水星磁気圏の 3 次元大域的完全
電磁粒子シミュレーション

Global 3D EM full particle simulation for Mercury Magnetosphere

研究代表者：蔡東生（筑波大学システム情報工学研究科ＣＳ専攻）
dongscai@gmail.com
研究分担者：Sri Ekawati（筑波大学システム情報工学研究科ＣＳ専攻）
ekawati@cavelab.cs.tsukuba.ac.jp
担当：　シミュレーション,データ解析, 可視化

研究目的 (Research Objective):

水星は太陽に一番近い軌道を回り、月と火星の中間のサイズしかないにもかかわらず地球と同様、惑星固有の磁場を持っている惑星。その灼熱の環境、周回軌道投入に必要な燃料の多大さから直接観測がほとんどできなかったのが水星である.「BepiColombo(ベピコロンボ)」とは、日本とヨーロッパ (European Space Agency(ESA):欧州宇宙機関)が共同で計画中の水星探査ミッションである。平成 30 年 10 月 19 日（金）22 時 45 分 28 秒（現地時間）（10 月 20 日（土）10 時 45 分 28 秒（日本標準時））に、フランス領ギアナのギアナ宇宙センターから打ち上げられた。国際水星探査計画「ベピコロンボ」(BepiColombo) は、ESA と JAXA の共同で、観測目的に合わせた 2 つの周回探査機を水星周回軌道に送り込んで水星を観測する計画で，水星の磁場・磁気圏の観測を行う水星磁気圏探査機「みお」(MMO) と、水星の表面・内部の観測を行う水星表面探査機 (MPO) から構成されている。2025 年 12 月に予定される水星到着までの総航行距離は（太陽中心座標系で）約 88 億 km である。BepiColombo は、水星の公転周期と自転周期が 3:2 となることを示し、水星にゆかりの深いイタリアの応用数学者ジュセッペ・コロンボ博士(ベピは愛称)に因んでこの名前がつけられた。固有磁場と地球よりはるかに小さい磁気圏を持つ地球型惑星は地球と水星のみであり、初の水星の詳細探査は、「惑星の磁場・磁気圏の普遍性と特異性」の知見に大きな飛躍をもたらすと期待できる。われわれの経験では、グローバルシミュレーションを行う上での最大の困難は、ポストプロセス，即ち，データ処理，可視化である。そのため、実際よりかなり小さいシミュレーションモデルで計算を行い、大規模シミュレーションを行った場合の知見を得ることが本研究の第一目的である。本年度は、リコネクションを捉えるため、測地線レベルセット法を用いた可視化プログラムの作成を行なった。

計算手法（Computational Aspects）：

本研究では大域的三次元完全電磁シミュレーションコードを用いる。計算領域，IMF 磁場の時間変化を図 1 にしめす。太陽方向の境界から、IMF 磁場をもった太陽風を流し、GSM 座標中心にダイポール磁場をおき、地球の磁気圏を形成する。電磁場境界条件は、Lindman の吸収境界条件、即ち、一次近似を用いる。この近似では、４５度以上で入射する電磁波は吸収され、４５度以下の電磁波は反射される。粒子に関しては、境界を離れる粒子は、一旦取り出され、再度、境界領域からランダムに、Knudsen 流として再注入される。再注入される、粒子速度情報等は Vlasov 方程式を解いて決定しておらず、ランダムである。そのため、境界での擾乱が生じ、この擾乱が不安定化した場合、シミュレーションを停止する。

また、本シミュレーションでは，粒子の運動論的振る舞いはモデル化せず，電子とイオンの 2 流体モデルとしてシミュレーションを行う。数値加熱を防ぐ為、グリッドサイズと同程度のデバイ長を与える熱運量を粒子に与えるが、本数値実験では、グリッドサイズ＝0.1～2Re であり、2 流体モデルとして扱う。そのため、space charge effect、ビーム不安定性、粒子の加速機構等が物理的に扱われていると考える。運動論によるバルーニング不安定等は

考慮に入れない。

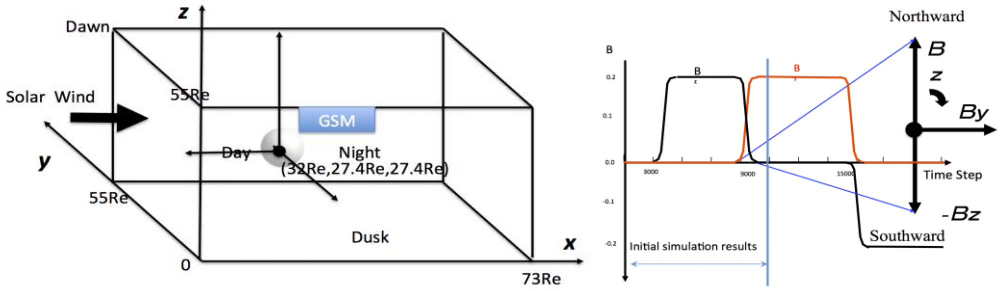

図 1：シミュレーションの設定と IMF の時間変化

• 可視化手法（Visualization Aspects）

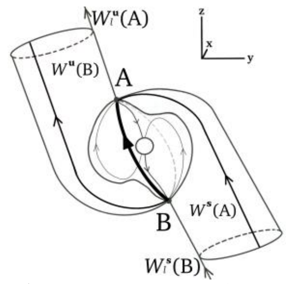

図 2. 臨界点 CP 付近のベクトル場の分類。(a)As 型または渦巻き引きつけ鞍、(b)Bs 型または渦巻き反発鞍、(c)A 型または半径引きつけ鞍、(d)B 型または半径反発鞍。

