

# 密度流の数値解析における圧力計算の前処理法

本西 亮太<sup>1</sup>・牛島 省<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生員 京都大学大学院 工学研究科 修士課程 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)

E-mail: motonishi.ryota.65z@st.kyoto-u.ac.jp (Corresponding Author)

<sup>2</sup>正会員 工博 京都大学 学術情報メディアセンター (〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: ushijima.satoru.3c@kyoto-u.ac.jp

非圧縮性の密度流の数値計算を行う場合、圧力ポアソン方程式に効果的な前処理を利用することは、計算時間を短縮する上で重要である。また、非圧縮性流体の圧力計算手法である C-HSMAC 法では、圧力ポアソン方程式の求解を繰り返し行うことで、妥当な計算結果を得る上で重要な非圧縮条件を高精度に満足するように制御できる。本論文では、C-HSMAC 法における圧力ポアソン方程式の求解に前処理付き Bi-CGSTAB 法を用い、その効果について考察した。その結果、前処理により計算時間が短縮されることが確認できた。特に、Multigrid 法を前処理として用いた場合に、C-HSMAC 法の反復回数が他の解法と比べて大幅に少なくなるケースが存在しており、この現象も計算時間の短縮につながっていると考えられる。

**Key Words:** *incompressible fluid computation, preconditioning method, pressure Poisson equation, density current, Boussinesq approximation, Bi-CGSTAB method, multigrid method*

## 1. 緒言

流体の複雑な流れを詳細に解明する上で数値解析的手法が果たす役割は大きく、特に実現象を想定した大規模な計算を行うためには計算の高速化に関する検討が欠かせない。流体の数値解析手法については様々なものが提案されているが、MAC 系<sup>[1,2]</sup> や SIMPLE 系<sup>[3]</sup> の解法に代表される非圧縮性流体を対象とした圧力分離型解法では、各時間ステップで圧力を計算する際に圧力ポアソン方程式を解く必要があり、多くの場合この圧力計算段階が全体の計算時間の大部分を占める。したがって、圧力ポアソン方程式を分散化して得られる連立一次方程式を高速に解くことが計算時間を短縮する上で重要となる。

連立一次方程式の解法には様々なものがあり、例えば Bi-CGSTAB 法<sup>[4]</sup> などのクリロフ部分空間法に対しては ILU 分解などのような前処理を用いると計算時間を短縮できる場合がある。また、Multigrid 法を前処理に利用する方法<sup>[5,6]</sup> も盛んに利用されている。Multigrid 法は反復回数が格子解像度に依存しないため、格子点数が大きい問題に対して特に有用であると考えられている<sup>[7,8]</sup>。例えば建部ら<sup>[9]</sup> は、係数行列の値が空間的に変化するポアソン方程式の数値実験を通して、格子点数によらずに Multigrid 法による前処理が有効であることを確認している。

非圧縮性流体の計算において、非圧縮条件を高精

度に満足することは妥当な計算結果を得る上で重要であり、そのための手法として、C-HSMAC 法<sup>[10]</sup> が提案されている。例えば既報<sup>[11]</sup> では、上辺が振動するキャビティ流れに C-HSMAC 法を適用することで、通常の SMAC 法で発生する可能性があるパンプスカラーのオーバーシュートを防止されることが確認されている。C-HSMAC 法は、各時間ステップにつき、非圧縮条件を満たすまで連立一次方程式の求解を含む圧力計算と速度修正を反復する解法である。

本研究では、C-HSMAC 法における圧力ポアソン方程式の求解に前処理付き Bi-CGSTAB 法を用い、計算時間や C-HSMAC 法の反復回数の観点から、Multigrid 法、SOR 法、ILU 分解による前処理の効果を検討する。具体的には、まず作成した前処理付き Bi-CGSTAB 法のプログラムの動作確認のために、ポアソン方程式の右辺を 0 として単純化したラプラス方程式を対象として逐次計算を行う。次に等密度のキャビティ流れについて、前処理付き Bi-CGSTAB 法を適用した C-HSMAC 法を用いて逐次計算を行い、計算時間や C-HSMAC 法の反復回数について検討する。最後に、密度流における代表的な問題である lock-exchange 問題<sup>[12]</sup> および dam-break 問題<sup>[13]</sup> についても並列化した前処理付き Bi-CGSTAB 法を適用し、計算時間や C-HSMAC 法の反復回数について検討を行う。同時に、流体の密度比、ブシネスク近似の有無、計算領域の形状の違いによる影響についても考察する。

## 2. 数値解析手法

### (1) 流体の基礎方程式

本研究では、混合する2種類の非圧縮性ニュートン流体(以下, 流体 A, B) から構成される多相場に対し, 以下の非圧縮条件, 運動方程式, 流体 A の移流拡散方程式を用いて計算を行う。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = f_{vi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(C u_j)}{\partial x_j} = \alpha_C \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2} \quad (3)$$

ここで,  $x_i$  は直交座標系の座標成分,  $t$  は時刻,  $u_i$  は流速の  $x_i$  方向成分,  $f_{vi}$  は外力の  $x_i$  方向成分,  $\rho$  は密度,  $p$  は圧力である。また,  $\sigma_{ij}$  は粘性応力であり, 粘性係数  $\mu$  を用いて以下の式で表される。

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

さらに,  $C$  は流体 A の体積割合 ( $0 \leq C \leq 1$ ),  $\alpha_C$  は相間の拡散係数であり,  $\rho$  および  $\mu$  は  $C$  と各相の密度  $\rho_A, \rho_B$  および各相の粘性係数  $\mu_A, \mu_B$  を用いてそれぞれ以下のように与えられるとする。

$$\rho = C\rho_A + (1 - C)\rho_B \quad (5)$$

$$\mu = C\mu_A + (1 - C)\mu_B \quad (6)$$

密度流の計算を簡略化する方法の1つに慣性項に含まれる密度  $\rho$  を定数  $\rho_0$  とするブシネスク近似があり, 式(1)は次式で表される<sup>[2]</sup>。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\rho}{\rho_0} f_{vi} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (7)$$

ブシネスク近似は, 密度の変化が小さい場合にのみ利用可能であり, 密度変化が大きい場合には正確な結果が得られないことがある<sup>[3]</sup>。次節で述べるように, ブシネスク近似の有無によって圧力計算段階で解く圧力ポアソン方程式が異なる。本研究ではこの差異が Bi-CGSTAB 法の前処理に与える影響を確認するため, ブシネスク近似を用いた場合についても密度流の計算を行う。

### (2) 流体計算手法の概要

本研究では基礎方程式をコロケート格子<sup>[4]</sup>上で有限体積法に基づいて離散化する。ブシネスク近似を用いない場合, C-HSMAC 法の計算手順の概要は以下の通りとなる<sup>[5]</sup>。なお, 物理量の右上添字は時間ステップを表し, 移流項の計算には全て5次精度の TVD スキーム<sup>[5]</sup>を使用した。

#### [1] 予測段階

式(2)を時間方向に以下のように離散化し, 流速の予測値  $u_i^*$  を計算する。

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial(u_i^n u_j^n)}{\partial x_j} = f_{vi} - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} \quad (8)$$

