（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	柴田　泰輔
論文題目	Embedded contact homology and its applications to 3-dimensional Reeb flows (埋め込まれた接触ホモロジーとその三次元レーブ流への応用)		

（論文内容の要旨）

柴田泰輔氏は、3次元接触多様体上の Reeb 流の周期軌道について、Embedded Contact Homology 理論 (ECH) を駆使し、優れた結果を得ている。本論文では、後の議論で必要となる ECH に関する結果を纏めた後、正の双曲的周期軌道の存在に関する結果、3次元レンズ空間は Reeb 流が素な周期軌道が全て負の双曲的軌道になる非退化な接触形式を持たないこと、3次元レンズ空間上の普遍的にタイトな接触構造と両立する Reeb 流の周期軌道が楕円型であるための条件、浅岡正幸氏との正の双曲型周期軌道が豊富に存在することを明らかにした結果などについて書かれている。以下、内容をより詳しく述べる。

多様体上の接触構造とは、余次元 1 の接分布 (接バンドルの部分束) で完全に非可積分なもの(その切断のベクトル場としてのブラケットを取ると、接バンドル全体を張る) のことである。特に余方向が向きを持つ時、1次微分形式で丁度その接分布で消えるもの (接触形式) が取れる。接触形式から Reeb ベクトル場が一意に定まり、その生成する流れが Reeb 流である。3 次元多様体上の接触構造はタイトなものと過渦なものに二分される。普遍被覆に持ち上げてもタイトなものを普遍的にタイトであるという。周期軌道に対して、接空間の return map が定まるが、Reeb 流は接触構造を保つため、その 2 次元接分布の線形自己同型を引き起こす。その固有値に 1 が含まれないとき、Reeb 流は非退化であるという。更に、全ての固有値が絶対値１のとき楕円型、正 (負) の実数の時、正 (負)に双曲的であるという。柴田氏の博士論文の初めの主結果は次の定理である。

定理 (Theorem 2.2.3) (Y, λ)を3次元閉多様体と接触形式の組で、Reeb 流が非退化なものとする。Y の第1Betti数が 0 で、(Y, λ)がちょうど２つの素な周期軌道を持つレンズ空間ではないとする。この時、１つでも楕円型周期軌道が存在すれば、正の素な双曲型周期軌道が存在する。

この定理を証明するために、柴田氏は ECH の様々な事実 (ECH capacities の Weyl law, ECH の境界準同型や U-map の構成に現れる正則曲線の無限遠での漸近挙動に関する制約など) を用いるのみならず、以下に述べる新しい論法を導入した。U-map はいかなる周期軌道に乗っていない1点を取り、そこを通る正則曲線で然るべき条件を満たすものを数えることで構成される。柴田氏は、その点を周期軌道に近づけたときの正則曲線の分裂の仕方、特に無限遠での漸近挙動を精査した。その考察や、ECH複体の生成元の周期 (作用汎函数の値) についての細かい議論などを用いて、正の双曲的軌道が存在しないと仮定して矛盾を導いた。この結果は、Cristofaro-Gardiner,Hutchings, Pomerleano の予想を、楕円型周期軌道の存在の仮定の下に肯定的に答えるものである。

3次元レンズ空間については、次の結果を得ている。

定理 (Theorem 2,2.5) L(p,q) で p が奇数のものは、Reeb 流が非退化な接触形式で全ての周期軌道が負の双曲的になるものは存在しない。

この定理の証明は、結論を否定すると、L(p,q) の普遍被覆空間である3次元球面に L(p,q) の Reeb 流を引き上げて、上と下の ECH の生成元や U-map の比較をすることで矛盾が導かれるというものである。証明では、ECH ホモロジーとあるタイプの monopole Floer ホモロジーは U-map も含めて同型となること、レンズ空間の monopole

Floer ホモロジーが U-map も含めて簡明な記述を持つことが有効に使われている。この議論も新奇性があり、興味深いものである。
力学系の研究で global surface of section は重要な対象である。L(p, p-1) 上の強凸性あるいは非退化で力学的凸性を持つ接触形式の Reeb 流に対し、円盤型の global surface of section があり、それがページとなる有理型の open book 分解が得られることが証明されている (Corollary 3.2.4) 。p が小さい場合 (2,3,4,6)には第１ECH capacity についての評価も得ている。また3次元レンズ空間の周期軌道が楕円型となるための条件が Theorem 3.2.7 で得られている。
Section 3.2.3 では浅岡正幸氏との共同研究で得られた次の定理が含まれている。
定理 (Theorem 3.2.17) λを L(p,q) 上の普遍的タイトな接触構造を与える接触形式とする。その Reeb 流が円盤型の Birkhoff section を持ち、３つ以上の素な周期軌道を持つならば、無限個の素な正の双曲型周期軌道を持つ。
これまで、2個か無限個の素な周期軌道を持つという結果(Hofer, Wysocki,Zehnder) はあったが、正の双曲型などの性質を課した類似の結果はなかった。証明は、円盤の面積保存写像に関する主張に帰着させ、それを示すことでなされた。この結果も新しい研究の方向を拓いたものである。

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

上記の Theorem 2.2.3 は、楕円型周期軌道が少なくとも２つある場合は、ECH capacities の Weyl law と呼ばれる性質と、ECH 複体の生成元の作用汎函数の値に関する精緻な議論による。ECH capacities の Weyl law を用いて、これまでにも優れた応用がなされてきたが、柴田氏の議論はそれらとは異なり、新しいものである。楕円軌道が１つの場合の議論は、それ以上に込み入ったものでオリジナリティが非常に高い。レンズ空間の場合の研究も、普遍被覆空間への持ち上げと被覆変換の対称性を巧みに用いたもの、有理的 open book 分解のトポロジーを援用した議論、Franks の定理の変種の研究（浅岡氏との共同研究）など多岐にわたる。以上のように、柴田泰輔氏の博士論文は、ECH 理論としても新しい手法を開発し、それを緻密な議論を経て Reeb 流の周期軌道の存在問題に応用した価値あるものである。得られた諸結果は、3次元 Reeb 流の研究に新しい知見をもたらした。ECH 理論の創始者の Hutchings 氏からもその新奇性、意義は認められている。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値のあるものと認められる。

また令和６年１月１９日、論文に関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降