　　リコネクションは長い間研究されており、磁気圏物理学における最もホットな研究テーマのひとつである。地球磁場は太陽風と相互作用し、″磁気圏　″として知られる複雑な磁気多様体を形成していることが知られている。この相互作用は、磁気リコネクションが起こるいくつかの場所で大規模なエネルギー移動を伴う（[2,　3]）。ベクトル場のトポロジー理論では、分岐は空間における臨界点（CP）または磁気ヌルの生成または消滅によって特徴づけられる[2]。以下では、磁気的ヌルの代わりに「CP（臨界点）」という用語を主に使用する。CP は磁場の大きさが消失する点である。磁気リコネクション、分岐、ベクトル場のトポロジーを理解する鍵である。3 次元磁場における分岐は、そのトポロジーを決定し、制御パラメータを漸近的に変化させることで同定できる（[4,　10,　11]）。

　本研究では、測地線レベルセット(GLS)法[1,　13,　16,　22]を用いる。この方法は広く用いられており、3 次元空間における 2 次元(非)安定多様体の大域的なトポロジーを保存できるからである。再パラメトリック化された前進ストリームフロント法[27]と GLS 法[1]は、2 次元多様体をうまく可視化することができる。GLS 法によって生成された近似メッシュは、サーフェスフロントメッシュの積分ステップが徐々にゼロに近づくにつれて、理論的な多様体に収束することが証明されている[22]。

　GLS の背後にある概念的な考え方は、流れによって与えられる力学とは無関係に、幾何学的な観点からのみパラメトリゼーションを使用することである。からの測地線距離が一定の点からなる多様体上の ″円 ″を考える。 d_gから CP $\boldsymbol{x}_0$. これらの点を ″測地線レベル ″と呼ぶ。測地線距離 $\mathrm{d}_g(x,y,z)$は、多様体に沿った最短経路の弧の長さである。測地線距離を用いる主な考え方は、そうすることで、他の多くの手法のように、フローダイナミクスのもとで既存のメッシュを進化させることから完全に切り離されることである。すなわち、CP からの多様体に沿った測地線距離によってパラメトリック化された測地線レベル集合のファミリーとして扱われます。したがって、近似メッシュの理論多様体への収束は、初期円半径 δとメッシュサイズ $\Delta \to 0$[22].

臨界点周辺の磁場トポロジー

　ここでは 3 次元のベクトル場を考える：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

ここで $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$そして $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$は十分に滑らかである。ですべての軌道が CP に収束する場

合 $\boldsymbol{x}_0$に収束する場合($t \to +/-\infty$)の安定/不安定多様体と呼ぶ。 $\boldsymbol{x_0}$ [2, 9, 14]と定義される：

$$\mathrm{W}(\boldsymbol{x_0}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^3 \mid \lim_{\mathrm{t}\to+/-\infty} \phi^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x_0}\right\} \qquad (2)$$

ここで ϕ^tは式(1)のフロー・マップである。安定/非安定多様体の概念は、可視化コミュニティでよく使われるアトラクターやリペラーの概念に含まれる一般的な概念に、正式な数学的定義を与えるものである。我々は GLS 法を定義するために安定/非安定多様体という用語を使用する。の近傍には局所的な（非）安定多様体が存在する。 $\boldsymbol{x_0}$の近傍に局所的な（非）安定多様体 $W_{loc}^s(\boldsymbol{x}_0)$($W_{loc}^u(\boldsymbol{x}_0)$)が存在し、それは(非)安定固有空間 $E^s(\boldsymbol{x}_0)$ ($E^u(\boldsymbol{x}_0)$)に接する局所的な(非)安定多様体 $Df(\boldsymbol{x}_0)$が存在とする。。

$\mathbf{x}_0 = (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)^{\mathrm{t}}$磁場の孤立 CP である $\mathbf{B}_0 = (u_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0), v_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0), w_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0))^{\mathrm{t}} = \mathbf{0}$. この CP の近傍の磁場 B **を**テイラー展開すると、この CP の近傍の磁気ベクトル場の線形化された形は次のように表すことができる：

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{x}}\,, \qquad (3)$$

ここで $\mathbf{J}$のヤコビアンである。 $\mathbf{B}$であり $\bar{\mathbf{x}} = (\mathrm{x}-\mathrm{x}_0, \mathrm{y}-\mathrm{y}_0, \mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{t}}$. したがって、CP が孤立しており、J **の**行列式がゼロでない場合、J **は** CP 近傍の流れを決定する。CP が孤立しておらず、行列式がゼロかゼロに近い場合、そのような場合は高次の項を解析しなければならない。しかし、このケースは本稿の範囲外である。

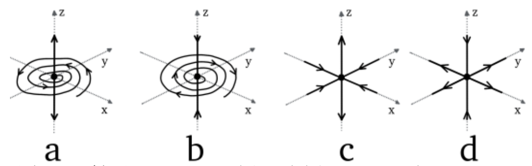

図３. 臨界点 CP 付近のベクトル場の分類。(a)As 型またはらせん状の引きつけ鞍、(b)Bs 型またはらせん状の反発鞍、(c)A 型または半径方向の引きつけ鞍、(d)B 型または半径方向の反発鞍

3 次元磁場では、ソレノイド条件は次のようになる：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}. \qquad (4)$$

すべての固有値の実部が 0 でなく、固有値の和が 0 であるとする：

$$\mathrm{trace}(\mathbf{J}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad (5)$$

ここで $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$は固有値である。B のヤコビアン J **の** 3 つの固有値はすべて実数か、1 つが実数で 2 つが複素共役である。トレース J **が**ゼロであり、すべての固有値がゼロでない実数部を持つという事実は、正負両方の実数部が提示されなければならないことを意味する[7, 8]。したがって、3 次元磁場中の CP はすべて鞍点である。従って、固有値の 2 つの実部がプラス/マイナスである CP を正負(B/A)CP または反発/吸引鞍点と呼ぶ。また、固有値の実部と共役部がプラス/マイナスの CP を、放射状/螺旋状の正/負 CP、または放射状/螺旋状の反発/引きつけ鞍と呼ぶ。宇宙科学の分野では、それぞれ B/A 型、Bs/As 型とも呼ばれる。CP 近傍の磁場トポロジーは、図３に示すように 4 つのタイプに分類できる。

