（ 続紙 1 ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	中田　哲
論文題目	Local operators in topos theory and separation of semi-classical axioms in intuitionistic arithmetic （トポス理論における局所作用素と直観主義算術における準古典的公理の分離）		

（論文内容の要旨）

本論文は、数学基礎論（とくに構成的数学）とトポス理論に関わるものである。具体的には、直観主義算術のモデルとしてトポスを取り上げ、各トポスの局所作用素に注目することで、準古典的公理の分離可能性を論じている。

まず背景であるが、直観主義算術上の弱い公理達に関する研究は、計算可能性理論との結びつきを強めながら現在も盛んに進められている。中でもAkama達が**準古典的公理**と呼ぶΣ_n-DNE、$\Pi_n\vee\Pi_n$-DNE、Π_n-LEM、Σ_n-LEMは、様々な論理的原理の強さと対応する事が知られており最も基本的である（nは任意の自然数、DNEは二重否定除去律、LEMは排中律を表す）。先行研究（Akama, Berardi, Hayashi, Kohlenbach 2004）では、**実現可能性解釈**と呼ばれる計算論的手法により準古典的公理達がそれぞれ同値でない事、即ち分離できる事が示されている。一方で（Hyland 1982）や（van Oosten 1996）等により、実現可能性解釈の一部がトポス理論における**局所作用素**（あるいはLawvere-Tierney位相）を用いて表現できる事が明らかにされている。トポスEの局所作用素はEの部分トポスと一対一に対応するので、このことは準古典的公理の分離問題とEの部分トポス構造の関係を示唆するといってよい。

以上の背景のもと、本論文では与えられた（自然数対象つき）トポスと算術の論理式について、**最小稠密作用素**と呼ばれる特別な局所作用素の存否を論じている。この概念の重要性は、あるトポスにおいて2つの公理の最小稠密作用素が異なれば、それらの分離が自動的に従うという点にある。

第1節の導入、第2節の準備に続き、第3節では一般のトポスにおいて論理式が最小稠密作用素を持つための十分条件を系統的に調べている。結果として、次の存在定理が示される。

定理1. 自然数対象を持つ任意のトポスにおいて、全ての準古典的公理は最小稠密作用素を持つ。

続く第4節では、前節で確立した一般論を**実効トポスEff**に適用し、最小局所作用素を具体的に計算している。なお、Effにおける非退化な局所作用素はすべて稠密なので、稠密性は無視してよい。Effには、Turing次数dに相対化した実現可能性解釈（d-実現）やLifschitz実現と対応した局所作用素が存在する事がよく知られている。この言葉で準古典的公理の最小局所作用素を言い表すと次のようになる。

定理2. nを自然数とし、$\varnothing^{(n)}$は空集合のn回Turing jumpに対応する次数を表すとする。この時、実効トポスEffにおいてΠ_n-LEM、Σ_n-LEM、Σ_{n+1}-DNEの最小局所作用素は$\varnothing^{(n)}$-実現の局所作用素と一致する。また、$\Pi_{n+1}\vee\Pi_{n+1}$-DNEの最小局所作用素は$\varnothing^{(n)}$ に

相対化したLifschitz実現の局所作用素と一致する。

特にEffにおいては、例えばΣ_n-DNEとΣ_{n+1}-DNE、$\Pi_n \vee \Pi_n$-DNEの最小局所作用素がそれぞれ異なることになる。それ故、この定理は（Akama et al. 2004）の分離結果の一部を直ちに導く。第5節では、最小局所作用素が一致する公理群について次の否定的結論が述べられる。

系3. 任意の自然数nについて、Π_n-LEM、Σ_n-LEM、Σ_{n+1}-DNEは実効トポスの部分トポスを用いては決して分離する事ができない。

このように最小稠密作用素は、トポスに基づく公理の分離可能性をある意味で特徴付けるといえる。系3の帰結としてΠ_n-LEM、Σ_n-LEM等の分離には実効トポスだけでは不十分であり、それ以外のトポスを取り上げる必要がある。この点について将来の展望が述べられ、本論文は幕を閉じる。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は以下の点で評価に値する。