#### [2] 圧力計算段階

$n+1$  ステップの流速  $u_i^{n+1}$  と圧力  $p^{n+1}$  が, 以下の式を満足すると仮定する。

$$\frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial(u_i^n u_j^n)}{\partial x_j} \\ = f_{vi} - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (10)$$

式(8)および式(10)より下式が導出される。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^{n+1} - p^n}{\partial x_i} \quad (11)$$

ここで,  $\phi = p^{n+1} - p^n$  とすると, (11)より  $u_i^{n+1}$  は以下のように表される。

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (12)$$

式(12)を式(9)に代入すると, 以下の圧力ポアソン方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (13)$$

本研究では上記のポアソン方程式を前処理付き Bi-CGSTAB 法を用いて解く。C-HSMAC 法では非圧縮条件である式(9)を十分に満足するために, 時間ステップ当たり複数回圧力ポアソン方程式を解く。具体的には, 流速発散のしきい値  $\varepsilon_D$  を満たすまで下記のような反復計算を行う。なお, 右上添字  $n$  は時間ステップを,  $k$  は C-HSMAC 法の反復回数を表す。反復計算の初期値 ( $k=0$ ) は,  $u_i^k = u_i^*$ ,  $p^k = p^n$  である。

do  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j} \quad (14)$$

を  $\phi$  について解く (初期解  $\phi = 0$ )

$$p^{k+1} = p^k + \phi \quad (15)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{\Delta t}{\rho^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (16)$$

exit if 全ての計算セルで  $\left| \frac{\partial u_j^{k+1}}{\partial x_j} \right| < \varepsilon_D$

enddo

式 (14) における圧力ポアソン方程式の求解では、初期値  $\varepsilon_0$  およびパラメータ  $\alpha_P (< 1)$  を用いて残差二乗和のしきい値  $\varepsilon$  を下式のように設定し、C-HSMAC 法の反復が進むたびにしきい値が小さくなるようにする (16)。

$$\varepsilon = (\alpha_P)^k \varepsilon_0 \quad (17)$$

### [3] 修正段階

圧力計算段階での最終的な圧力  $p^k$  が  $n+1$  ステップの圧力  $p^{n+1}$  となる。さらに、式 (10) から  $n+1$  ステップの流速  $u_i^{n+1}$  を求める。

最後に、式 (8) から  $n+1$  ステップの  $C$  の値  $C^{n+1}$  を陽的に計算する。

$$C^{n+1} = C^n + \Delta t \left\{ -\frac{\partial(C^n u_j^{n+1})}{\partial x_j} + \alpha_C \frac{\partial^2 C^n}{\partial x_j^2} \right\} \quad (18)$$

以上が本研究で用いるブシネスク近似を用いない場合の流体計算手順の概要である。なお、ブシネスク近似を用いる場合、運動方程式は式 (4) となり、圧力計算段階で解くべき圧力ポアソン方程式は以下のように導出される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{\rho_0}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (19)$$

式 (19) において  $\rho_0$ ,  $\Delta t$  は定数なので、式 (13) とは異なり、離散化した場合の係数行列が時間・空間によらず一定となる。

### (3) 前処理付き Bi-CGSTAB 法

本研究では連立一次方程式  $Ax = b$  を前処理付き Bi-CGSTAB 法 (15) を用いて解く。具体的には、不完全 LU 分解、SOR 法、Multigrid 法 (16) を用いて右前処理を施す。Multigrid 法では V サイクル Multigrid 法を用い、制限補間・延長補間については、以下の方法により行う。まず、細かい格子点の残差ベクトル  $r^{m+1}$  を粗い格子点での右辺ベクトル  $b^m$  に変換する制限補間は、下式により求める。右上添字は格子点の細かさを表しており、また、右下添字は  $x_1$  軸,  $x_2$  軸方向の格子点番号を表し、細かい格子での格子点番号を  $i, j$ , それに対応する粗い格子での格子点番号を  $k, l$  としている。

$$b_{k,l}^m = \frac{r_{i,j}^{m+1}}{4} + \frac{r_{i-1,j}^{m+1} + r_{i+1,j}^{m+1} + r_{i,j-1}^{m+1} + r_{i,j+1}^{m+1}}{8} + \frac{r_{i-1,j-1}^{m+1} + r_{i+1,j-1}^{m+1} + r_{i-1,j+1}^{m+1} + r_{i+1,j+1}^{m+1}}{16} \quad (20)$$

そして、粗い格子点の近似解  $x^m$  を細かい格子点での近似解  $x^{m+1}$  に変換する延長補間は次のように行う。まず、図-1 において、粗い格子と細かい格子が重なっている格子点 A では、下式のように、値を

そのまま利用する。

$$\tilde{x}_{i,j}^{m+1} = x_{k,l}^m \quad (21)$$

続いて、格子点 B では、残差  $r^{m+1}$  と、隣接する格子点 A の加重平均から求める。

$$\tilde{x}_{i,j}^{m+1} = 2r_{i,j}^{m+1} - \text{ave}_{i,j}^B(\tilde{x}_{i-1,j-1}^{m+1}, \tilde{x}_{i+1,j-1}^{m+1}, \tilde{x}_{i-1,j+1}^{m+1}, \tilde{x}_{i+1,j+1}^{m+1}) \quad (22)$$

最後に、格子点 C では、残差  $r^{m+1}$  と、上下左右の格子点 A または格子点 B の加重平均から求める。

$$\tilde{x}_{i,j}^{m+1} = r_{i,j}^{m+1} - \text{ave}_{i,j}^C(\tilde{x}_{i-1,j}^{m+1}, \tilde{x}_{i+1,j}^{m+1}, \tilde{x}_{i,j-1}^{m+1}, \tilde{x}_{i,j+1}^{m+1}) \quad (23)$$

加重平均  $\text{ave}_{i,j}^B$ ,  $\text{ave}_{i,j}^C$  の重みは、係数行列の値から決定する。

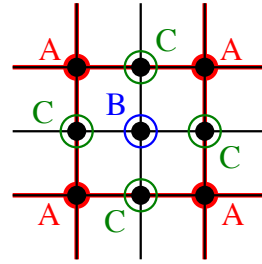


図-1 マルチグリッドの延長補間の説明図 (黒線が細かい格子, 赤線が粗い格子)

## 3. 計算手法の検証と比較

### (1) ラプラス方程式の求解

領域  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  における以下の 2 次元ラプラス方程式の数値解を前処理付き Bi-CGSTAB 法により求める。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (24)$$

境界条件は以下の通りである。

$$\phi = 0 \quad (\text{at } x_1 = 0, x_1 = 1) \quad (25)$$

$$\phi = \sin(\pi x_1) \cosh(\pi) \quad (\text{at } x_2 = 0) \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{at } x_2 = 1) \quad (27)$$

2 次精度の中央差分を用いてラプラス方程式を離散化した。内部格子数は  $1025 \times 1025$  とし、収束条件は残差二乗和が  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-10}$  を下回るときとした。

各解法の条件は、以下の通りである。

- 計算は逐次的に実行した。
- 境界内部の初期解は  $\phi = 0$  とした。
- 係数行列の対角成分が全て 1 となるよう、係数行列 A および右辺ベクトル  $b$  をスケーリング処