における CP の近傍では $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$の近傍では、固有値の 2 つの正の実数部に関連する 2 つの固有ベクトル((Re（λ_1)、Re（λ_2)) >0)と固有値の負の実数部((Re（λ_1), Re（λ_2)) <0)、それぞれ 2 次元の(非)安定固有空間 $E^u(\boldsymbol{x}_0)$そして $E^s(\boldsymbol{x}_0)$. 2 次元局所（非）安定多様体 $W_{loc}^u(\boldsymbol{x}_0)$と $W_{loc}^s(\boldsymbol{x}_0)$は、連続的に、CP の近傍の外に広がり、分離行列または分離面を形成することができる。これらは $W^u(\boldsymbol{x}_0)$と $W^s(\boldsymbol{x}_0)$. 固有値の符号が他と異なる 3 番目の固有ベクトルは、それぞれ 1 次元の安定な(λ_3<0)と不安定(λ_3>0)多様体 $W_l^s(\boldsymbol{x}_0)$と $W_l^u(\boldsymbol{x}_0)$. 通常、複数の正負の CP の組がいわゆる鞍型接続を形成する。例えば、図 3 に示すように、CP A-型と Bs 型は鞍型接続を形成している[21]。

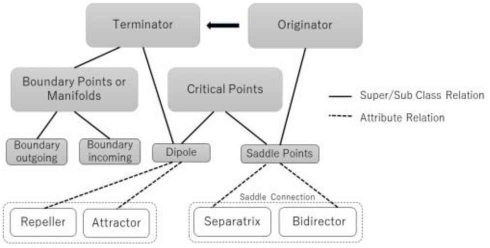

図４.点と多様体の分類。解析によって特定された各点は、小さなボックスで示されたクラスのいずれかに属する。各クラスは、接続線によって示されるように、スーパー・サブクラス関係に属していることを意味する。破線はそれらのクラスが持つ属性を示す。

トポロジー可視化アルゴリズム

我々の場合、CP はすべて鞍点である。それらの1次元および2次元の多様体は、固有ベクトルに関連する主な方向、すなわち ″原点 ″を持つ。CP 近傍の 2 次元接線多様体は、固有値の実部が同じ符号を持つ 2 つの固有ベクトルによってスパンされる。残りの 1 次元接線多様体は、往路/復路の方向に沿って前方/後方に積分される。1 次元および 2 次元の接線多様体は、CP を鞍結合の集合に接続するために使用される[21]。これらの接続は、図４に示すように、部分連結グラフを形成する。3 次元ベクトル場が与えられると、アルゴリズムは以下のように記述される：

(1)地球ダイポールを含むすべての CP の位置、特性、分類；
(2) 鞍 CP（原点）から 1 次元および 2 次元の接線多様体を積分する。それぞれの鞍点に対して、1 つの 2 次元多様体（セパラトリックス）と 2 つの 1 次元多様体（バイディレクタ）を生成する。各 1 次元および 2 次元多様体の始点は、その始点にリンクされる。
(3) 各マニホールドの終点（ターミネーター）を特定し、以下のように特定したターミネーターにマニホールドをリンクする：
　(a)多様体が境界で終わる場合、それを表す新しい境界点または多様体（曲線）が作成され、それにリンクされる；
　(b) マニフォールドが既存の終点または終端マニフォールド（この場合、地球ダイポール（高次 CP)）で終わる場合、マニフォールドの終端は終端（地球ダイポールなど）にリンクされる。
　(c)ある 2 次元多様体が他の CP の 1 次元双直線（セパラトリックス）を含むか、それらを回り込んで収束する場合、他の CP は鞍連結しており、他の 2 次元多様体との断面が鞍連結である[21]。

　そのため、トポロジーを特定し決定するためには、1 次元双曲面を含む、あるいは 1 次元双曲面に収束する 2 次元多様体を描くことが不可欠である。通常、一対以上の鞍点がつながっている。しかし、双直線（分離行列）と分離多様体は、地球双極子（高次 CP）に引き寄せられることもある。他の鞍点接続 CP が共役固有値を持つ場合、始点から現れる 2 次元多様体は非常に複雑になる。我々のアルゴリズムでは、1 次元と 2 次元の多様体は原点から始まり、終点で終わる。従って、始点から始まる 2 次元多様体を特定し、描画することが不可欠である。
　以下のセクションでは、2 次元多様体のトポロジーを保存し、大域的な鞍連結トポロジーを可視化・同定することができる測地線レベルセット（GLS）と題されたアルゴリズムを紹介する。

測地線レベルセット法による 2 次元多様体の構築

　Krauskopf と Osinga([1, 13, 16])は、測地線レベルセット(GLS)と呼ばれる数値アルゴリズムを提案し、N 次元空間における(N-1)次元多様体の自動生成と可視化に用いている。彼らは、3 次元ベクトル場における 2 次元安定ローレンツ多様体 $W^s(\boldsymbol{x})$を計算する。 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$円弧長は、中心すなわち CP から表面メッシュ前面までの測地線距離を意味する。England ら[15]は、[1]に基づいて境界値問題を改良し、2 次元ローレンツ安定多様体を弧長 161.75 まで計算した。ここで，円弧長とは，計算された隣接する測地線レベルの距離の和である.本節では、まず GLS 法の理解を深めるために、2 次元(非)安定多様体を計算する彼らの方法を要約す

