

(続紙 1)

京都大学	博士 (理学)	氏名	許 晨光
論文題目	Interval Approximations for Fully Commutative Quivers and Their Applications (完全可換クイバーの区間近似とその応用)		
<p>(論文内容の要旨)</p> <p>本学位論文では、マルチパラメータ・パーシステントホモロジーの特徴付けの一つである区間近似に関する研究に取り組んでいる。主結果の概略は (1) 従来の区間近似の一般化、(2) 一般化することにより近似の精度と計算量を調整する部分近似の概念を導入、(3) 可換はしご型クイバーにおける新たな不変量としてconnected persistence diagramを導入、が挙げられる。</p> <p>まず本学位論文を理解する上で、パーシステントホモロジーの表現論研究についてその背景を説明する。パーシステントホモロジーは2003年のEdelsbrunner, Letscher, Zomorodianによる論文を皮切りに、様々な方向性で数学研究が進められているが、そのなかでもクイバーの表現論を用いた研究は最も注目を集めているテーマとなっている。従来の1パラメータ・パーシステントホモロジーはA型クイバーの表現とみなせ、基本的にはクイバーの表現論でよく知られているガブリエルの定理によって数学的な特徴づけは全て与えられる。例えばパーシステント図はガブリエルの定理の一つの表示法と思える。一方で実際のデータ解析の現場ではデータをマルチパラメータで解析する必要がある状況も多く、そのような設定にパーシステントホモロジーの理論を拡張することは極めて重要な問題となっている。クイバーの表現論の立場からは、マルチパラメータ・パーシステントホモロジーは多次元格子が定める関係式付きクイバー上の表現として表される。よって1パラメータのときに用いられるパーシステント図のような完全不変量がマルチパラメータの設定でも定式化できればデータ解析の問題への適用が進むことになるが、この問題は代数的に極めて難しいことが知られている。そこでこの問題を回避するために考えられる方針としては(A)表現の完全な分解を求めるのではなくなんらかの意味での近似を与える、(B)データに内在するランダム性(ノイズ)の影響を考慮して確率論的に安定な分解論を与える、の2つが考えられる。近年、浅芝等によって導入された区間近似の概念は(A)のアプローチを採用しており、与えられた表現を区間表現のみを用いて分解/近似する方法論が確立された。現在この区間近似は世界的に極めて注目されており、同時期に同様の手法が提案されていたり、様々な改良が行われていたりしている。本学位論文はこの区間近似に対して上記(1、2、3)で与えられる大幅な一般化・精密化を行うことに成功している。</p> <p>本論文は6つの章と1つの付録から構成されている。まず1章では上述したようなデータ解析の立場から見た本研究の位置付けや、クイバーの表現論と本研究に関連するこれまでの一連の研究をサーベイしている。当該研究分野の進歩は早く、また対象領域も極めて広範に及ぶため、その全貌を捉えることは容易ではないが、この章では歴史的背景や応用研究との接点などにも触れながら、分野の背景をととも見通しが良い形でコンパクトにまとめている。</p> <p>次に2章ではクイバーおよびその表現論について、本学位論文を読み進める上で必要な基礎事項がまとめられている。実際のデータ解析の設定では主に可換格子上で議論を展開することが多いが、本論文の一部結果はより一般の完全可換クイバーの設定でも成立するため、本章もその設定で説明が与えられている。またこの章にてパーシステントホモロジーをクイバーの表現論の立場から導入している。</p>			