理している。

- ILU 分解による前処理では、fill-in を全て無視する ILU(0) を用いた。
- SOR 法による前処理については、加速パラメータ  $\omega$  を 1.9 とし、反復回数は 10 回とした。
- Multigrid 法は 9 段とし、反復回数は 1 回とした。スムーザとして SOR 法を用い、加速パラメータ  $\omega$  は 1.9、反復回数は 10 回とした。

なお、以下では、数値計算に京都大学のスーパーコンピュータシステム (Cray CS400 2820XT, Intel Xeon Broadwell 2.1GHz 18 × 2 cores / node) を利用した。コンパイラは GFortran を用い、コンパイルオプションは -Wall, -fall-intrinsics, -fimplicit-none, -fbounds-check を用いた。OpenMP により並列化しているプログラムでは、さらに -fopenmp を利用した。

いずれの前処理を用いた場合でも、理論解  $\phi = \sin(\pi x_1) \cosh\{\pi(1-x_2)\}$  と良く一致していた。解の収束までに要した計算時間を表-1 に、残差収束の様子を図-2 に示す。いずれの前処理を用いた場合についても、前処理を用いない場合と比較して計算時間と反復回数が減少し、既往の報告<sup>[8]</sup>と一致する結果が確認された。

表-1 ラプラス方程式の計算時間

前処理	計算時間 [s]	反復回数
なし	206.14	1592
ILU	154.89	572
SOR	124.86	88
Multigrid	19.91	5

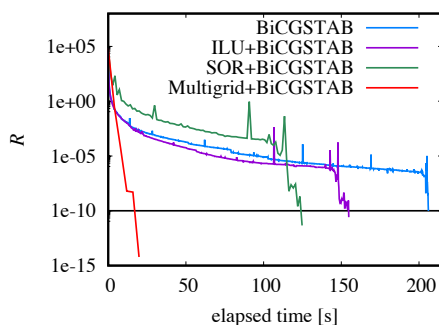


図-2 ラプラス方程式の残差二乗和  $R$  の変化 (格子数:  $1025 \times 1025$ , 黒線はしきい値  $1.0 \times 10^{-10}$ )

## (2) キャビティ流れの計算

密度が定数である非圧縮性粘性流体について、上部の壁が動く 2 次元キャビティ流れの計算を行う。計算結果を Ghia ら<sup>[9]</sup> の計算結果と比較した上で、計算時間を各手法間で比較する。流体計算手法は、2 章で

示したものをを用いる。図-3 は計算領域を示しており、 $\rho = 1$ ,  $d = 1$ ,  $u_{\text{top}} = 1$  とし、 $\text{Re} = u_{\text{top}}d/\nu = 100$ , 400 の 2 種類について計算する。流速の境界条件は、上部の壁面では  $\mathbf{u} = (u_{\text{top}}, 0)$ , その他の壁面では  $\mathbf{u} = (0, 0)$ , 圧力の境界条件は、上下壁面で  $\partial p/\partial x_2 = 0$ , 左右壁面で  $\partial p/\partial x_1 = 0$  とした。計算セル数は  $67 \times 67$  とし、時間刻み幅は  $\Delta t = 2.0 \times 10^{-3}$  とした。Bi-CGSTAB 法に適用する前処理は、1 節と同様の解法を適用した。なお、Multigrid 法は 4 段とした。また、C-HSMAC 法の条件として、流速発散のしきい値  $\varepsilon_D = 1.0 \times 10^{-10}$ , 圧力ポアソン方程式の初期残差ベクトルの内積に対するしきい値  $\varepsilon_0 = 1.0 \times 10^{-10}$ , 圧力ポアソン方程式のしきい値を減少させるパラメータ  $\alpha_P = 1.0 \times 10^{-1}$  とした。

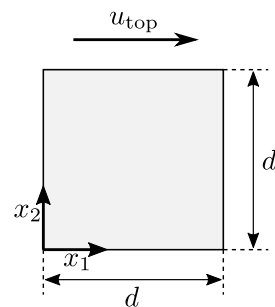


図-3 キャビティ流れの計算条件

計算された定常時の流速分布を図-4, 図-5 に示す。これらの図より、連立方程式の解法の違いによる結果の差異がないことを確認した。

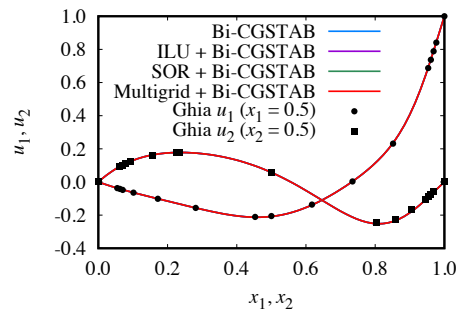


図-4 キャビティ流れの定常時の流速分布 ( $\text{Re} = 100$ )

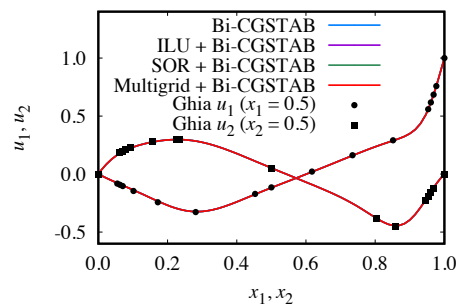


図-5 キャビティ流れの定常時の流速分布 ( $\text{Re} = 400$ )



時間ステップが 5000 となる ( $t = 10$ ) までに圧力ポアソン方程式の計算に要した時間 (圧力計算時間) を表-2 に示す. ラプラス方程式の計算と同様に前処理を用いることで圧力計算時間を短縮できることが確認でき, Multigrid 法, SOR 法, ILU 分解の順に高速となった. レイノルズ数の違いによる圧力計算時間の大きな変化は見られなかった. また, 流体計算の各時間ステップにおける圧力ポアソン方程式の計算時間  $\tau$  を図-6, 図-7 に示す. なお, 図を見やすくするために, 5 ステップごとにプロットしている. 各時間ステップに着目した場合でも, Multigrid 法, SOR 法, ILU 分解の順に高速に計算できる傾向に大きな変化はなかった.

表-2 キャビティ流れの圧力計算時間

前処理	Re = 100	Re = 400
	圧力計算時間 [s]	
なし	648.48	702.77
ILU	416.66	452.82
SOR	374.88	443.34
Multigrid	214.90	259.93

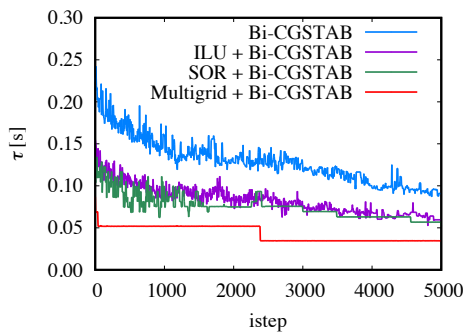


図-6 キャビティ流れにおける各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (Re = 100)