る。 $W^s(\boldsymbol{x}_0)/W^u(\boldsymbol{x}_0)$を 5.1 節で要約する。我々の改良した GLS 法を 3 次元グローバル MHD シミュレーションデータに適用したものを 5.2 節で紹介する。

測地線レベルセット法

図 5 に示されるように、GLS 法は、サーフェスフロントメッシュを CP $\hat{C}$CP を中心とする $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$を中心とする N_0等間隔の点 $\boldsymbol{r}_{i,j=1}\in\boldsymbol{r}$ 半径 δに接する固有空間 $E_{loc}(\boldsymbol{x}_0)$に接する $W_{loc}(\boldsymbol{x}_0)$ここで $i\,(=1\cdots N_0)$は円弧長さ方向の離散円の番号である。 jは弧長方向の離散円の番号である。ここで jを測地線レベルまたは円弧長と呼ぶ。初期離散円または初期メッシュ点を $\hat{C}_{r,j=1}$. GLS において最も重要なステップは、サーフェスフロントメッシュを次の新しいメッシュに拡張することである。GLS の最も重要なステップは、サーフェスフロントメッシュを次の新しいメッシュに拡張することである。 j–次の測地線レベル集合 $\{\boldsymbol{r}_{i,j}\in\hat{C}_{r,j}\}$に属する各サーフェスフロントメッシュ点を、その次のメッシュ点、つまり新しいサーフェスフロントに拡張する。$j+1)$–番目の測地線レベルセット $\{\boldsymbol{b}_{r,j}\in\hat{C}_{r,j+1}\}$. ここで $\boldsymbol{b}_{r,j}$は現在のサーフェスフロントのメッシュ点 $\boldsymbol{r}_{i,j}$ここで iは $\boldsymbol{b}_{r,j}$. 一旦固定されると $\boldsymbol{b}_{r,j}$は $\boldsymbol{r}_{i,j+1}$.

実際には、境界値問題（BVP）を解かなければならないため、次の新しいメッシュ点を見つけるのは容易ではありません。GLS では、BVP を解くためにシューティング法を用いる。 $\hat{C}_{r,j}$から $\boldsymbol{b}_{r,j}\in\hat{C}_{r,j+1}$. の新しいメッシュ点を適切に配置することが難しい。 $\hat{C}_{r,j+1}$が適切に配置されるようにすることです。この方法では、最後に計算されたメッシュ点 $\{\mathcal{F}_{r_{i,j}}|r_{i,j}\in\hat{C}_{r,j}\}$を定義します。各葉状化平面 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$は最後に計算された円 $\hat{C}_{r,j}$に垂直である。 $\boldsymbol{r}_{i,j}$. 新しいメッシュ点候補 $\boldsymbol{b}_{r,j}\in\hat{C}_{r,j+1}$を薬理面 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$現在のメッシュ点から所定の距離 Δ で $\boldsymbol{r}_{i,j}\in\hat{C}_{r,j}$.

から始まる流れの挙動に基づいて計算される。 $\hat{C}_{r,j}$図 5(b)に示すようにまず、各メッシュ点 $\boldsymbol{r}_{i,j}$に対応する葉 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$は、次式で定義される法線ベクトルによって一意に決定される：

$$\boldsymbol{r}_{i+1,j}-\boldsymbol{r}_{i-1,j} \tag{6}$$

ここで $\boldsymbol{r}_{i+1,j}$と $\boldsymbol{r}_{i-1,j}$の隣接する 2 つのメッシュ点である。 $\boldsymbol{r}_{i,j}$. から連続的に出発する軌道 $\phi^t(\boldsymbol{q}_r(\tau))$から連続的に出発し $\hat{C}_{r,j}$から出発し、対応する葉 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$ここで τに到達する軌道の数であり $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$であり、継続パラメータとも呼ばれる。 $\boldsymbol{q}_r(\tau)$における交点である。 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$. この射法では，軌道の始点は，. $\hat{C}_{r,j}$各線分上の初期点の数は次のようにパラメタ化される τ. この方法では、軌道 ϕ^tが以下の条件を満たすことが必要である：

$$\begin{cases}\phi^0\left(\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau)\right)\in\hat{C}_{r,j}\\ \phi^{t_0}\left(\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau)\right)\in\mathcal{F}_{r_{i,j}}\end{cases}, \tag{7}$$

ここで、最初の流れは $\hat{C}_{r,j}$で始まる。 $\phi^0(\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau))$で交差する流れを $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$で表される。 $\phi^{t_0}(\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau))$，$t_0$を横切った時刻である。 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$であり $\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau)$での交点である。 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$. からの軌道の撮影を開始する。 $\boldsymbol{r}_{i,j}$に沿って、連続的に $\hat{C}_{r,j}$から軌道を連続的に射出し始め、以下の条件が満たされたときに交点を得る：

$$\Delta-\epsilon\le\left\|\boldsymbol{r}_{i,j}-\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau_0)\right\|\le\Delta+\epsilon,\quad\epsilon\ll 1 \tag{8}$$

ここで ϵを所定のパラメータであるシュートエラーと定義し $\boldsymbol{b}_{r,j}=\boldsymbol{q}_{r_{i,j}}(\tau_0)$. 新しい離散円 $\hat{C}_{r,j+1}$は新しい点 $\{\boldsymbol{b}_{r,j}\in\hat{C}_{r,j+1}\}$.

