（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	臼杵　峻亮
論文題目	$\times a$ and $\times b$ empirical measures, the irregular set and entropy （a 倍 b 倍作用に関する経験測度とその不規則集合及びエントロピー）		

（論文内容の要旨）

ランクが高い作用（例えば $n \geq 2$ に対し、$\mathbb{Z}^n$ や $\mathbb{R}^n$ の作用）の中には、ランクが 1 の作用には見られない剛性を示すものがある。例えば、$a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し T_a を $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の元を a 倍する写像とすると、T_a は多くの不変閉部分集合をもつ。しかし、H. Furstenberg は乗法的に独立な $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$（すなわち、$\log a / \log b \notin \mathbb{Q}$）に対し、$T_a$ と T_b 両方に関して不変な閉部分集合は、$\mathbb{T}$ 全体か有限集合しかないということを示した。T_a と T_b によって生成される $\mathbb{T}$ 上の $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$-作用は a **倍** b **倍作用**と呼ばれる。Furstenberg はさらに、不変 Borel 確率測度に対する剛性を予想した。

予想 1 (a 倍 b 倍作用の不変測度の剛性)**.** $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が乗法的に独立であるとする。このとき、a 倍 b 倍作用で不変かつエルゴード的である $\mathbb{T}$ 上の Borel 確率測度は、Lebesgue 測度か有限周期軌道上の測度しかない。

この予想に対し、D. J. Rudolph（a と b が互いに素のとき）と A. S. A. Johnson（a と b が乗法的に独立のとき）による、次の画期的な結果がある。

定理 2 (Rudolph-Johnson の定理)**.** $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が乗法的に独立であるとし、μ を a 倍 b 倍作用で不変かつエルゴード的な $\mathbb{T}$ 上の Borel 確率測度であるとする。T_a の μ に関する測度論的エントロピー $h_\mu(T_a)$ が正である（これは $h_\mu(T_b)$ が正であることと同値である）と仮定する。このとき、μ は Lebesgue 測度である。

この結果は、予想 1 は**エントロピーが正という仮定**の下では正しいということを主張している。今日では、エントロピーが正の仮定は予想 1 に対し知られている全ての手法で必要とされ、エントロピーが 0 の不変測度に関することはほとんど分かっていない。従って、予想 1 自体は全く未解決である。

以下では、$a, b \in \mathbb{Z}^2_{\geq 2}$ は乗法的に独立であるとする。この論文では、a 倍 b 倍作用に関する**経験測度**を調べる。$x \in \mathbb{T}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対し、a 倍 b 倍作用に関する x の N-経験測度とは、

$$\delta^N_{x,\times a,\times b} = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \delta_{a^m b^n x}$$

によって定まる $\mathbb{T}$ 上の Borel 確率測度である。Birkhoff のエルゴード性定理より、μ を a 倍 b 倍作用で不変かつエルゴード的な Borel 確率測度とすると、μ に関してほとんど全ての x に対し、経験測度 $\delta^N_{x,\times a,\times b}$ は $N \to \infty$ で汎弱位相に関し μ に収束する。この論文では、経験測度に関する次の二つの問題を考える: (1) **不規則集合**はどれくらい大きいのか、(2) 経験測度 $\delta^N_{x,\times a,\times b}$ $(N \in \mathbb{N})$ がエントロピーが小さい

不変測度に集積するような $x \in \mathbb{T}$ はどれくらいあるのか。次の結果が、これらの問題に対する答えを与えるこの論文の主定理である。

定理 3 (第一の主定理)**.** J を a 倍 b 倍作用に関する不規則集合、すなわち経験測度 $\delta^N_{x,\times a,\times b}$ が $N \to \infty$ で汎弱位相に関していかなる Borel 確率測度にも収束しないような $x \in \mathbb{T}$ 全体の集合、とする。このとき、J の Hausdorff 次元は 1 である。

定理 4 (第二の主定理)**.** $0 < t < \min\{\log b, (\log a)^2/\log b\}$ に対し、K_t を経験測度 $\delta^N_{x,\times a,\times b}$ が a 倍 b 倍作用に関し不変なある Borel 確率測度 μ で、$h_\mu(T_a) \leq t$ を満たすものに汎弱位相に関して集積するような $x \in \mathbb{T}$ の集合とする。このとき

$$\dim_H K_t \leq \frac{2\sqrt{\log b}\sqrt{t}}{\log a + \sqrt{\log b}\sqrt{t}}$$