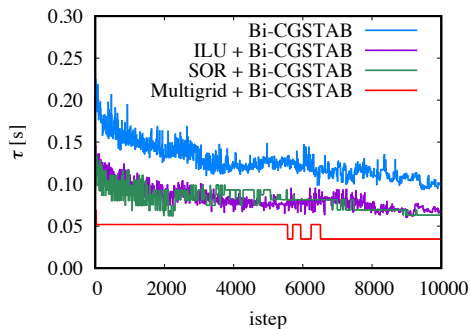


図-7 キャビティ流れにおける各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (Re = 400)

各時間ステップにおける C-HSMAC 法の反復回数を図-8, 図-9 に示す. なお,  $Re = 100$  は 200 ステップごと,  $Re = 400$  は 400 ステップごとにプロットしている. これらの図より, いずれのレイノルズ数においても, 前処理なしの場合および ILU 分解, SOR 法を前処理に用いた場合の反復回数はおよそ 12 回前後であるのに対し, Multigrid 法を用いた場合には 4 回前後となっており, 他の解法と比較して C-HSMAC 法の反復回数が 1/3 程度となっていることが読み取れる. これは, Multigrid 法を前処理に用いた場合には 1 回の Bi-CGSTAB 法の反復での残差減少量が大きくなるため, 圧力ポアソン方程式の残差の収束条件  $\varepsilon$  を大幅に下回った状態で Bi-CGSTAB 法が終了し, 非圧縮条件を満たしやすくなるためであると考えられる.

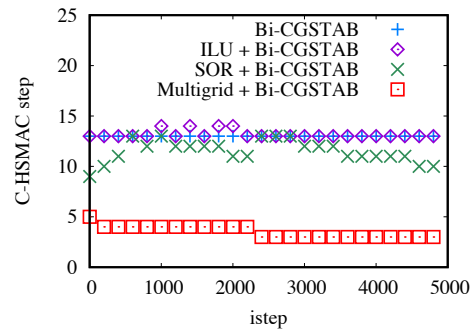


図-8 キャビティ流れにおける各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (Re = 100)

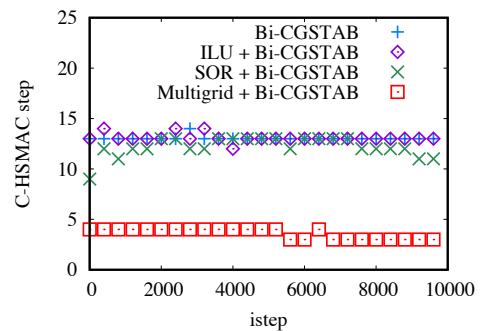


図-9 キャビティ流れにおける各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (Re = 400)

### (3) lock-exchange 問題の計算

重力が存在する中で容器に入れた仕切り板の左右を密度の違う 2 流体で満たし素早く仕切り板を取り除く, いわゆる lock-exchange 問題<sup>[10]</sup>の流体計算を行う. 計算結果を Gröbelbauer ら<sup>[10]</sup>の実験結果と比較した上で, 計算時間を各手法間で比較する.

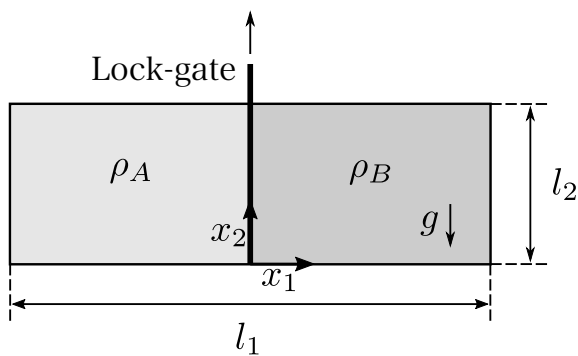
計算は 2 次元で行う。条件は、[図-10](#)において  $l_1 = 6$  [m],  $l_2 = 0.3$  [m], 重力  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] とした。

流体については、Gröbelbauer ら<sup>[20]</sup>の実験のうち、  
 [Case-1] CO<sub>2</sub> ( $\rho_A = 1.791$  [kg/m<sup>3</sup>])<sup>[21]</sup>,  
 Argon ( $\rho_B = 1.614$  [kg/m<sup>3</sup>])<sup>[21]</sup>  
 (密度比  $r = 1.11$ )

[Case-2] R22 ( $\rho_A = 3.511$  [kg/m<sup>3</sup>])<sup>[22]</sup>,  
 Helium ( $\rho_B = 0.163$  [kg/m<sup>3</sup>])<sup>[22]</sup>  
 (密度比  $r = 21.6$ )

の 2 種類の組み合わせについて計算する。相互拡散係数は Case-1 で  $\alpha_C = 1.30 \times 10^{-5}$  [m<sup>2</sup>/s]<sup>[23]</sup>, Case-2 で  $\alpha_C = 3.00 \times 10^{-5}$  [m<sup>2</sup>/s]<sup>[23]</sup> とする。粘性係数は、CO<sub>2</sub> が  $\mu = 1.491 \times 10^{-5}$  [Pa·s], Argon が  $\mu = 2.271 \times 10^{-5}$  [Pa·s], R22 が  $\mu = 1.278 \times 10^{-5}$  [Pa·s], Helium が  $\mu = 1.993 \times 10^{-5}$  [Pa·s] とする<sup>[24]</sup>。壁面における境界条件は、流速についてはノンスリップ条件 ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), 圧力の境界条件は、上下壁面で  $\partial p / \partial x_2 = -\rho g$ , 左右壁面で  $\partial p / \partial x_1 = 0$  とする。計算セル数は  $657 \times 33$  とし、時間刻み幅は、Case-1 で  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$  [s], Case-2 で  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$  [s] とする。

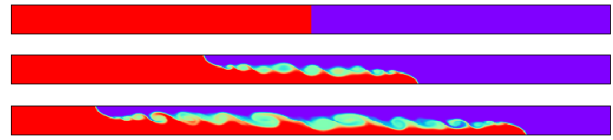
Bi-CGSTAB 法に適用する前処理は SOR 法および Multigrid 法とし、[\(2\)](#) 節と同様の条件とする。なお、本節では OpenMP によるスレッド数 18 の並列計算を行うが、本研究で用いた ILU 分解のアルゴリズムにおいては、前進代入、後退代入の部分に並列性がないため、今回の計算では ILU 分解による前処理を採用しなかった。C-HSMAC 法の条件については [\(2\)](#) 節と同様とした。



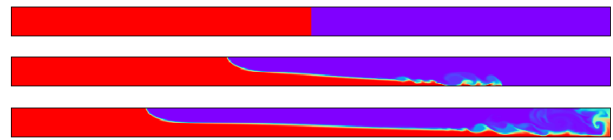
[図-10](#) lock-exchange 問題

密度比 21.6 の場合に計算された流れの様子を [図-11](#), [図-12](#) に示す。いずれのパターンでも、仕切り板が取り除かれた後、左側の高密度流体が右下に流れ、右側の低密度流体が左上に流れる様子が確認できる。高密度流体の右下先端部分の位置を、フロント位置と呼ぶこととする。本研究では、 $x_2 = 0$  上で

$C = 0.5$  となる位置をフロント位置とした。 $r = 21.6$  の場合、ブシネスク近似を用いた計算結果よりも、ブシネスク近似を用いない計算結果の方が、フロント位置が大きくなっていることが確認できる。これはブシネスク近似で外力項以外の密度を定数と置いたためであり、既往の研究<sup>[3]</sup>と同様の傾向である。