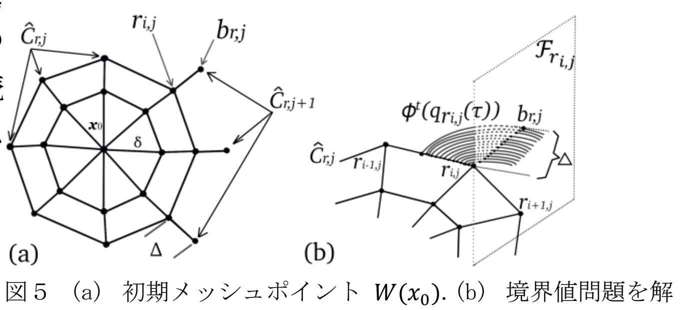

図 5 (a) 初期メッシュポイント $W(x_0)$. (b) 境界値問題を解くアルゴリズム。 $\hat{C}_{r,j}$から次のバンド $\hat{C}_{b,j}$を解くアルゴリズム。それぞれの新しい点 $\boldsymbol{b}_{r,j}$は現在のバンド上の対応する点 $\boldsymbol{r}_{i,j}$に基づいて計算される。

最新の計算された離散円からなる多様体の正確な近似を維持するために $\hat{C}_{r,j+1}$. 16]で説明されている 1 次元アルゴリズムを用いて長さ Δ を調整する必要がある。局所多様体とフォリア平面の交線は、弧長方向の 1 次元曲率とみなすことができる。曲率の公差は次のように制限される：

$$\begin{aligned} \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \\ (\Delta\alpha)_{min} \leq \Delta\alpha \leq (\Delta\alpha)_{max} \end{aligned} \qquad (9)$$

と $\alpha > \alpha_{max}$ と $\Delta\alpha > (\Delta\alpha)_{max}$ の両方が存在する場合、新しい点をより短い距離で再計算する。Δ^{-}. 同様に $\alpha < \alpha_{min}$ と $\Delta\alpha < (\Delta\alpha)_{min}$ の両方がある場合、次の測地線レベルにおいて Δ^{+}を計算する。

に隣接する 2 つの新しいメッシュ点が近すぎたり遠すぎたりする場合、アルゴリズムはそれぞれ新しいメッシュ点を削除したり追加したりする。 $\hat{C}_{r,j+1}$が近すぎたり遠すぎたりする場合、それぞれ新しいメッシュ点を削除したり追加したりします。隣接する 2 つの横メッシュ点 $\boldsymbol{r}_{i,j+1}$と $\boldsymbol{r}_{i+1,j+1}$が所定のパラメータより小さい場合 $\boldsymbol{r}_{i+1,j+1}$は削除されます。横方向に隣接する 2 つのメッシュ点間の距離が所定のパラメータより大きい場合、新しい点 $\tilde{r} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{i,j} + \boldsymbol{r}_{i+1,j})$が追加されます。 $\hat{C}_{r,j}$が追加され、新しく挿入された点 $b_{\tilde{r},j}$も同じ方法で計算される。新しいメッシュ点 $b_{\tilde{r},j}$は補間誤差　$\mathrm{O}(\Delta)$[22]. したがって、メッシュサイズを適切に設定すれば、この方法は信頼できる。本論文で提案する基本的な測地線レベルセット法をまとめると以下のようになる：

(1) 初期化：設定 j=1. CP を見つける。 $\boldsymbol{x}_0$を求め N_0離散初期メッシュ点 $\{\boldsymbol{r}_{i,j=1} | i = 1 \cdots N_0\}$に接する固有空間 $E(\boldsymbol{x}_0)$に接する $W(\boldsymbol{x}_0)$に接する固有空間上に半径 δを中心とする半径 $\boldsymbol{x}_0$を中心とした半径を持つ；

(2) シューティング法を用いて BVP を解き、新しい円メッシュ点を追加する；

 a) を定義する。 $\boldsymbol{\mathcal{F}}_r = \{\boldsymbol{\mathcal{F}}_{r_{i,j}} | \boldsymbol{r}_{i,j} \in \hat{C}_{r,j}\}$を定義する。 $W_{loc}(\boldsymbol{x}_0)$が各葉 $\mathcal{F}_{r_{i,j}}$各メッシュ点 $r_{i,j}$；

 b) (BVP)　各メッシュ点 $\boldsymbol{r}_{i,j}$を固定し j(測地線レベル番号) を iに沿ったメッシュ点のインデックス) を 1 から N まで変化させる。 $\hat{C}_{r,j}$)について、対応する次の点 $\boldsymbol{b}_{r,j} \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{r}_{i,j}}$を求める。 Δを求める。式(8)を満たす端点を見つけたら、図 5(b)に示すように $\boldsymbol{r}_{i,j+1} = \boldsymbol{b}_{r,j}$を設定する。 $\hat{C}_{r,j+1}$は新しい点 $\{\boldsymbol{r}_{i,j+1} | i = 1 \cdots N\}$;

 c) (メッシュの適応) 円弧長さ方向の各 1 次元曲率が式(9)を満たすかどうかをチェックする。そして、隣接する 2 つのメッシュ点が近すぎたり遠すぎたりする場合には、それぞれ新しいメッシュ点を削除したり追加したりする。

(3) セット $j = j + 1$と $L_{arc} = L_{arc} + \Delta$ここで L_{arc}からのこのレベル集合の距離である。$\boldsymbol{x}_0$.

まで(2)から(3)を繰り返す。 $L_{arc} \geq L_{final}$ここで L_{final}はメッシュを構成するために必要な円弧の長さである。

全球 MHD シミュレーションデータへの GLS 法の適用

GLS 法は、3 次元ベクトル場の 2 次元（非）安定多様体を可視化する信頼性の高い数値計算手法です。GLS 法は、局所的な分離行列に対する 2 次元メッシュの接線を、手頃な均一メッシュ間隔で自動的に計算することができる。しかし、3 次元グローバル MHD シミュレーションにおいて、磁気圏の北と南からそれぞれ 2 次元（非）安定多様体間のグローバルな鞍型接続を可

視化するために GLS 法を適用すると、磁力線の強い極性（収束または発散の局所的な流れの振る舞い）が発生する可能性があります。このような強い磁力線の起源は、地球ダイポール磁場である。

