

(続紙 1)

京都大学	博士 (理 学)	氏名	松田 隼一朗
論文題目	Classification of Quantum Graphs on M_2 and algebraic characterization of properties of quantum graphs (M_2 上の量子グラフの分類と量子グラフの性質の代数的特徴付け)		
(論文内容の要旨)			
<p>量子グラフは古典グラフの非可換類似物であり、量子情報理論に触発されて導入され、作用素環論、量子群論、非可換幾何学などとの関りの中で発展してきた。当論文では2018年に導入された隣接行列および string diagram によるアプローチに基づき、string diagram の non-tracial 量子グラフへの適用、具体例として最も小さい非可換 C^*-環である 2×2 行列環 M_2 上の量子グラフの分類、正則量子グラフの連結性や二部性のスペクトルによる特徴付け、そして量子グラフの準同型の二つの概念の比較とそれによる二部性と2-彩色可能性との同値性を論じている。</p> <p>String diagram による量子グラフや量子同型の記述は tracial な場合について Musto, Reutter, Verdon により与えられていたが、Brannan らが導入した non-tracial な場合については論じられていなかった。当論文では string diagram におけるループの解消が出来ないという non-tracial な条件の下でも Musto らの記述が有効であることを示している。また、等式変形した string diagram の対称性から正值性を引き出す議論を強みとしている。</p> <p>研究開始当初は隣接行列としての量子グラフが抽象的な構成法こそあれど具体例が殆ど知られていなかったため、行列環 M_2 上のループを全て持つ無向量子グラフの隣接行列を計算し、その同型類・量子同型類を決定した。特に tracial な場合についてはそれらが正則量子グラフになり同型類が次数によって決まることも明らかにした。それらの量子グラフの量子自己同型群も決定し、tracial な場合は特殊直交群 $SO(3)$ や直交群 $O(2)$、non-tracial な場合は特殊直交群の q-変形 $SO_q(3)$ やその maximal torus である円周群 \mathbb{T} が得られている。さらにスペクトルの一致にヒントを得て、M_2 上の tracial 正則量子グラフと4点集合上の正則グラフの間の量子同型 (bigalois extension) を計算し、それらが量子同型であることと対応する量子自己同型群の monoidal 同値を導いた。</p> <p>隣接行列が導入されたため量子グラフの性質をそのスペクトルで特徴付けるのは自然な問題である。当論文では量子グラフの連結性や二部性のある古典グラフへのグラフ準同型の存在・非存在により定義し、古典グラフと同様に d-正則量子グラフの連結性は d が単純固有値であること、二部連結成分を持つことは $-d$ が固有値であることとそれぞれ同値であることを示した。また、先行研究で導入された量子グラフの局所準同型や量子準同型と当論文で定義したグラフ準同型を比較し、特に tracial 量子グラフから古典グラフへの準同型については局所準同型とグラフ準同型が一致することを示した。その系として tracial 量子グラフの二部性と2-彩色可能性の同値を示している。</p>			

(論文審査の結果の要旨)

概念が導入されて10年強、特に隣接行列が導入されてから5年という比較的新しい量子グラフ理論に対して、その構造や振る舞いを具体例や基礎的な性質から丁寧に理解・導入していこうとする、さらなる研究のための地盤を固めるような論文である。

String diagram の扱いに関しては非常に熟達しており、種々の計算や作用素の正値性の証明を図式の変形で行うなど優れた道具として使いこなしている。

具体例として最も単純な非可換 C^* -環である M_2 上の量子グラフを分類するのは自然な試みであり、量子グラフの構造について理解を深める上で為すべきことを為したと言える。Non-tracial 量子グラフを考えることで tracial 量子グラフの量子自己同型群の q -変形が得られていることはコンパクト行列量子群についての既存の結果から自然なことであり、今後より次元の大きな量子グラフの量子自己同型群として興味深い未知の量子群やその変形の族が得られれば量子グラフ理論の発展にさらに寄与できるだろう。また、当論文での量子グラフの分類はパラメータの直接計算に依るところが大きく、サイズの大きな量子グラフの計算には適さないため、より一般の場合を上手く分類する技術の開発が望まれる。また、頂点集合を固定した分類に拘らず、量子 Cayley グラフなどでの生成が期待される具体例の族を詳しく調べるという方向性もある。より実用的な具体例として、量子情報理論などの具体的な問題に由来する量子グラフを調べることも重要である。

古典グラフの勾配の概念を string diagram に翻訳することで量子グラフに一般化し、そこから Laplacian を作って次数によるスペクトルの評価を得たのは妙案であった。隣接行列による量子グラフの連結性や二部性の定義について、頂点集合を直和分解することによるナイーヴな定義では上手くいかないことに、自らが計算した M_2 上の具体例から気づき、準同型を利用したよい定義を見出だしたことは評価できる。量子グラフの隣接行列に着目したグラフ準同型と辺に着目した局所準同型の一定条件下で証明した同値性については、より一般の場合でも同値性が保たれるのか明らかにし、もし保たれないなら具体的な反例を得ることが肝要である。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和6年1月25日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。