

(続紙 1)

京都大学	博士 (理学)	氏名	大井 拓夢
論文題目	Convergence of processes time-changed by Gaussian multiplicative chaos (ガウス乗法カオスによる時間変更過程の収束について)		
(論文内容の要旨)			
<p><i>In recent years, the study of Gaussian multiplicative chaos and the associated Liouville Brownian motion has been a central focus of research in probability theory. Such models were introduced in order to understand problems arising in physics in areas such as statistical mechanics, conformal field theory and quantum gravity. Heuristically, Gaussian multiplicative chaos is a random measure constructed as the exponential of a Gaussian free field, and Liouville Brownian motion is the stochastic process given by time-changing Brownian motion by this measure. The situation in two dimensions is particularly challenging, as the Gaussian free field is log-correlated, which makes defining it and the Liouville Brownian motion somewhat non-trivial; Gaussian multiplicative chaos was first constructed rigorously by Kahane in 1985, but Liouville Brownian motion was only constructed rigorously in the last decade, see Berestycki (2015) and Garban, Rhodes and Vargas (2016). The goal of Ooi's work is to show how two-dimensional Liouville Brownian motion and the one-dimensional Liouville Cauchy process, which shares many of its characteristics, can be approximated by smooth or discrete processes. Indeed, as a fundamental example, Ooi shows how Liouville Brownian motion can be constructed as the scaling limit of two-dimensional Liouville random walk, which is a process defined on the square lattice in an analogous way. As noted, the thesis also covers a one-dimensional setting, where the process of interest is the Liouville Cauchy process. The latter object is given by a symmetric 1-stable process time-changed by a related Gaussian multiplicative chaos based on a log-correlated field. In this case, Ooi shows how the Liouville α-stable processes with α greater than 1, which are much easier to define, converge as α decreases to 1 to the Liouville Cauchy process. The main result is stated in a framework general enough to cover both of these settings simultaneously, with the key assumptions being expressed in terms of properties of the heat kernels (that is, transition densities) and Green's kernels of the underlying (non-time-changed) processes. Applying these assumptions, Ooi shows that the additive functionals describing the time-changes of the approximating processes converge in a suitable sense to those of the limit process, which is the key step to proving the main result. In order to highlight the subtlety of the problem, the thesis also provides a counterexample to show that the convergence of time-changed processes is not automatic in the case when the original stochastic processes and time-change measures converge.</i></p>			

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

本論文で大井氏は、当該分野に重要かつ時宜を得た貢献をした。特に、占有測度も極限ガウス乗法カオスも滑らかな密度を持たないことを考えると、Croydon, Hambly and Kumagai (2017)で時間変更過程の収束を導出するために用いられたような既存の手法は適用できない。つまり、大井氏はこれらの問題に関する主要な結果を導くために、新しい議論を展開しなければならなかった。確率論と数理物理学におけるリウヴィルブラウン運動や関連した確率過程の重要性を考えると、本研究は関連分野の発展に貴重で有益な貢献をしたと言える。

論文の詳細な内容に関して、議論の基本的な部分は、時間変更に対応する加法関数の収束に関するものである。この収束を示すために、大井氏はある種の二次モーメントの減衰を注意深く解析した。この手法の1つの欠点は、いわゆる L^2 領域に限定していることであり、 L^1 領域の残りの部分（ガウス乗法カオスは同様に定義できる）については本論文の主結果に含まれていない。大井氏の結果を L^1 領域全体に拡張するには大きな労力が必要となり、これは今後取り組むと良い課題の一つであると思われる。この他の将来の方向性としては、極限過程のより詳細な性質の解析、不均質な媒質の場合の考察、収束のスピードに関する定量的な評価などが考えられる。このように広範な展望が開けるのは、大井氏の研究が、彼自身によるものであれ確率論コミュニティの他の研究者達によるものであれ、将来多くの興味深い研究の発展へとつながる可能性を秘めていることを反映している。さらに、大井氏が主結果を説明するために選んだ例は自然なものであり（実際、文献で一般的に使われている様々なシミュレーションを正当化している）、この論文の結果がどの程度まで適用可能かを指し示してくれる。

結論として、大井拓夢氏の研究は技術的に新規性のある成果であると同時に、確率論の重要な分野の更なる発展への足がかりとなるものである。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和6年1月24日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降