図 1 に示すように、CP A と CP B の間の大域的な鞍型接続は、2 つの円柱状の多様体から構成される。それぞれの円柱において、一端は地球のダイポールに収束し、もう一端は自由空間に発散する。したがって、強い流れの極性は避けられず、BVP を解くことを難しくしている。南北の 2 つのヌル間の鞍連結が長いため、いくつかの撮影軌道は、対応する葉面を横切るために非常に長い距離を移動しなければならず、1 つの軌道の計算コストは無視できない。したがって、ある領域では、新しい 1 つのメッシュ点を得るために膨大な回数のシューティングが必要となり、計算コストがかかる。さらに、継続パラメータ τは、アルゴリズムが全ての方向に新しいメッシュ点を自動的に構築することを保証するのに十分な大きさでなければならず、これは計算コストを増加させる。以下の 4 つのサブセクションでは、GLS 法を 3 次元グローバル MHD シミュレーションに適用する際に、これらの問題を解決し、計算コストを大幅に削減する 4 つの方法を提案する。

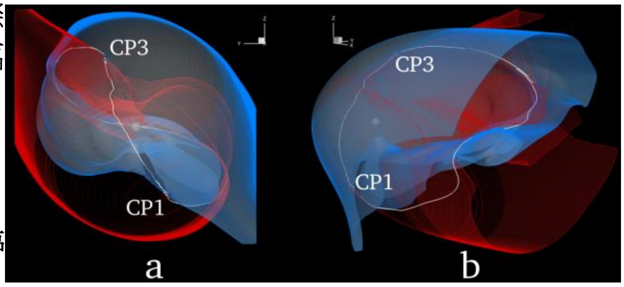

図 7．と $W^u(x_{CP1})$と $W^s(x_{CP3})$との間の鞍型接続と中立線またはリング（白い破線）。多様体 $W^u(x_{CP1})$と $W^s(x_{CP3})$はそれぞれ透明な赤と青で着色されている。パネル(a) 太陽からの眺めを y-z 平面に投影したもの。パネル(b) 磁気圏尾部からの斜視図。

可視化結果

３次元グローバル MHD シミュレーション領域における臨界点の検出

Haynes と Parnell[6]は、トリリニア補間法を用いて、信頼性の高い CP 検出法を提案した。この方法には次の 3 つのステップがある：
(1)すべての磁場成分が同じ符号を持つキューブを除外するために、キューブ内の近傍グリッドと対角グリッッド間のすべての磁場成分の+/−符号テストを素早く行う[4]。このテストにより、6,144,000 個の立方格子のうち 795,560 個（12%）の立方格子候補を見つける。(2) トリリニアソルバーを適用し、CP が 1 つの立方格子内の 3 本の線の交点に位置するかどうかをチェックする。それらは(i) $B_x = B_y = 0$と(ii) $B_x = B_z = 0$および(iii) $B_y = B_z = 0$. 立方体の中に CP が 1 つ存在する場合、3 本の線は 6 つの立方体のうち 2 つの面を横切ることができ、一方の端は立方体の中に入り、もう一方の端は立方体の外に出る。この 3 本の線のうち 1 本が立方体の 2 つの面を横切る面が 2 つ以上見つかれば、その立方体の内部には CP が 1 つ存在すると判断する。このフィルタリングの結果、(1)の 795,560 個の中から 5 個の立方体の候補が選ばれる。(3) 最後に、立方体内の 3 直線補間されたフィールドにニュートン・ラプソン法[17]を適用し、立方体内の CP 位置を検出する。

我々の 3 次元グローバル MHD シミュレーションでは、3 つの正のスパイラル CP(Bs 型)(CP 1, 2, 4)と 2 つの負のラジアル CP(A 型)(CP 3, 5)が見つかった。図中、CP1 は南極付近に位置し、他の 4 つの CP は北極付近に位置している。図 4 に示した可視化アルゴリズムを用いると、地球の北極と南極付近では、すべての 2 次元多様体（始点から始まる）において、各多様体について、少なくとも一端が地球の双極子（終点）に収束する。円柱状の多様体であれば、一端は地球双極子に収束し、他端は尾方向に自由に発散する。CP1 と CP3 は大域的に鞍連結しており、それぞれ 2 次元の大域的不安定多様体と安定多様体、1 次元の安定多様体と不安定多様体にまたがっている。

地球双極子による 2 次元大域的鞍連結多様体

流れの軌道を積分するために、4 次のルンゲクッタ法を用いる。ここで、南の CP1 と北の

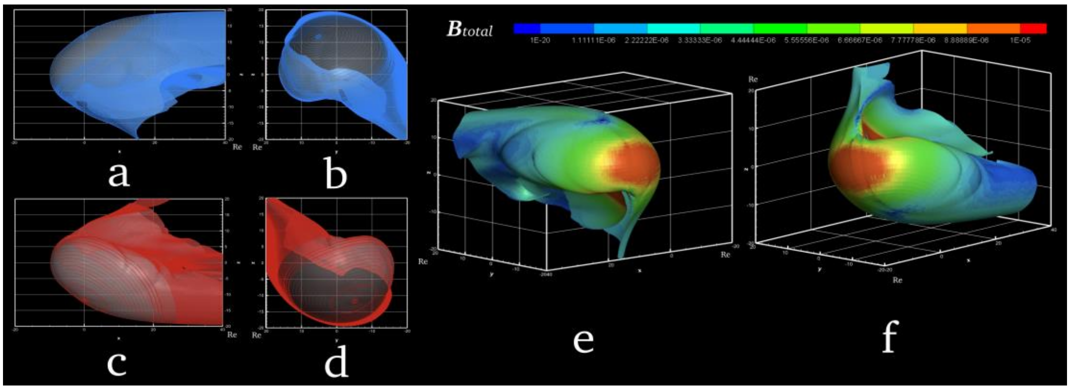

図６.グローバル磁場トポロジーは CP 1 と CP 3 によって決定される。パネル(a)と(b)はそれぞれ、CP 3 からの２次元不安定多様体を x-z 平面と y-z 平面に投影した青メッシュのもので、(e)は斜視図である。 B_{total}.パネル(c)と(d)はそれぞれ、CP 1 からの２次元安定多様体を x-z 平面と y-z 平面に投影した赤色のメッシュで、(f)は表面の色を B_{total}.

