーパーコンピュータシステム (Cray CS400 2820XT, Intel Xeon Broadwell 2.1GHz 18×2/node) を用いて計算を行った.

図-10 は, 本研究で計算された等温線を表す. 図-10 より, 凍結界面と  $0^\circ\text{C}$  の線が一致していることが確認できる. また, 凍結の進行の様子を図-11 に示す. 図-11 において, 赤破線が佐貫ら<sup>9)</sup> の実験結果, 青破線が田子ら<sup>6)</sup> の計算結果を表している. 佐貫らの実験結果と本計算結果を比べると, 10 分後および 30 分後においてよく一致していることがわかる. また, 60 分後においては, 本計算結果は凍結層の形状は一致しているが, 凍結層厚さは実験結果よりやや厚くなっている. この原因として, 矩形領域内の水の初期温度は  $4^\circ\text{C}$  であるので, 実際には水の融解も生じているはずであるが, 数値計算では凍結のみを考えており, その効果を考慮していないことが考えられる. また, 田子らの計算結果と本計算結果を比べると, 60 分後においては両計算結果にほとんど差がみられないが, 10 分, 30 分後において, 本研究の計算結果の方が実験結果とよく一致していることがわかる.

図-12 に本研究で計算された流速ベクトルを示す. 図-12 より凍結界面付近において, 上向きに大きな流速が生じ, 矩形領域に時計回りの流れが生じていることが確認できる. これは, 凍結界面付近の水が冷却され, 密度最大を与える温度から  $0^\circ\text{C}$  にかけて,

密度が減少していくことが原因である.

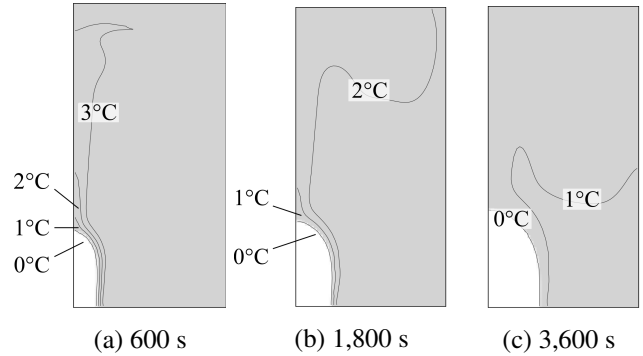


図-10 各時刻における等温線 (灰色部分が水, 白色部分が氷を表す.)

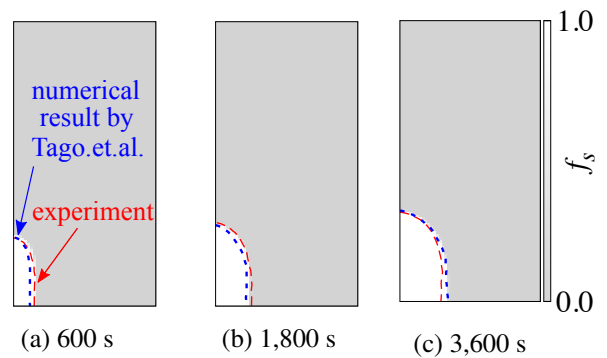


図-11 各時刻における固相率  $f_s$  の分布 (灰色および白色部分が本計算結果, 赤破線は佐貫ら<sup>9)</sup> の実験結果, 青破線が田子ら<sup>6)</sup> の計算結果を表す.)