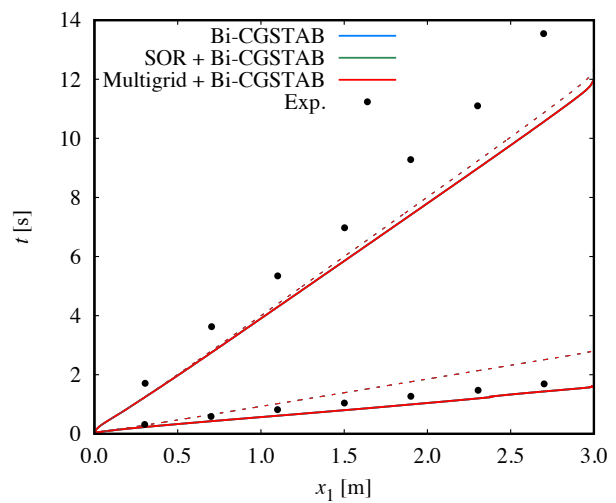


[図-11](#) lock-exchange 問題の流れの様子 ( $r = 21.6$ , ブシネスク近似あり,  $t = 0$  [s] から 1 [s] 間隔)



[図-12](#) lock-exchange 問題の流れの様子 ( $r = 21.6$ , ブシネスク近似なし,  $t = 0$  [s] から 1 [s] 間隔)

計算された流体 A のフロント位置の変化を [図-13](#) に示す。図から、連立一次方程式の解法により、計算結果の差異が見られないことが確認できる。一方で、前述の通り、 $r = 1.11$  ではブシネスク近似を使う場合と使わない場合で計算結果が変わっていないことに対し、 $r = 21.6$  ではブシネスク近似を使うとフロント位置が小さく計算されている。



[図-13](#) フロント位置の時間変化 (実線: ブシネスク近似なし, 点線: ブシネスク近似あり, Exp. は Gröbelbauer らの実験結果)

仕切り板を取り除いてから 1000 時間ステップまでの圧力計算時間を表-3, 表-4 に示す. また, 流体計算の各時間ステップにおいて圧力計算にかかった時間  $\tau$  を 5 ステップごとにプロットしたグラフを図-14, 図-15, 図-16, 図-17 に示す. いずれの前処理でも圧力計算時間が短縮されており, Multigrid 法が最も高速であった. 各時間ステップにおいても, その傾向は変わらなかった. また, 密度比やブシネスク近似の有無は前処理の効果に大きな影響を与えないことが確認できる.

なお, ブシネスク近似を利用すると圧力計算時間を短縮できるが, 前述の通り, 密度比が大きい場合には妥当な解を得ることができない.

表-3 lock-exchange 問題の圧力計算時間 (密度比  $r = 1.11$ )

前処理	ブシネスク近似	
	あり	なし
なし	893.64	1448.23
SOR	321.59	746.09
Multigrid	250.62	512.29

表-4 lock-exchange 問題の圧力計算時間 (密度比  $r = 21.6$ )

前処理	ブシネスク近似	
	あり	なし
なし	676.15	1500.59
SOR	254.00	737.92
Multigrid	216.52	403.27

各時間ステップにおける C-HSMAC 法の反復回数を図-18, 図-19, 図-20, 図-21 に示す. なお, 図を見やすくするために, 密度比  $r = 1.11$  においては 50 ステップごと, 密度比  $r = 21.6$  においては 200 ステップごとにプロットしている. これらの図より, Multigrid 法における C-HSMAC 法の反復回数が若干少なく, またばらつきがあるが, キャビティ流れとは異なり, いずれの前処理法でも大きな差は見られなかった. キャビティ流れと lock-exchange 問題では密度比や計算領域などが異なるため, それらが原因である可能性が考えられる.

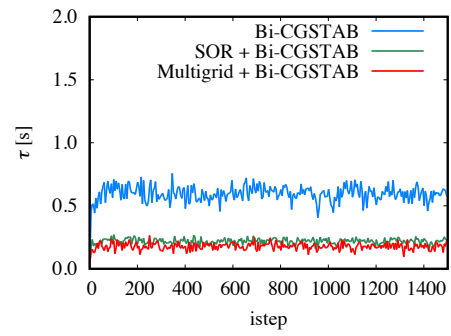


図-14 lock-exchange 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比  $r = 1.11$ , ブシネスク近似あり)

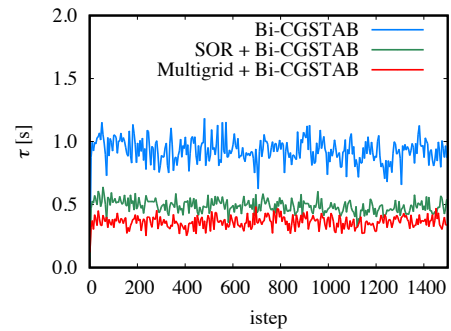


図-15 lock-exchange 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比  $r = 1.11$ , ブシネスク近似なし)

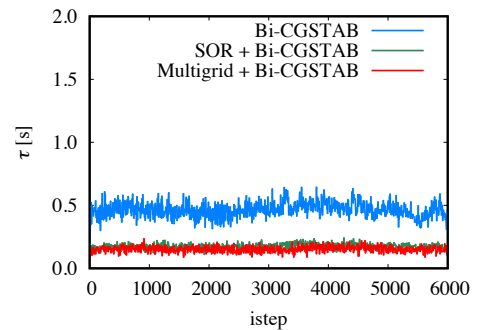


図-16 lock-exchange 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比  $r = 21.6$ , ブシネスク近似あり)

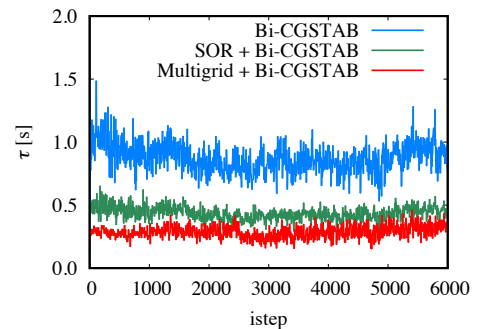


図-17 lock-exchange 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比  $r = 21.6$ , ブシネスク近似なし)

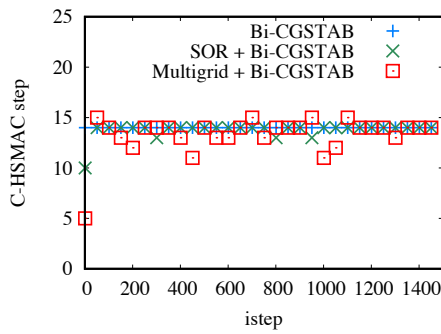


図-18 lock-exchange 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比  $r = 1.11$ , ブシネスク近似あり)

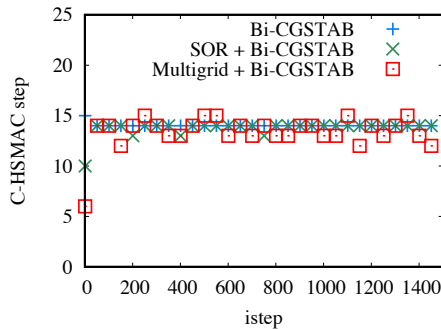


図-19 lock-exchange 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比  $r = 1.11$ , ブシネスク近似なし)