・第3節では、論理式の最小稠密作用素という概念が新たに提案されている。いくつかの事例は先行研究の中に見られるものの、系統立てて一般論を展開したのは本論文が初めてである。論理式φは与えられたトポスEの中で最小稠密作用素を持つとは限らないが、もし持つならば、それはφを満たすEの稠密部分トポスを完全に決定する。したがって、2つの公理の強さが異なることを示すには、両者の最小稠密作用素が異なることを示せばよい。このように有用な概念を導入し、系統的に調査した点は評価できる。
・以下トポスEは自然数対象を持つものとし、その中で算術の論理式を解釈することを考える。定理1を示す際に中心となるのは、論理式の**透過性**と**稠密性**である。これらは（van Oosten 1996）のアイデアを再構成することで得られた概念であるが、元のアイデアと比べて一般性があり、わかりやすく、よい見通を与えてくれる。実際、透過性と稠密性の絡み合いを通して広範なクラスの論理式が最小稠密作用素を持つと示すことができる。定理１は、この議論をEの部分トポスに繰り返し適用することで得られる。証明は透過性と稠密性の相互作用、Joyalの補題およびvan Oostenの補題の綿密な分析に基づくものであり、決して自明ではない。
・第4節では、最小稠密性のアイデアが実効トポスEffに適用される。（Hyland 1982）の結果により、すべてのTuring次数にはEffの局所作用素が対応する。逆に言えば、Effの局所作用素は**「一般化された」Turing次数**と見なすことができる。そこで問題となるのは、定理1で存在が保証された最小局所作用素たちが具体的にどの（一般化された）Turing次数に対応するかである。定理2は、この問題に完全な解決を与えるものである。結果は非自明であり、とくにnが2以上の場合の証明には工夫が凝らされている。

・定理2の意義は、（Akama et al. 2004）の結果の一部にトポス理論的な裏付けを与える点にある。Akamaらは、準古典的公理を分離するのにさまざまな実現可能性解釈を用いている。言い換えれば、各々の準古典的公理に実現可能性解釈を対応させている。また他の先行研究により、後者にはEffの局所作用素が対応させられている。本論文は、準古典的公理の最小局所作用素を具体的に計算することで、準古典的公理・実現可能性・局所作用素の三者関係をさらに確固たるものとしている。

・定理2のもっとも重要な帰結は系3である。この結果は、Eff（の部分トポス）による準古典的公理の分離には限界があることを示している。このような「**分離不可能性**」を厳密に述べられる点がトポス理論的アプローチの強みであり、本研究が正しい方向に向かっていることを示唆している。さてEffだけでは限界があるので、分離を完全に成し遂げるためには、Eff以外のトポスを考える必要がある。ここで活きてくるのが第3節の一般論である。第3節の結果は実効トポス以外にも、層トポスや実現可能性トポスなど（自然数対象を持つ）任意のトポスに当てはまる。したがって今後の研究の土台を与えるという点で重要である。実際中田氏は公開講演会において、本論文に基づく今後の展望について熱意を込めて語っている。

まとめると、本論文は数学基礎論、とくに構成的数学の文脈でトポス理論的手法を用いるという点で興味深い。先行研究に基づくため必ずしも驚くべき成果というわけではないが、理論展開はエレガントであり、結果の一部には汎用性がある。最小稠密作用素についての一般論、透過性・稠密性に基づく存在証明の手法、（一般化された）Turing次数との対応づけなどは構成的数学や計算可能性理論の文脈で十分な意義を持つ。とくに系3で示された（Effの部分トポスによる）分離不可能性は新規性のある結果であり、大いに評価できる。将来的に、この種の結果が他のトポスや準古典的公理についても示されるのではないかと期待できる。

以上の理由により、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和6年1月23日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　令和　　年　　月　　日以降