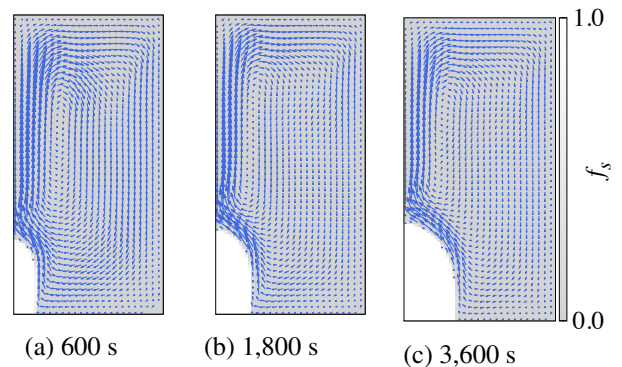


図-12 各時刻における流速ベクトルの分布

## (2) 矩形領域における氷層の融解

Virag ら<sup>10)</sup> の実験結果との比較を行う. 計算領域は図-13 に示すような矩形領域とし,  $x_1$  方向の長さ  $L$  を  $0.187 \text{ m}$ ,  $x_2$  方向の長さ  $H$  を  $0.0935 \text{ m}$  とする. また, 左壁面の温度  $T_H$  は  $8^\circ\text{C}$ , 右壁面の温度  $T_L$  は  $0^\circ\text{C}$ , 上下の壁面を断熱 (adiabatic) とし, 計算領域内の初期水温  $T_{u0}$  は  $0^\circ\text{C}$ , 氷の初期温度  $T_{i0}$  は  $0^\circ\text{C}$  とする. なお, 流速の境界条件は non-slip

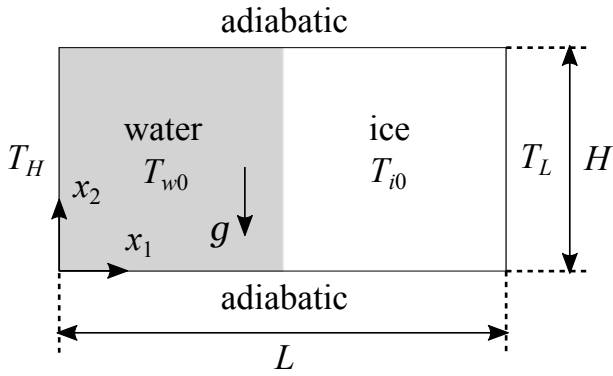


図-13 矩形領域における凍結層の融解の計算領域

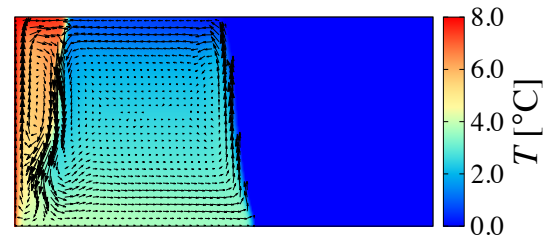
壁面条件を用いた。水の密度は式 (13), 粘性係数は式 (18) を用い設定した。また, 水の密度  $\rho_s$  は  $916.8 \text{ kg/m}^3$ , 水および氷の熱伝導率  $\lambda_l, \lambda_s$  はそれぞれ  $0.576 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $2.2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , 定圧比熱  $c_{pl}, c_{ps}$  はそれぞれ  $4.175 \times 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $2.1 \times 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  とし, レイリー数は  $\text{Ra} = 4.98 \times 10^6$ , プラントル数は  $\text{Pr} = 13.31$  とした。なお, レイリー数は代表長さとして  $H$  をとった。計算セル数は  $300 \times 150$  とし, 計算時間刻み幅  $\Delta t$  は  $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  とした。

各時刻における温度分布および流速ベクトルを図-14 に示す。図-14 より, 密度逆転により二つの循環流れが生じていることがわかる。また, 凍結界面下部が大きく融解している点について, 反時計回りの流れにより左壁面で加熱された液体が凍結界面の下部に衝突し, 融解が促進されたということが推察される。

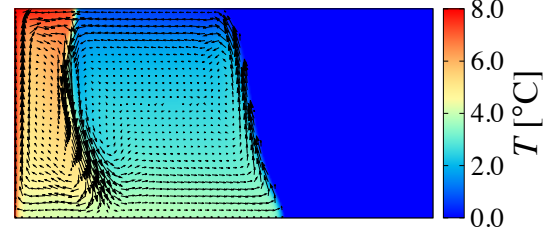
次に, 図-14 に示した各時刻において, 凍結進行の様子を比較したものを図-15 に示す。実線が Viragらの実験結果を表している。図-15 より, 得られた計算結果が実験結果とよく一致していることがわかる。また, 凍結界面の下部が大きく融けたり, 凍結界面の上部が凹状に融けるといった特徴についても一致していることが確認される。