CP3 はそれぞれ 2 次元の大域的不安定多様体と安定多様体にまたがり、鞍連結している。GLS のパラメータは以下の通りである：(1) CP 1 と 3 の初期円の半径は $\delta = 0.5$Re とし $N_0 = 20$(2)測地線レベルは Δ=0.5 Re から Δ_k=Δ/(2)測地線レベルは Δ=0.5 Re から==4 まで変化し、撮影誤差は $\varepsilon = 0.01$(3)測地線レベルの長さ Δ は式(8)の条件、すなわち 0.3<α<0.2 および 0.1<Δα<1.0([1, 16])で制御する。 $\tau = 3$(5)隣接する 2 つのメッシュ点間の横方向の距離は 1.5Δ と Δ/2 の間に保つ；(6)他のパラメータは([1])のものと同じである。

CP1 (Bs 型) と CP3 (A 型) からのグローバルな 2 次元不安定多様体と安定多様体をそれぞれ図６に示す。CP1 と CP3 からの多様体は、それぞれグローバルな 2 次元多様体 $W^u(\boldsymbol{x}_{CP1})$と $W^s(\boldsymbol{x}_{CP3})$円柱状の多様体であり、一端は北極と南極の磁気圏尾部に分岐し、もう一端は地球の南極と北極（終端）に収束している。グローバル多様体は、データ境界（ターミネーター：境界の出入り口）の両方にぶつかると進まなくなる。の弧の長さは $W^u(\boldsymbol{x}_{CP1})$と $W^s(\boldsymbol{x}_{CP3})$の弧の長さは、それぞれ 60.00 Re と 60.05 Re である。

図６は、以下からなる鞍型コネクションを視覚化したものである。 $W^u(\boldsymbol{x}_{CP1})$そして $W^s(\boldsymbol{x}_{CP3})$. 図６(a)の多様体上の色は磁場強度を表す。 $\boldsymbol{B}_{total}$磁場が消失している南北の 2 つの濃い青色の領域は、CP に近い領域に対応する。磁場が相対的に強いのは、昼側の弓状衝撃波とサブ太陽点（地球が太陽に最も近い点）付近、および北極と南極付近である。図６(c,d)、 $W^u(\boldsymbol{x}_{CP1})$と $W^s(\boldsymbol{x}_{CP3})$は、それぞれ赤と青のメッシュで着色されている。CP1 と CP3 の近傍では、2 次元の不安定多様体と安定多様体 $W^u(\boldsymbol{x}_{CP1})$と $W^s(\boldsymbol{x}_{CP3})$はそれぞれ、1 次元の安定・不安定多様体 ${W_l}^s(\boldsymbol{x}_{CP1})$と ${W_l}^u(\boldsymbol{x}_{CP3})$を含む。

この鞍型接続では $W^u(\boldsymbol{x}_{CP1})$と $W^s(\boldsymbol{x}_{CP3})$の交点は、2 本の「ニュートラル・ライン」または「ニュートラル・リング」からなる円を形成する。中立リングを図７に示す。1 本の中立線は南の CP1 から始まり、昼側の磁気圏に沿って斜めに流れ、北の CP3 に接続する。もう 1 本の中性線も南の CP1 から出発し、磁気サッシュまたは S 字クロステール[19]に沿って夜側に流れ、プラズマシートを横切り、北の CP3 に接続する。磁気サッシや S 字クロステールはテール領域の弱い磁場の通り道である。他の 2 次元局所鞍型接続多様体は補足資料に示す。これらの可視化については、ビデオ(https://youtu.be/w6VR_FsAaMQ)を参照されたい。

結論

トポロジーの可視化は以下のようにまとめられる：(1)3 次元磁気圏トポロジーを決定するための一貫性のある信頼性の高い手法を提案する。(2)BVP を解くための効率的なバイセクション法を実装し、計算コストを削減する。(3)時間反転軌道を用いて、より短い軌道を手頃な精度で統合するためのトレードオフスキームを実装する；(4)GLS ストリームフロントの前進を

妨害する横方向の隣接メッシュ間のメッシュのもつれを防ぐ方法を実装する。(5)磁気圏物理学と一致する現実的な磁気圏トポロジーを初めて可視化する。(6)北 CP と南 CP から生成される 2 つのグローバル多様体の間の断面を取ることにより、より現実的な中立線を得る。また、中性線の尾の部分が、いわゆる磁気サッシュや S-cross-tail を形成していることを発見した。

本論文では、磁気圏トポロジーを特定し可視化する方法について議論した。我々の研究はまだ原始的なものであり、磁気圏の分岐、いわゆるオーロラサブストームを捉えるための最初のステップである。トポロジーの可視化を通じて分岐を捉えるフレームワークは、将来、非線形力学と様々な物理・工学的問題のギャップを埋めることができると期待している。