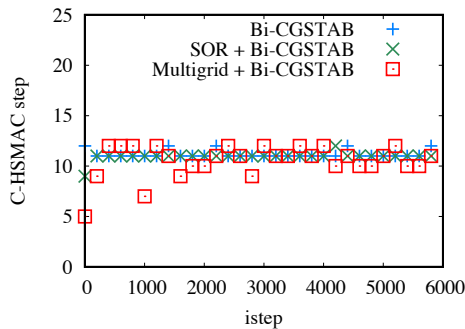


図-20 lock-exchange 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比  $r = 21.6$ , ブシネスク近似あり)

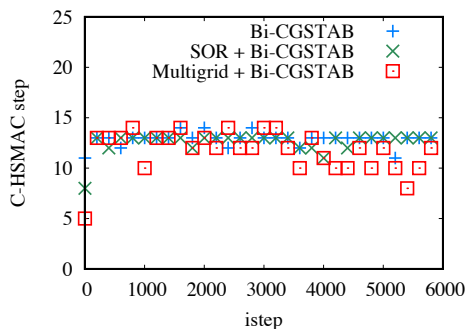


図-21 lock-exchange 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比  $r = 21.6$ , ブシネスク近似なし)

#### (4) dam-break 問題の計算

重力が存在する中で水槽の仕切り板の片側に水を入れ、仕切り板を素早く取り外した時の水の挙動を観察する、いわゆる dam-break 問題の流体計算を行う。計算結果を越塚ら<sup>[20]</sup>の実験結果と比較した上で、計算時間を各手法間で比較する。

計算は 2 次元で行う。条件は、図-22 において  $L = 0.146$  [m]、重力  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] とし、流体の物性値は以下のように仮定した<sup>[20]</sup>。

流体 A (水)

$$\rho_A = 997 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$\mu_A = 8.901 \times 10^{-4} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$$

流体 B (空気)

$$\rho_B = 1.169 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$\mu_B = 1.848 \times 10^{-5} \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$$

流体 A, B の密度比は約 853 である。また、相互拡散係数は  $\alpha_C = 0$  とする。さらに、前項と結果を比較するために、lock-exchange 問題で用いた流体の組み合わせについても同様に計算する。壁面における境界条件はいずれの密度比においても lock-exchange 問題の際と同様とした。計算セル数は  $131 \times 131$  とし、時間刻み幅は密度比  $r = 1.11$  において  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  [s]、密度比  $r = 21.6$  において  $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$  [s]、密度比  $r = 853$  において  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$  [s]、とした。Bi-CGSTAB 法に適用する前処理は SOR 法および Multigrid 法とし、(3) 節と同様の解法を適用し、OpenMP による並列計算についても同様に 18 スレッドとした。また、C-HSMAC 法の条件は (2) 節と同様とした。

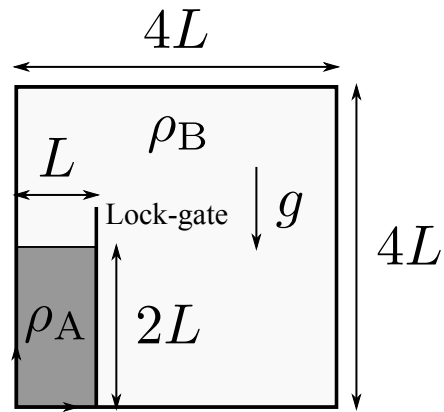


図-22 dam-break 問題

計算された密度比 853 の場合の流れの様子を図-23 に示す。lock-exchange 問題と同様に、図-23 における高密度流体の右下部分の座標をフロント位置  $Z$  と呼ぶこととする。計算されたフロント位置の変化を図-24 に示す。なお、図-24 中の  $t^*$  および  $x_1^*$  はそれぞれ無次元時間、無次元速度であり、 $t^* = t\sqrt{2g/L}$ ,



$x_1^* = Z/L$  で求められる。図から、連立一次方程式の解法ごとに、計算結果の差異が見られないこと、また妥当な結果が得られていることが確認できる。

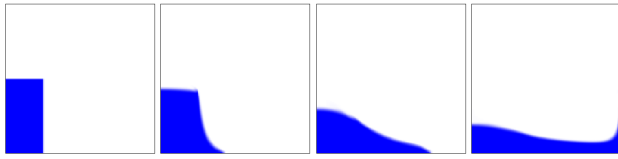


図-23 dam-break 問題の流れの様子 ( $r = 853$ ,  $t = 0$  [s] から 0.1 [s] 間隔)

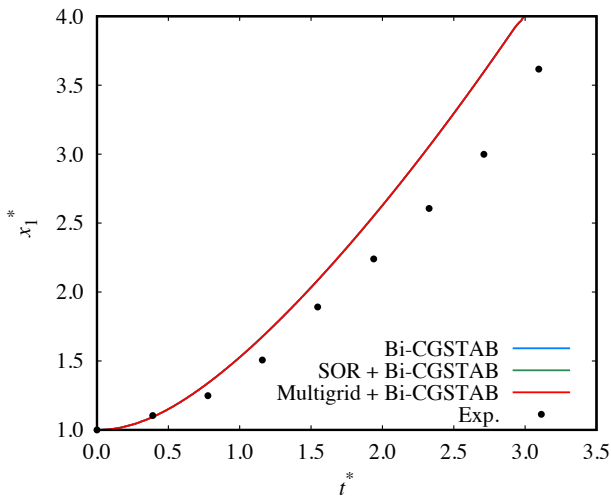


図-24 フロント位置の時間変化 (Exp. は越塚ら [14] の実験結果)

仕切り板を取り除いてから 3000 時間ステップまでの圧力計算に要した時間を表-5 に示す。また、流体計算の各時間ステップにおいて圧力計算にかかった時間  $\tau$  を 5 ステップごとにプロットしたグラフを図-25, 図-26, 図-27 に示す。キャビティ流れや lock-exchange 問題と同様に, Multigrid 法, SOR 法の順に圧力計算時間が短縮されていることが確認できた。

表-5 dam-break 問題の圧力計算時間

	密度比		
	1.11	21.6	853
前処理	圧力計算時間 [s]		
なし	1041.35	1101.56	1074.95
SOR	426.32	488.71	485.95
Multigrid	189.39	226.09	215.06

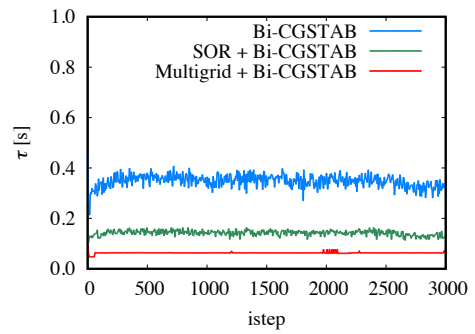


図-25 dam-break 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比 1.11)

