

(続紙 1)

京都大学	博士 (情報学)	氏名	渡辺 聡美
論文題目	Random walk on uniform spanning tree and loop-erased random walk (一様スパニングツリーとループ除去ランダムウォークの上のランダムウォーク)		
(論文内容の要旨) 拡散現象に関する数学的な研究はユークリッド空間上の解析に端を発し、フーリエ解析をはじめとする様々な手法が確立された。一方で1960年代以降、物理学者により高分子や結晶、多孔質等の複雑な媒質の上での拡散は、一様な空間とは本質的に異なるという考察がなされた。このような不均一な媒質上の拡散現象を扱う数学モデルの一つが、ランダム媒質上のランダムウォークである。無秩序に見えるランダム媒質が高い確率で満たす性質を調べることや、その上のランダムウォークの拡散に関する種々の量を評価することにより拡散現象の描像を与えることが、その目標となる。 本論文で扱うランダム媒質は3次元格子上一様スパニングツリー(uniform spanning tree、以下UST)、および空間5次元以上の高次元格子上のループ除去ランダムウォーク(loop-erased random walk、以下LERW)の軌跡によって与えられるグラフという二種類のランダムグラフであり、それらの上のランダムウォークを考察している。USTは多くの確率モデルと密接な関係を持つ重要な対象であり、その研究は有効抵抗との関係を述べた有名なKirchhoffの公式まで遡る。また最近ではSchramm(2000年)によるSchramm-Loewner evolutionの発見のきっかけを与え、現在でも研究が盛んに行われている。しかしながら、共形不変性が有効に働く2次元の場合や平均場理論を適用できる4次元以上の場合とは対照的に、3次元USTは解析が極めて困難であり、理解の進んでいない部分が多く残されている。例えば、3次元USTのスケール極限の存在は証明されているが、極限の記述や諸性質に関しては不透明な部分が多く、このことは本論文で扱う解析においても大きな障害となっている。LERWはランダムウォークのパスからループを取り除いて得られるself-avoidingなパスである。USTの枝はLERWで与えられることが示されており、この事実は本論文では重要な役割を果たしている。 具体的には、本論文では次の三つの事項に関する結果を得た。 (I) 3次元UST上を走るふたつのランダムウォークの衝突回数の定量評価 (II) 3次元UST上を走るランダムウォークの熱核の振動現象 (III) 高次元LERWの軌跡の上を走るランダムウォークの熱核評価 グラフの上を走るふたつの独立なランダムウォークの衝突回数の期待値は、グリーン関数を用いて評価できる。また、グリーン関数はグラフの有効抵抗を用いて記述される。従って、主結果(I)を得るには、3次元UST上の有効抵抗の評価を行う必要があるが、その際に重要な役割を担うのがbackboneと呼ばれる原点と無限遠を結ぶUST上のパスである。このようなパ			

スは唯一つ存在することが知られており、3次元USTはbackboneに無限個の有限部分木（これをdangling endという）を付け加えることで構成できる。本論文では、有効抵抗の評価を行う際にdangling endが大きな影響を及ぼさないことに着目し、ランダムウォークの衝突回数に関する定量評価を得ている。その帰結として、3次元UST上を走るふたつのランダムウォークは無限回衝突するという結論を導き出した。

第二の成果(II)では、3次元UST上のランダムウォークについて、熱核の対角成分が主要項のまわりで二重対数のオーダーの振動を示すことを証明した。このような振動は、ランダムグラフにおいて`典型的`とされる幾何学的性質から大きく外れた挙動を示す事象によって引き起こされると考えられている。3次元USTに対して本論文で考察した事象の一例を挙げると、backboneを強引に螺旋状に動かすことにより、backboneが遠くに移動するまでに通常よりも長い時間がかかるような事象を考えている。このような事象の上では、3次元USTのintrinsic ballの体積はその期待値と比べて大幅に減少する。この体積評価と有効抵抗の評価を組み合わせることによって熱核の振動現象を示した。

第三の成果(III)において、高次元LERWの軌跡によって与えられるランダムグラフ上のランダムウォークに対する熱核の非対角成分のannealedな評価を与えた。空間の次元が5以上の場合、ループを切り取る前のランダムウォークはあまり自己交叉を行わないので、LERWは元々の（ループを切り取る前の）ランダムウォークと似た性質を持つ。目標となる熱核の非対角成分の評価を得るためには、高次元LERWに対するlocal central limit theorem (LCLT) に相当する結果が必要となるが、このこと自体は未解決問題と考えられている。これに代わって、主結果(III)においては、時間に関して平均を取った弱い形でのLCLTを証明し、それを利用して目標となる熱核評価を与えるに至った。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

本論文では、3次元USTおよび高次元LERWの軌跡の上のランダムウォークに関する極めて精密な複数の結果を導出している。いずれの結果も証明のアイデアは自然なものであるが、それを厳密に示そうとすると（特に3次元USTに関する結果に対しては）極めて膨大かつ煩雑な計算を遂行しなければならない。こうした苦労を避けることができないのは、スケール極限の特徴付けが未解決であることを筆頭に、必要となる3次元USTの情報が著しく不足していることに起因している。さらに、ランダム媒質の性質を明確にすることだけでなく、その上のランダムウォークの解析を行うためには、確率論に留まらない分野横断的な知識が要求される。こうした状況の中、申請者は一つ一つの細かなステップを丁寧に処理し、それを積み重ねることで結果を得るに至った。長い解析の道のりを乗り越えて目標を達成できる申請者の数学的技量・忍耐は学位基準を大きく上回るもので、研究者としてすでに高い水準にあるといえる。また、本論文におけるUSTやLERWに対する研究は、より広いクラスのランダム媒質を扱う理論を構築するための第一歩であるとも考えることができ、その学術的価値は高い。よって本論文は博士（情報学）の学位基準を超えた内容の学位論文として価値のあるものと認める。また、令和6年2月16日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った。研究背景を踏まえた学識高い内容のもので、質疑応答にも的確に答えている。以上を踏まえて、試問は合格と認めた。なお、本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。