

Coupled logistic map の機械学習と解析

中井 拳吾 *

*岡山大学学術研究院 環境生命自然科学学域

本稿は小林 幹氏 (立正大学経済学部)、齊木 吉隆氏 (一橋大学経営管理研究科) との共同研究に基づくものである。

1 はじめに

近年、機械学習の一種で時系列データの学習に特化したリザーバーコンピューティング [1, 2] という機械学習手法が時系列予測に有効であることが報告されている。我々はこの機械学習手法を流体のエネルギー変数に適用し、時間発展の予想等を成功させている [3, 4]。さらに不動点、周期点のような力学系の不変集合といった各種力学系的性質が再現することも明らかにしている [5]。本研究では、流体気象などの実際の現象でしばしば見られる、微小の変化で大きな構造変化をもたらす構造不安定な力学系構造の再現性の考察に向けて、見たい構造不安定な力学系構造をもつ力学系の機械学習モデルの構築を行う。

2 リザーバーコンピューティング

$d\phi/dt = \mathbf{f}(\phi)$ で表される力学系の変数、 $\mathbf{u} = \mathbf{h}(\phi) \in \mathbb{R}^M$ について考える。ある時刻までの時系列データを用いて、入力 $\mathbf{u}(t)$ に対して出力が $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ となるような時間発展モデルを機械学習によって構築する。リザーバーコンピューティングの特徴の一つはニューラルネットワークの内部変数を学習しないことであり圧倒的に計算量が少なく済む点である。その代わりにニューラルネットワークの次元を大きくすることで高性能なモデリングを可能にしている (詳細は [5])。このことによりダイナミクスが複雑なふるまいを示すとしても、それが決定論的である場合にはこの種の学習方法が有効である。

3 モデルの設定と結果

3.1 設定

次の Coupled logistic map を考える:

$$\begin{cases} X_{n+1} = (1 - \epsilon)r_1 X_n(1 - X_n) + \epsilon r_1 Y_n(1 - Y_n) \\ Y_{n+1} = (1 - \epsilon)r_2 Y_n(1 - Y_n) + \epsilon r_2 X_n(1 - X_n) \end{cases}$$

ただし、 $(r_1, r_2, \epsilon) = (3.99, 3.9, 0.2)$ の場合を考える。このアトラクタは不安定次元が 1 の周期軌道と不安定次元が 2 の周期軌道のいずれもが稠密に埋め込まれているヘテロカオス [7] であると考えられている。

この写像の時間発展により得られた変数 (X_n, Y_n) とその時間遅れの時系列データを $\{\mathbf{u}\}$ としてリザーバーコンピューティングにより学習させて、得られた時間発展モデルがどの程度もとの力学系を再現するか解明する。

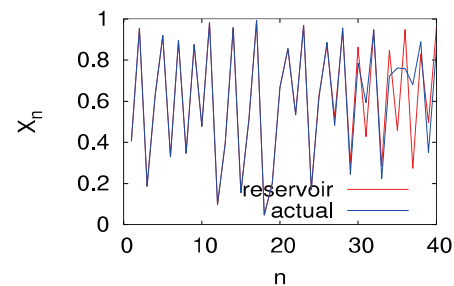


図 1: 時系列データ予測. ある時刻 $n = 0$ から構成した機械学習モデルによって予測された変数 X_n の時系列データ (赤色) と対応する Coupled logistic map の時間発展により得られた変数 X_n の時系列データ (青色) を書き出した。

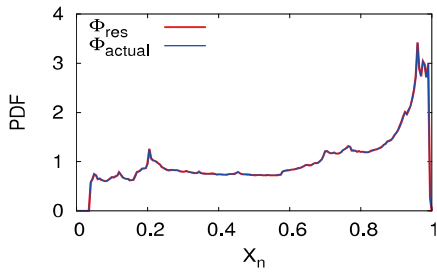


図 2: 変数の滞在時間分布. 構成した機械学習モデルによって予測された変数 X_n の時系列データからその滞在時間分布を計算しプロットした (赤色). また、対応する正解として、Coupled logistic map の時間発展により得られた変数 X_n の時系列データから滞在時間分布も計算し合わせてプロットした (青色).

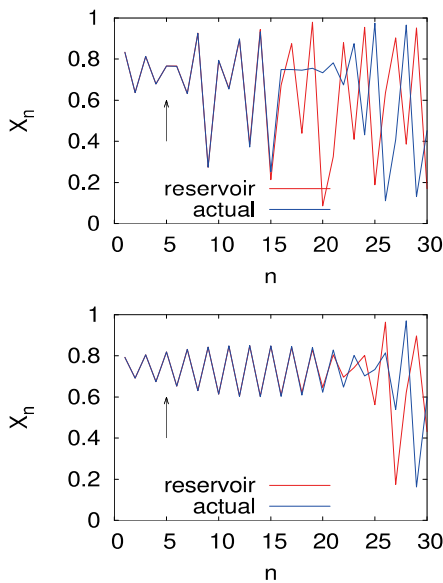


図 3: 不安定次元が切り替わる時刻での時系列予測. 上図の時刻 5 (矢印の時刻) では不安定次元が 1 から 2 に切り替わり、下図の時刻 5 では不安定次元が 2 から 1 に切り替わる. この次元の切り変わりの 5 ステップ前から機械学習モデルにより予測を開始した時系列データを書き出した.

3.2 結果

得られた機械学習モデルによって短時間予測ができていたことが確認された (図 1). カオス性などに

より長時間の時系列データ予測の誤差拡大を避けることは不可能であるが、 x_n 変数の長時間発展の滞在密度分布は正解の Coupled logistic map の滞在密度分布を再現することも確認された (図 2).

Coupled logistic map の不安定次元が切り替わる 5 ステップ前から時系列予測を行った (図 3). 不安定次元が切り替わる前後で極端に予測性能が落ちることは確認されなかった. また、他のいくつかの時系列や、予測の開始時刻を 1 から 10 ステップ前に変更しても同様に、極端な予測性能の低下は確認されなかった.

4 まとめ

構造不安定な力学系構造の典型例の一つのヘテロカオス性のある Coupled logistic map について、時系列データのみ学習によって機械学習時間発展モデルの構築を行った. その特徴の一つである次元が切り替わる時刻周辺も機械学習モデルで再現可能であることが明らかになった.

5 謝辞

本研究でおこなった計算の一部は京都大学のスーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性奨励枠) に基づく. また、中井は JSPS 科研費 22K17965 の助成を受けたものである. ここに感謝の意を表す.

参考文献

- [1] H. Jaeger, and H. Haas, *Science*, 304, (2004), 78-80.
- [2] Z. Lu, J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, R. Brockett, and E. Ott, *Chaos* 27, (2017), 041102.
- [3] K. Nakai, and Y. Saiki, *Physical Review E* 98, (2018), 023111:1-6.
- [4] K. Nakai, and Y. Saiki, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, (2021), 14:1079-1092.
- [5] M. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki, and N. Tsutsumi, *Physical Review E* 104, (2021), 044215:1-7.
- [6] E. Lorenz, and K. Emanuel. *Journal of the Atmospheric Sciences* 45, (1998), 399-414.
- [7] Y. Saiki, H. Takahasi, and J. A. Yorke, *Nonlinearity* 34, (2021), 5744.
- [8] Y. Saiki, M. A. F. Sanjuán, and J. A. Yorke. *Chaos* 28, (2018), 103110.