## 5. 結言

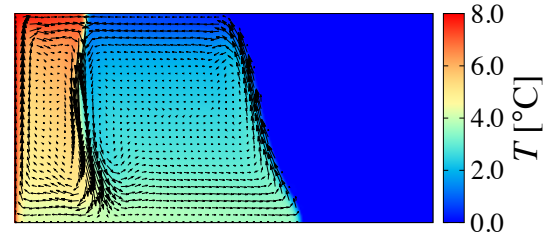
本研究では, 田子ら<sup>6)</sup>の手法をもとに, 温度勾配項の離散化法および固相率の計算手法を提案した。また, 提案手法を用いて数値解析手法の確認および数値実験を行い, 提案手法の妥当性を確認した。このとき, 流体の計算には多相場解法を用い, 凍結界面を含むセルについて, 物性値および流速を固液相について体積平均し計算を行った。数値解析手法の確認および数値実験により得られた結論は以下の通りである。



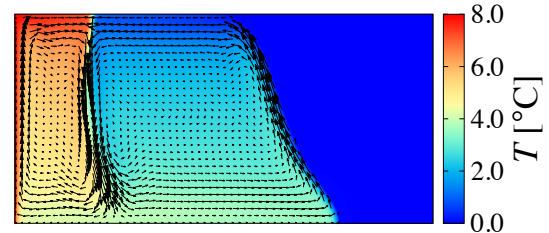
(a) 5,364 s



(b) 10,728 s



(c) 14,298 s



(d) 21,450 s

図-14 各時刻における温度分布および流速ベクトル

1次元凍結問題において, 本研究および田子らの手法ともに, 分割格子数を大きくとるほど, 理論的に求めた解との計算誤差が小さくなっていくことが確認された。また, 提案手法の方が田子らの手法に比べ, 計算誤差の収束が早く, 計算誤差の振動も小さいことが確認された。凍結界面の温度が  $T_m$  であるという仮定の下では, 固相率  $f_s$  および温度分布を用いて計算される凍結界面の位置は一致するはずである。この点について, 提案手法の方が, 田子らの手法に比べて, 計算した凍結界面の位置がよく一致することが確認された。

また, 自然対流を伴う凍結の数値計算において, 本計算結果が, 佐貫ら<sup>9)</sup>の実験結果とよく一致することが確認された。また, 矩形領域内の水が冷却されることにより, 凍結部付近において密度逆転による上向きの流れが生じることが確認された。自然対流を

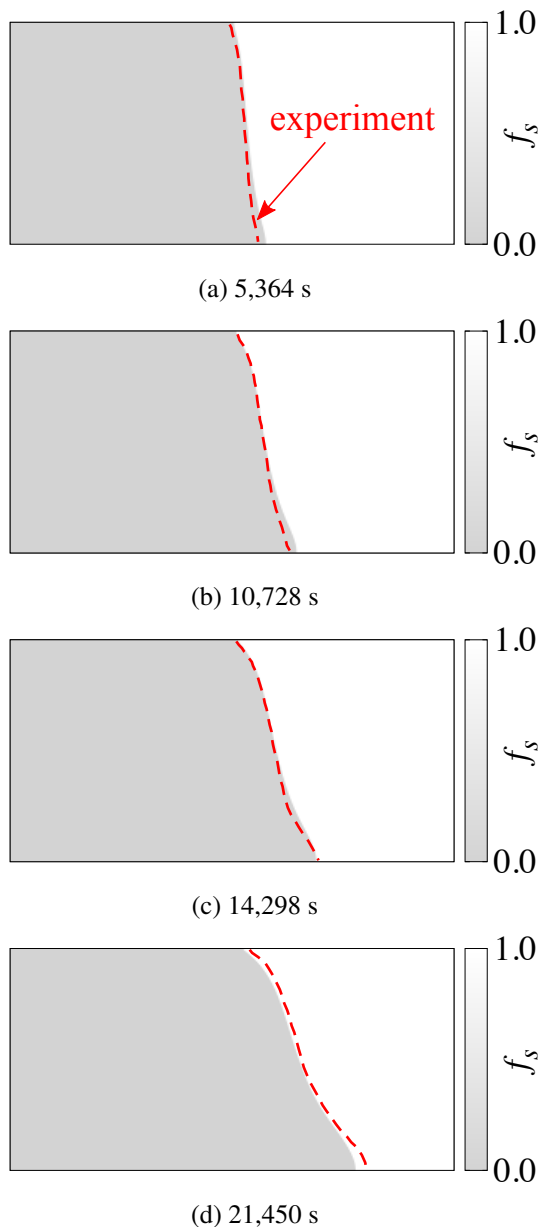


図-15 各時刻における固相率  $f_s$  の分布 (灰色部分が水、白色部分が氷を表す。また、赤破線が Virag ら<sup>10)</sup> の実験結果を表す。)