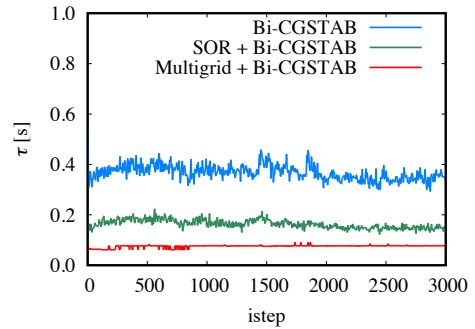


図-26 dam-break 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比 21.6)

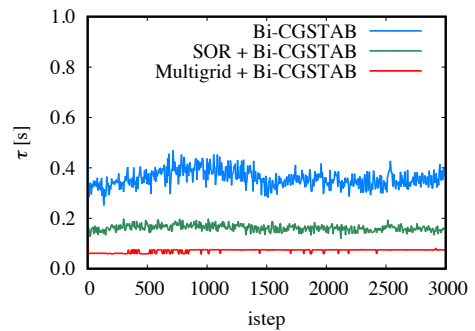


図-27 dam-break 問題における各時間ステップの圧力計算時間  $\tau$  (密度比 853)

各時間ステップにおける C-HSMAC 法の反復回数を図-28, 図-29, 図-30 に示す。なお、図を見やすくするために、100 ステップごとにプロットしている。これらの図より、いずれの密度比においても、キャビティ流れと同様に, Multigrid 法における C-HSMAC 法の反復回数は他の 1/2 程度となっていることが確認できる。lock-exchange 問題においてこの傾向が見られなかった原因として、計算領域の形状の違いが Multigrid 法による前処理に影響している可能性が考えられる。これは、計算領域が正方形に近いと、

Multigrid 前処理の効果を得やすいと考えられるためである。

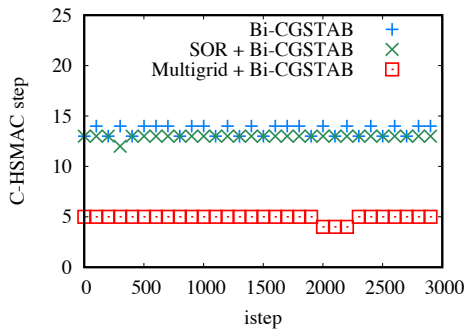


図-28 dam-break 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比 1.11)

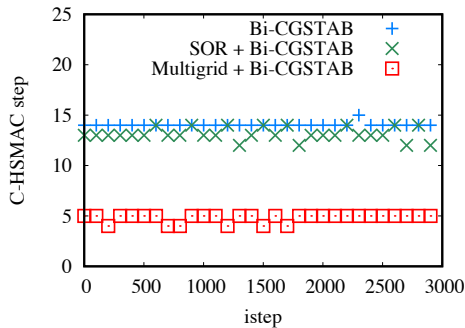


図-29 dam-break 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比 21.6)

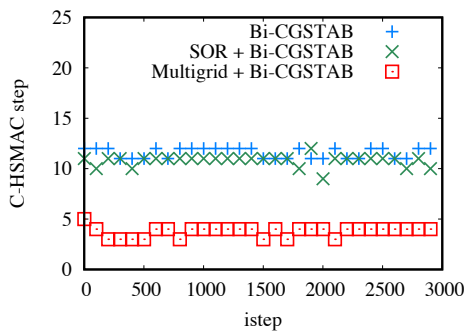


図-30 dam-break 問題における各時間ステップの C-HSMAC の反復回数 (密度比 853)

表-6 に Bi-CGSTAB 法 1 反復の計算時間の平均値を示す。なお、密度比 1.11 の場合における 3000 時間ステップまでの圧力計算時間から計算した。前処理なしの場合の Bi-CGSTAB 法 1 反復の計算時間と比較すると、SOR 法を前処理に用いた場合には 8 倍以上、Multigrid 法を前処理に用いた場合には 27 倍以上の計算時間を要している。しかし、それを上回る反復回

数の減少により、結果的に表-6 において全体の計算時間が短縮されていることが確認できる。表-6 の前処理なしの Bi-CGSTAB 法と前処理付き Bi-CGSTAB 法の 1 反復の計算時間を比較すると、SOR 法の前処理においては計算時間の約 88% を、Multigrid 法の前処理では 96% を、前処理が占めていると推計できる。

表-6 dam-break 問題 (密度比 1.11) における Bi-CGSTAB 法 1 反復の計算時間

前処理	総反復回数	1 反復の計算時間 [ $\times 10^{-3}$ s]
なし	1828014	0.570
SOR	88315	4.827
Multigrid	11974	15.817

#### 4. 結言

本研究では、非圧縮性流体の計算に用いられる MAC 系解法のうち、非圧縮条件の判定基準をユーザーが設定できる C-HSMAC 法を対象に、圧力ポアソン方程式の求解において前処理付き行列解法を用い、計算速度や、C-HSMAC 法の反復回数について考察した。圧力ポアソン方程式の解法として Bi-CGSTAB 法を利用することとし、前処理法として ILU 分解、SOR 法および Multigrid 法について検討した。

まず、解析解が得られているラプラス方程式を対象として、逐次計算にて各種前処理付き Bi-CGSTAB 法のプログラムの動作確認を行った。いずれの解法でも適切な計算結果が得られ、前処理により計算時間、Bi-CGSTAB 法の反復回数が減少していることを確認した。

次に、キャビティ内の密度が一定な非圧縮性流体に対して、C-HSMAC 法における圧力ポアソン方程式に各種前処理法を利用して逐次計算を行った。レイノルズ数が 100 と 400 それぞれの場合における計算時間を比較したところ、ラプラス方程式を対象とした場合と同様、前処理によって計算時間を短縮できることを確認した。なお、レイノルズ数が 100 と 400 の場合で前処理の効果に差異はないことを確認した。それぞれの前処理法における C-HSMAC 法の反復回数の違いについても考察したところ、Multigrid 法を前処理として用いた場合のみ、C-HSMAC 法の反復回数が他の 1/3 程度となっていることを確認した。Multigrid 法を前処理に用いると Bi-CGSTAB 法

の1回の反復での残差の減少量が大きくなるため、Bi-CGSTAB法が終了する際に解が残差収束条件を大幅に下回った状態となり、非圧縮条件を満たしやすくなるのが要因であると考えられる。

続いて、密度流における代表的な問題の1つであるlock-exchange問題に対し、C-HSMAC法における圧力ポアソン方程式の求解に並列化された各種前処理付きBi-CGSTAB法を用いて有効性を確認した。その結果、前処理による計算時間の短縮が確認され、また、密度比の違いやブシネスク近似の有無によって前処理の効果に大きな違いは見られなかった。C-HSMAC法の反復回数については、キャビティ流れの場合とは対照的に、いずれの前処理法を用いた場合でも差はほとんど見られなかった。

最後に、同じく代表的な密度流の問題であるdam-break問題においても、C-HSMAC法の圧力ポアソン方程式を並列化された前処理付きBi-CGSTAB法を用いて解き、有効性を確認した。その結果、今回実施したいずれの条件でも、前処理を用いることで計算時間が短縮されることが確認できた。また、C-HSMAC法における反復回数について検討したところ、キャビティ流れのように、Multigrid法による前処理によってC-HSMAC法の反復回数が他の1/2程度となっていることを確認した。この結果から、lock-exchange問題においてC-HSMAC法の反復回数の減少が見られなかった原因として、計算領域の形状の違いが考えられる。計算領域が正方形に近い場合、C-HSMAC法にMultigrid法による前処理を用いると、1回の圧力ポアソン方程式の計算時間の短縮だけでなく、C-HSMAC法の反復回数の減少による計算時間の短縮を見込むことができる可能性がある。