3章以降に本論文で扱う本質的に新しい結果がまとめられている。まず3.1節において、従来の区間近似の概念を一般化する上で重要な概念となるcourseとtourが導入されている。与えられたクイバー G に対してcourse (C, F) とは連結クイバー C と頂点集合間のラベリング写像 F から構成されており、 C の有向辺が G のパスとして実現されているもので与えられる。その名前から想像できるように、調べたいクイバー G をcourse C 上で重点的に調べるために以後使われることになる。また区間 I に対する本質的なcourse C とは、 C が I に含まれておりかつ I の本質点 (sinkとsource) を全て含むものとして定義される。次に与えられたcourseに対してtourを G の表現圏から C の表現圏への関手として定める。本質的にこの定義はもとの表現をcourse上の表現に制限して調べることに対応している。またcourseとして区間上の本質的なcourseをとることで、その区間における表現について詳細な情報を引き出すことが可能になっている。この時点で浅芝等による区間近似で重要な役割を果たす「圧縮」の操作がcourseやtourを用いて一般化され、その詳しい性質が3.2節で議論されている。まず各区間に対して本質的なcourseを割り当てた上で、 G の表現に対して区間 I 上の圧縮をtour上での区間表現の重複度として与える。この一般化のもとで、定理3.24では表現が区間分解可能なクラスの時、オリジナルの重複度関数が圧縮を用いた交代和で表示できることを示している。これは組合せ論におけるメビウス反転公式を用いることで証明できる。この性質を用いて、重複度関数の近似に相当する区間近似をメビウス反転としてDefinition 3.25で与えている。以上の準備のもとにこの章の主定理はTheorem 3.29で与えられており、区間近似はランク不変の性質を有するという事実が証明されている。次に3.3節では本論文で導入した区間近似を計算量と近似の精度の観点から精密化する試みがなされている。ここでは近似に用いる区間のクラスを指定することで、部分的な区間近似を行う枠組みを提案しており、その主定理はTheorem 3.40で与えられている。この結果は従来の区間近似で得られていた結果の大幅な一般化になっており、区間近似を実データ解析に適用する上で極めて重要な成果として位置づけられる。

4章では3章の結果を可換はしご型クイバーに限定して、有限型と無限型のそれぞれにおいて議論を展開している。まず有限型の設定では、従来直既約分解を構成する際には実際の表現 (ベクトル空間の基底を固定した線型写像表示) を準備する必要があったが、これを鎖複体のレベルで計算可能なアルゴリズムを提案することに成功している。これにより直既約分解の計算時間が大幅に短縮されることになった。そのアイデアは様々なA型のcourseを整備することで、直既約表現の個数だけ独立な線型方程式を導出することである。一方で無限型の設定では、新たな不変量としてconnected persistence diagramを提案している。これはハシゴの上段と下段を通常の1パラメータパーシステントホモロジーとみなし、上下をつなぐ区間表現が近似に現れた場合にpersistence diagram上で対応する生成元間に線を引いて構成される。この概念は6章において材料科学に現れる構造解析の例を用いてその有用性が確認されている。

5、6章では各種モデルにおいて4章で準備したアルゴリズムやconnected persistence diagramなどを適用し、主に非区間表現の出現頻度を軸に数値実験を行った結果がまとめられている。そこで発見された興味深い現象としてランダム性が伴うモデルにおいては非区間表現の出現頻度は極めて稀であることが観測された。これはマルチパラメータ・パーシステントホモロジーの研究アプローチとして紹介した(B)に関係するものであり、本研究で扱った(A)のアプローチと(B)を融合させた新たな研究の重要性を示唆する結果となっている。

付録では本文内で用いられたアルゴリズムの詳細がまとめられている。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

以上の学位論文の内容に関して調査委員による審査が行われ、結果の新規性、正当性、重要性が認められた。特に本学位論文で提案された区間近似の一般化についての新規性とそこから得られた主結果 (Theorem 3.40) について、数学的な内容に問題がないことが確認された。ここで導入されたcourseとtourの概念は、現在様々なアプローチで取り組まれている区間近似の研究にも適用可能であり、その波及効果は極めて高い。本学位論文で提案した一般化によって近似の精度を制御できるようになった事実や、可換ハシゴ型クイバーでその性質を活かして導入された新たなアルゴリズムは学術的価値が十分高いことも確認した。

数学的な成果に加えて、5、6章で行われた数値実験研究でも様々な新たな知見を観測している。特に入力データがなんらかのランダム性を有する際に、非区間表現の出現頻度が稀になる現象は、極めて重要な発見であると思われる。表現論的には無限型の表現を直既約分解することはとても難しく、純粋に代数的なアプローチだけでは一般のデータ解析に適用できる方法論を開発することは難しいと考えられている。このような状況において、実際のデータ解析の現場で非区間表現の出現頻度が稀であることが確率論的に証明できれば、直既約分解ではなく本論文で提案している区間近似で十分になる。もちろん区間近似の計算は直既約分解に比べてはるかに扱いやすい。今後、本論文で得られた結果をもとに、表現論と確率論をつなげる研究が加速することが期待される。

令和6年2月1日、論文内容とそれに関連した事項について試問が行われた。調査委員からは、先行研究との詳細な比較、本学位論文で提案された手法が実データ解析でどのように応用されるか、確率論的設定の精密化、および本研究に関する将来性などについて質問が出された。許氏からはそれら全てに対して的確な回答が与えられ、口頭試問についても合格を与えられると判断した。

以上より、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと判断し、結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降