[1] Krauskopf, B., & Osinga, H. Two-dimensional global manifolds of vector fields. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 9(3), 768-774, 1999.
[2] Priest, E. R., Lonie, D. P., & Titov, V. S. Bifurcations of magnetic topology by the creation or annihilation of null points. Journal of plasma physics, 56(3), 507-530, 1996.
[3] Lau, Y. T., & Finn, J. M. Three-dimensional kinematic reconnection in the presence of field nulls and closed field lines. The Astrophysical Journal, 350, 672-691. 1990.
[4] Globus, A., Levit, C., & Lasinski, T. A tool for visualizing the topology of three-dimensional vector fields. In Proceedings of the 2nd conference on Visualization'91 (pp. 33-40). IEEE Computer Society Press, 1991.
[5] Tanaka, T., Y. Ebihara, M. Watanabe, M. Den, S. Fujita, T. Kikuchi, K. K. Hashimoto, and R. Kataoka (2017), Global simulation study for the time sequence of events leading to the substorm onset, J. Geophys. Res. Space Physics, 122, 6210–6239, doi:10.1002/2017JA024102.
[6] Haynes, A. L., & Parnell, C. E. A trilinear method for finding null points in a three-dimensional vector space. Physics of Plasmas, 14(8), 082107, 2007.
[7] Helman, J. L., & Hesselink, L. Visualizing vector field topology in fluid flows. IEEE Computer Graphics and Applications, (3), 36-46, 1991.
[8] Cai, D., Nishikawa, K. I., & Lembege, B. Visualization of tangled vector field topology and global bifurcation of magnetospheric dynamics. Advanced Methods for Space Simulations; TERRAPUB: Tokyo, Japan, 145-166, 2007.
[9] Strogatz, S. H. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. CRC Press, 2018.
[10] Helman, J., & Hesselink, L. Representation and display of vector field topology in fluid flow data sets. Computer, (8), 27-36, 1989.
[11] Wiggins, S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (Vol. 2). Springer Science & Business Media, 2003.
[12] Osinga, H. M., & Krauskopf, B. Visualizing the structure of chaos in the Lorenz system. Computers & Graphics, 26(5), 815-823, 2002.
[13] Krauskopf, B., & Osinga, H. Globalizing two-dimensional unstable manifolds of maps. International Journal of Bifurcation and Chaos, 8(03), 483-503, 1998.
[14] Palis, J., & Smale, S. Structural stability theorems. In The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2 (pp. 739-747), 2000.
[15] England, J. P., Krauskopf, B., & Osinga, H. M. Computing two-dimensional global invariant manifolds in slow–fast systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, 17(03), 805-822, 2007.
[16] Krauskopf, B., & Osinga, H. Growing 1D and quasi-2D unstable manifolds of maps. Journal of Computational Physics, 146(1), 404-419, 1998
[17] Gil, A., Segura, J., & Temme, N. M. (2007). *Numerical methods for special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
[18] Garth, C., Krishnan, H., Tricoche, X., Bobach, T., & Joy, K. I. (2008). Generation of accurate integral surfaces in time-dependent vector fields. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 14(6), 1404-1411.
[19] White, W. W., Siscoe, G. L., Erickson, G. M., Kaymaz, Z., Maynard, N. C., Siebert, K. D., ... & Weimer, D. R. (1998). The magnetospheric sash and the cross-tail S. Geophysical research letters, 25(10), 1605-1608
[20] Shub, M. (2013). *Global stability of dynamical systems*. Springer Science & Business Media.
[21] Theisel, H., Weinkauf, T., Hege, H. C., & Seidel, H. P. (2003, October). Saddle connectors-an approach to visualizing the topological skeleton of complex 3D vector fields. In IEEE Visualization, 2003. VIS 2003. (pp. 225-232). IEEE.
[22] Krauskopf, B., & Osinga, H. M. (2003). Computing geodesic level sets on global (un) stable manifolds of vector fields. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2(4), 546-569..
[23] HOBSON, Dana. An efficient method for computing invariant manifolds of planar maps. Journal of Computational Physics, 1993, 104.1: 14-22
[24] Neumann, D., & O'Brien, T. (1976). Global structure of continuous flows on 2-manifolds. *Journal of differential equations*, *22*(1), 89-110.
[25] Hultquist, J. P. (1992, October). Constructing stream surfaces in steady 3D vector fields. In Proceedings Visualization'92 (pp. 171-178). IEEE.
[26] Schneider, D., Reich, W., Wiebel, A., & Scheuermann, G. (2010, June). Topology aware stream surfaces. In Computer Graphics Forum (Vol. 29, No. 3, pp. 1153-1161). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
[27] Schulze, M., Germer, T., Rössl, C., & Theisel, H. (2012, August). Stream surface parametrization by flow-orthogonal front lines. In Computer Graphics Forum (Vol. 31, No. 5, pp. 1725-1734). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
[28] Krauskopf, B., Osinga, H. M., Doedel, E. J., Henderson, M. E., Guckenheimer, J., Vladimirsky, A., ... & Junge, O. (2006). A survey of methods for computing (un) stable manifolds of vector fields. In Modeling And Computations In Dynamical Systems: In Commemoration of the 100th Anniversary of the Birth of John von Neumann (pp. 67-95).
[29] Doedel, E. J. (1981). AUTO: A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. Congr. Numer, 30(265-284), 25-93.
[30] Henderson, M. E. (2005). Computing invariant manifolds by integrating fat trajectories. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 4(4), 832-882.
[31] Guckenheimer, J., & Vladimirsky, A. (2004). A fast method for approximating invariant manifolds. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 3(3), 232-260.
[32] Dellnitz, M., & Hohmann, A. (1996). The computation of unstable manifolds using subdivision and continuation. In Nonlinear dynamical systems and chaos (pp. 449-459). Birkhäuser, Basel.
[33] Iwai, K., Shinya, K., Takashi, K., & Moreau, R. (2003). Pressure change accompanying Alfvén waves in a liquid metal. Magnetohydrodynamics, 39(3), 245-250.
[34] W. C. Rheinboldt, Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, 2nd ed., CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 70, SIAM, Philadelphia, 1998.
[35] Hocking, John Gilbert, and Gail S. Young. Topology. Courier Corporation, 1988.