**謝辞：**本論文の執筆にご協力いただいた鳥生大祐助教（京都大学・学術情報メディアセンター）に感謝の意を表します。

## REFERENCES

- 1) Amsden, A. A. and Harlow, F. H. : A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *Journal of computational physics*, Vol. 6, No. 2, pp. 322–325, 1970.
- 2) 牛島省, 禰津家久 : 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698, pp. 11–19, 2002. [Ushijima S. and Nezu I.: Computational method for free-surface flows on collocated grid with moving curvilinear coordinates, *Doboku Gakkai Ronbunshu*, No. 698, pp. 11–19, 2002.]
- 3) Caretto, L., Gosman, A., Patankar, S. and Spalding, D.: Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation, *Proceedings of the third international conference on numerical methods in fluid mechanics*, Springer,

- pp. 60–68, 1973.
- 4) Van der Vorst, H. A. : Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, Vol. 13, No. 2, pp. 631–644, 1992.
- 5) Tatebe, O. : The multigrid preconditioned conjugate gradient method, *NASA Langley Research Center, The Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, Part 2*, 1993.
- 6) Kettler, R.: Analysis and comparison of relaxation schemes in robust multigrid and preconditioned conjugate gradient methods, *Multigrid Methods* (Hackbusch, W. and Trottenberg, U.(eds.)), Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, pp. 502–534, 1982.
- 7) Briggs, W. L., Henson, V. E. and McCormick, S. F.: *A Multigrid Tutorial, Second Edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition, 2000.
- 8) 廣谷迪, 美船健, 岩下武史, 村山敏夫, 大谷秀樹 : 並列幾何マルチグリッド法による大規模高周波電磁場有限要素解析, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol. 93, No. 9, pp. 1331–1341, 2010. [Hirotani Y., Mifune T., Iwashita T., Murayama T. and Ohtani H.: Large-scale high-frequency electromagnetic finite element analysis using the parallel geometric multigrid method, *IEICE Transactions on Communications*, Vol. 93, No. 9, pp. 1331–1341, 2010.]
- 9) Ushijima, S., Tanaka, H. and Toriu, D. : Validity of Pressure-Velocity Correction Algorithm (C-HSMAC method) for Incompressible Fluids with Passive Scalar Convection, *Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 260–272, 2019.
- 10) Lowe, R. J., Rottman, J. W. and Linden, P. : The non-Boussinesq lock-exchange problem. Part 1. Theory and experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 537, pp. 101–124, 2005.
- 11) Koshizuka, S. and Oka, Y. : Moving-Particle Semi-Implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, No. 3, pp. 421–434, 1996.
- 12) 土木学会応用力学委員会計算力学小委員会: いまさら聞けない計算力学の定石, 丸善出版, pp. 173–174, 2020. [Computational Mechanics Subcommittee, Applied Mechanics Committee: *Imasara Kikenai Keisanrikigaku-no Jyoseki*, pp. 173–174, Maruzen Publishing, 2020.]
- 13) 池田俊一, 牛島省, 鳥生大祐, 青木一真 : 密度流の数値計算におけるブシネスク近似の考察, 日本流体学会誌「ながれ」, Vol. 38, pp. 87–90, 2015. [Ikeda S., Ushijima S., Toriu D. and Aoki K.: Numerical studies on Boussinesq approximations for density currents, *Nagare: journal of Japan Society of Fluid Mechanics*, Vol. 34, pp. 87–90, 2015.]
- 14) Rhie, C. and Chow, W. L. : Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA journal*, Vol. 21, No. 11, pp. 1525–1532, 1983.
- 15) Yamamoto, S. and Daiguji, H. : Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, Vol. 22, No. 2, pp. 259–270, 1993.
- 16) Ushijima, S., Okuyama, Y., Takemura, M. and Nezu, I. : Parallel computation method for pressure field in incompressible flows on 3D curvilinear coordinates, *Proceedings of Hydraulic Engineering*, Vol. 47, pp. 385–390, 2003.

- 17) 前田一穂, 小柳義夫 : マルチグリッド前処理付 Bi-CGSTAB 法, 情報処理学会研究報告ハイパフォーマンスコムピューティング (HPC), Vol. 60, pp. 19–24, 1996. [Maeda, K. and Oyanagi Y.: Multigrid preconditioned Bi-CGSTAB method", *IPSJ SIG Notes*, Vol. 60, pp. 19–24, 1996.]
- 18) Berger-Vergiat, L., Waisman, H., Hiriyur, B., Tuminaro, R. and Keyes, D. : Inexact Schwarz-algebraic multigrid preconditioners for crack problems modeled by extended finite element methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 90, No. 3, pp. 311–328, 2012.
- 19) Ghia, U., Ghia, K. and Shin, C. : High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, No. 3, pp. 387–411, 1982.
- 20) Gröbelbauer, H., Fanneløp, T. and Britter, R. : The propagation of intrusion fronts of high density ratios, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 250, pp. 669–687, 1993.
- 21) 日本機械学会: 伝熱工学資料, 丸善出版, pp. 298–314, 2009. [The Japan Society of Mechanical Engineers: *Heat Transfer*, pp. 298–314, Maruzen Publishing, 2009.]
- 22) 高橋満男, 高橋信次, 岩崎廣次 : 気体クロロジフルオロメタン (R-22) の粘性率, 化学工学論文集, Vol. 9, No. 5, pp. 482–484, 1983. [Takahashi M., Takahashi S. and Iwasaki H.: Viscosity of gaseous chlorodifluoromethane (R-22), *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, Vol. 9, No. 5, pp. 482–484, 1983.]
- 23) 大江修造: 物性推算法, データブック出版社, pp. 284–305, 2002. [Ohe S.: *Bussei Suisanhou*, pp. 284–305, Data Book Shuppansya, 2002.]

(Received June 24, 2022)  
(Accepted November 30, 2022)

## PRECONDITIONING FOR PRESSURE COMPUTATIONS IN NUMERICAL PREDICTIONS OF DENSITY CURRENTS

Ryota MOTONISHI and Satoru USHIJIMA

When performing numerical calculations of incompressible density currents, it is important to use effective preconditioning for the pressure Poisson equation in order to reduce computation time. In the C-HSMAC method, which is a fluid calculation method, the incompressibility condition, which is important for obtaining valid calculation results, can be satisfied with high accuracy by iteratively solving the pressure Poisson equation at each time step. In this paper, the effect of using preconditioned Bi-CGSTAB methods for solving the pressure Poisson equation in the C-HSMAC method is discussed. As a result, it was confirmed that the preconditioning can reduce the computation time. In some cases, the number of iterations of the C-HSMAC method was smaller than that of other methods when the Multigrid method was used as a preconditioner. It is possible to expect not only a reduction in the computation time for a single iteration of the pressure Poisson equation, but also a reduction in the computation time due to the reduced number of iterations of the C-HSMAC method.