伴う融解の数値計算において、本計算結果が、Virag ら<sup>10)</sup> の実験結果とよく一致することが確認された。また、矩形領域内の水が加熱されることによる密度逆転により、時計回りおよび反時計回りの二つの循環流れが生じることが確認された。さらに、反時計回りの流れが融解に大きく寄与し、凍結界面において下側の方が上側に比べて大きく融けることが確認された。

**謝辞：**本研究の初期段階において文献調査やプログラム作成等にご協力いただいた九鬼愛夢氏 (元京都大学大学院・工学研究科・社会基盤工学専攻・修士課程学生) に感謝の意を表します。

## REFERENCES

- 1) 稲葉英男, 福田武幸, 関信弘, 福迫尚一郎: 水の密度逆転層を有する傾斜長方形容器内の自然対流熱伝達, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 50, No. 451, pp. 743-751, 1984. [Inaba, H., Fukuda, T., Seki, N. and Fukusako, S.: Natural Convective Heat Transfer in an Inclined Rectangular Cavity with Density Inversion of Water, *TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS Series B.*, Vol. 50, No. 451, pp. 743-751, 1984.]
- 2) 牛島省, 福谷彰, 牧野統師: 3次元自由水面流中の接触を伴う任意形状物体運動に対する数値解法, 土木学会論文集 B, Vol. 64, No. 2, pp. 128-138, 2008. [Ushijima, S., Fukutani, A. and Makino, O.: Prediction Method for Movements with Collisions of Arbitrarily-shaped Objects in 3D Free-surface Flows, *Doboku Gakkai Ronbunshuu B.*, Vol. 64, Nos. 2, pp. 128-138, 2008.]
- 3) 鳥生大祐, 牛島省: 熱伝導性を有する多孔質体中の自然対流現象に対する多相場モデルの適用性, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 69, No. 2, pp. I\_71-I\_78, 2013. [Torii, D. and Ushijima, S.: Applicability of Multiphase Model to Natural Convection Flows in Porous Media with Thermal Conductivity, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))*, Vol. 69, pp. I\_71-I\_78, 2013.]
- 4) 鳥生大祐, 牛島省: 混合体モデルに基づく圧縮性流体と移動する固体の熱連成計算手法, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 73, No. 2, pp. I\_143-I\_152, 2017. [Torii, D. and Ushijima, S.: Computational Method for Thermal Interactions Between Compressible Fluid and Moving Solid Based on Mixture Model, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))*, Vol. 73, No. 2, pp. I\_143-I\_152, 2017.]
- 5) 織田剛, 里深信行, 西田秀利: レベルセット法を用いた相変化を伴う界面の流動と成長の数値解析手法 (熱工学, 内燃機関, 動力など), 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 67, No. 662, pp. 2487-2494, 2001. [Oda, T., Satofuka, N. and Nishida, H.: Numerical Analysis Method of Interface Movement and Growth with Phase Change by Level Set Method, *TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS Series B.*, Vol. 67, No. 662, pp. 2487-2494, 2001.]
- 6) 田子真, 石沢徳秀, 菅原征洋: 凍結問題の簡易的数値計算方法, 日本冷凍空調学会論文集, Vol. 26, No. 4, pp. 439-450, 2009. [Tago, M., Ishizawa, T. and Sugawara, M.: Simple Numerical Calculation Method for Freezing Problem, *Transactions of the Japan Society of Refrigerating and Air Conditioning Engineers.*, Vol. 26, No. 4, pp. 439-450, 2009.]
- 7) Bourdillon, A., Verdin, P. and Thompson, C.: Numerical simulations of water freezing processes in cavities and cylindrical enclosures, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 75, pp. 839-855, 2015.
- 8) Zubkov, P. T., Kravchenko, V. and Sviridov, E.: Simulation of the process of water freezing in a round pipe, *High Temperature*, Vol. 39, No. 5, pp. 722-728, 2001.
- 9) 佐貫康治, 萬田哲也, 佐々木章ほか: 局部冷却面を有するく容器内の水の凍結, 秋田工業高等専門学校研究紀要, Vol. 31, pp. 26-31, 1996. [Sanuki, K. Manda, T. and Sasaki, A.: Freezing Behavior in a Rectangular Cavity with Partially Cooled Wall, *Research reports of Akita National*