が成り立つ。

この定理 3 は、2 倍 3 倍作用に関する経験測度が Lebesgues 測度に収束しないような $x \in \mathbb{T}$ の集合の Hausdorff 次元が 0.451621 以上であるという、A. Fan、H. Queffélec と M. Queffélec による結果の改良になっている。定理 4 より、経験測度が Lebesgue 測度でも周期測度でもない不変測度に集積するような $x \in \mathbb{T}$ の集合は非常に小さく、せいぜい Hausdorff 次元 0 であることがわかる。

さらに、定理 4 と定理 2 は、a 倍 b 倍作用に関する一様分布に類する結果を導く。$0 < t \leq 1$ と $x \in \mathbb{T}$ に対し、x の a 倍 b 倍軌道 $\{a^m b^n x\}_{m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が t**-semiequidistributed** であるとは、$\mathbb{T}$ 上で $f \geq 0$ なる任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対し、

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} f(a^m b^n x) \geq t \int_{\mathbb{T}} f \ dm_{\mathbb{T}}$$

が成り立つことをいう。次の系は、Hausdorff 次元 0 のある集合を除き、全ての a 倍 b 倍軌道はある正の割合だけ semiequidistributed であることを主張している。この性質は単一の a 倍写像が全くもたない性質である。なぜなら、a 倍写像は Hausdorff 次元が 1 より真に小さい不変閉部分集合を多くもつからである。

系 5. ある $\dim_H(\mathbb{T} \setminus X) = 0$ を満たす $X \subset \mathbb{T}$ が存在し、任意の $x \in X$ に対し、x の a 倍 b 倍軌道 $\{a^m b^n x\}_{m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ はある $s = s(x) > 0$ に関し s-semiequidistributed である。

（続紙 2）

（論文審査の結果の要旨）

臼杵峻亮氏は、大学院を通じて $\mathbb{Z}^2$ が $SL(3,\mathbb{R})$ の対角部分群などの高階可換群の作用のエルゴード理論的性質に興味を持ち、それを研究してきた。$a, b \geq 2$ が乗法的に独立な整数のとき，円周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の $T_a(x) = ax$,$T_b(x) = bx$ は $\mathbb{Z} + > 0^2$ の作用を定義するが，これについては，Furstenberg による予想「T_a, T_b に関する不変測度は，Lebesgue 測度か有限個の点上のディラック測度に限る」が，多くの研究者によって注目されてきた．この予想については，Rudolph と Johnson が測度論的エントロピー $h_\mu(T_a) > 0$ という仮定の下で肯定的に解決したが，エントロピーが 0 の場合にはまだ未解決であった．

臼杵氏はその提出論文に置いて，初期点を $x \in \mathbb{T}$ とする経験分布 $\delta^N_{x,\times a,\times b} = \frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1} \delta_{a^m b^n x}$ の $N \to \infty$ での極限挙動に注目した．$\delta^N_{x,\times a,\times b}$ が $N \to \infty$ でどのような測度にも収束しないような x の集合の Hausdorff 次元は 1 であることを示し，次元の意味でこのような集合は豊富であることを示した．一方，T_a, T_b に関する不変測度は，エントロピーが $\log a$ の Lebesgue 測度かエントロピーが 0 のアトミック測度に限ることが予想されているわけであるが，もしもそれ以外に不変測度 μ が存在すると仮定したことに，$h_\mu(T_a) \leq t$ ならば，$\delta^N_{x,\times a,\times b}$ が μ に収束するような x の集合の Hausdorff 次元に関する具体的な評価を与えた．特に，Rudolph と Johnson の定理と組み合わせれば，このような初期点の集合の Hausdorff 次元が 0 となることを示した．

これらの結果は，高階可換群の経験分布の収束先の測度という観点からの定量的評価を含む新しい結果をもたらしている．さらに，この結果以外にも，最近の研究では，$SL(3,\mathbb{R})$ の対角部分群の類似の結果も得ており，それは整数論の Hardy-Littlewood 予想に関連した結果も導くことも示した．これらの研究は，高階可換群のエルゴード理論の研究に大きく寄与するものであり，今後の彼の研究の発展も大きく期待できるものである．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和 5 年 12 月 18 日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　年　　　月　　　日以降