- College of Technology., Vol. 31, pp. 26-31, 1996.]
- 10) Virag, Z., Živić, M. and Galović, A. : Influence of natural convection on the melting of ice block surrounded by water on all sides, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 49, No. 21-22, pp. 4106–4115, 2006.
  - 11) Ho, C., Ho, M. and Yeh, C. : Numerical study of oscillatory convection during melting of ice in a rectangular enclosure, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 40, No. 5, pp. 511–530, 2001.
  - 12) Sugawara, M., Komatsu, Y. and Beer, H. : Melting and freezing around a horizontal cylinder placed in a square cavity, *Heat and mass transfer*, Vol. 45, No. 1, pp. 83–92, 2008.
  - 13) Rattanadecho, P. : Experimental and numerical study of solidification process in unsaturated granular packed bed, *Journal of thermophysics and heat transfer*, Vol. 18, No. 1, pp. 87–93, 2004.
  - 14) 牛島省, 瀬津家久, 吉田圭介, 池田大輔 : 自由水面流れの数値計算における内部流動の解析精度に関する考察, *水工学論文集*, Vol. 46, pp. 409–414, 2002. [Ushijima, S., Nezu, I., Yoshida, K. and Ikeda, D.: Numerical Accuracy for Internal Flows in Computations of Free-surface Flows, *PROCEEDINGS OF HYDRAULIC ENGINEERING.*, Vol. 46, pp. 409-414, 2002.]
  - 15) Yamamoto, S. and Daiguji, H. : Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, Vol. 22, No. 2-3, pp. 259–270, 1993.
  - 16) Van der Vorst, H. A. : Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, Vol. 13, No. 2, pp. 631–644, 1992.
  - 17) Kazuki, N. Daisuke, T. and Satoru, U. : Numerical prediction of water-ice phase-change with natural convection including density inversion region, *Proceedings of The 41st JSST Annual International Conference on Simulation Technology Student Session*, pp. 17–20, 2022.
  - 18) 藤井哲, 片山功蔵, 齋藤彬夫, 服部賢, 戸田三郎 : 伝熱工学の進展 3, pp. 65–66, 1974. [Fujii, T. Katayama, K. Saito, S. Httori, K. and Toda, S: *Dennetsukougaku No Shinten 3*, Vol. 76, No. 2, pp. 65-66, Yokendo, 1974]
  - 19) Ye, W.-M., Wan, M., Chen, B., Chen, Y., Cui, Y. and Wang, J. : Temperature effects on the swelling pressure and saturated hydraulic conductivity of the compacted GMZ01 bentonite, *Environmental earth sciences*, Vol. 68, No. 1, pp. 281–288, 2013.
  - 20) Chapman, B., Jost, G. and Van Der Pas, R.: *Using OpenMP: portable shared memory parallel programming*, MIT press, 2007.

(Received June 24, 2022)  
(Accepted November 30, 2022)

## MULTIPHASE COMPUTATION METHOD FOR FREEZING AND MELTING OF WATER WITH NATURAL CONVECTION INCLUDING DENSITY INVERSION REGION

Kazuki NISHIMOTO, Ryota MOTONISHI, Daisuke TORIU and Satoru USHIJIMA

A multiphase computation method based on the phase-averaging method was applied to water-ice phase-change problems accompanied by the natural convections including density inversion regions in water. The computation method for the Stefan condition was improved in this study to calculate the freezing thickness considering the position of the water-ice interface in the computational cells. After the basic verification of the proposed method using the one-dimensional freezing problem, the experimental results of the unsteady freezing problems and those of the unsteady melting problems in rectangular cavities were calculated with the present method. As a result, it was shown that the changes in the calculated water-ice interfaces are in good agreement with the experimental results and that the natural convections with density inversion are reasonably calculated.