Finite homogeneous quandles from group theoretical point of view

山口大学大学院創成科学研究科　栗原 大武
Hirotake Kurihara
Department of Applied Science, Yamaguchi University

1　序

本稿の内容は東谷 章弘氏（大阪大学）との共同研究に基づくものである．

カンドルの概念は元々 Joyce [6] によって結び目理論の文脈から導入された．集合 Q と Q 上の二項演算 $*\colon Q \times Q \to Q$ の組 $(Q, *)$ が**カンドル**とは以下の条件を満たすことである：

(Q1) $x * x = x$ for $\forall x \in Q$;

(Q2) for $\forall x, y \in Q$, $\exists! z \in Q$ such that $z * y = x$;

(Q3) for $\forall x, y, z \in Q$, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

上記の 3 つの公理は結び目理論における Reidemeister 変形にそれぞれ対応する．一方でこの公理を対称空間論の類似としてとらえなおすこともできる．$(Q, *)$ をカンドルとするとき，$x \in Q$ における**点対称** $s_x : Q \to Q$ を $s_x(y) = y * x$ により定める．すると (Q1)∼(Q3) は以下のように言い直すことができる：

(Q1') $s_x(x) = x$ for $\forall x \in Q$;

(Q2') for $\forall x \in Q$, s_x は Q 上の全単射写像;

(Q3') $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ for $\forall x, y \in Q$.

対称空間は (Q1')∼(Q3') を満たすことが知られているので，対称空間はカンドルである (cf. [6])．対称空間論の立場からのカンドルの研究も多くあり (例えば [5, 7, 9] など)，これらの研究では特に**等質カンドル**が主な研究対象である．等質カンドルの定義や性質は 3 節で扱う．

カンドルは特別な二項演算をもつ集合であり，同じ二項演算をもつ群と似た性質もあればそうでない場合もある．本稿では，特に群に "近い" 性質をもつ**一般化アレキサンダーカンドル**について，様々な性質を調べた結果を記載する．一般化アレキサンダーカンドルは群 G と G の自己同型写像 ψ の組 (G, ψ) から得られる (定義は 3.2 節で与える)．一般化アレキサンダーカンドルについての大きな問題として，問 3.3 が考えられる．この問いに関して，Higashitani–Kurihara [3] では G が対称群 $\mathfrak{S}_n$ のとき n が小さい場合の一部解決を与えた．さらに [3] の後続の Higashitani–Kurihara [4] では，条件 (P1), (P2) を導入し，条件 (P1), (P2) を満たす一般化アレキサンダーカンドルのクラスに対しては，二つのカンドルがカンドル同型であるための必要十分条件を与えることができた．さらにこの必要十分条件を用いていくつかの系を得ることができた．

本稿の内容は Higashitani–Kurihara [3, 4] の結果のまとめと，つい最近得られた結果の紹介である．

2　準備

以降では，カンドルの演算 $*$ の代わりに点対称の記号 s を用いて，カンドルを (Q,s) のように表す．また点対称 s を省略して，カンドルを単に Q と書くこともある．

2.1　カンドルの記号の準備

(Q,s) と (Q',s') をカンドルとする．写像 $f:Q\to Q'$ が以下の条件を満たすとき，f を**カンドル準同型写像**と呼ぶ：

$$f\circ s_x = s'_{f(x)}\circ f \quad \text{for any } x\in Q.$$

さらにカンドル準同型 f が全単射であるとき，f を**カンドル同型写像**と呼ぶ．もし Q と Q' の間にカンドル同型写像が存在するとき，Q と Q' は**カンドル同型**であるといい，$Q\cong_{\mathrm{qu}} Q'$ で表す．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q,s)$ (もしくは単に $\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q)$) を (Q,s) 上のカンドル自己同型写像の集合とし，これを (Q,s) の**カンドル自己同型群**と呼ぶ．カンドルの公理 (Q2'), (Q3') から $s_x\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q)$ であることがわかる．$\mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q,s)$ (もしくは単に $\mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q)$) を $\{s_x : x\in Q\}$ で生成される $\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q)$ の部分群とし，これを (Q,s) の**カンドル内部自己同型群**と呼ぶ．

2.2　群の記号の準備

G を単位元 e をもつ群とする．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ を G の自己同型群とする．2 つの群 G,G' が同型のとき，$G\cong_{\mathrm{gr}} G'$ で表す．

$g,h\in G$ に対して，$g^h = hgh^{-1}$ と書くことにする．$g\mapsto g^h$ のことを G の h に関する**内部自己同型**といい，$\mathrm{Inn}_{\mathrm{gr}}(G)$ を G の**内部自己同型群**とする．$\psi\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ が**外部自己同型写像**とは，$\psi\notin\mathrm{Inn}_{\mathrm{gr}}(G)$ であることとする．

$\psi\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ に対して，

$$\mathrm{Fix}(\psi,G)=\{g\in G:\psi(g)=g\}$$

とおく．なお，$\mathrm{Fix}(\psi,G)$ は G の部分群であり，特に ψ が内部自己同型，つまり $\psi=(\cdot)^g$ と書けるときには，$\mathrm{Fix}((\cdot)^g,G)$ は g の中心化群 $C_G(g)$ と一致する．

3　等質カンドル

3.1　等質カンドルとカンドル三つ組

Q をカンドルとする．Q に $\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q)$ が推移的に作用するとき，Q を**等質**であるという．またもっと強い条件として，Q に $\mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q)$ が推移的に作用するとき，Q を**連結**であるという．

定義 3.1 ([5, Definition 3.1])**.** G を群として，K を G の部分群とする．また $\psi\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ とする．これらが $K\subset\mathrm{Fix}(\psi,G)$ を満たすとき，三つ組 (G,K,ψ) を**カンドル三つ組**と呼ぶ．

等質カンドル (Q,s) からカンドル三つ組を得ることができる．$G=\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q,s)$ とし，$x\in Q$ を一つ固定して $K=\{f\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q,s): f(x)=x\}$ とおく．さらに $\psi: G\to G$ を $f\mapsto s_x\circ f\circ s_x^{-1}$ で定めると，(G,K,ψ) はカンドル三つ組になる．上記の証明は例えば [5, Proposition 3.3] などを参考にしていただきたい．

逆にカンドル三つ組 (G,K,ψ) から以下のようにして等質カンドルを得ることができる：$G/K=\{[g]:g\in G\}$ を G の K による左剰余空間を表すことにして，G/K 上に点対称を

$$s_{[g]}([h]):=[g\psi(g^{-1}h)]\quad([g],[h]\in G/K)$$

によって定めるとこれはwell-definedであり, カンドルの公理を満たす．さらにこのカンドル $(G/K,s)$ は等質である．上記の証明は例えば [5, Proposition 3.2] などを参考にしていただきたい．今後このカンドルを $Q(G,K,\psi)$ で表すことにする．

3.2　一般化アレキサンダーカンドル

前節の K を $\{e\}$ として取ると，どのような G と ψ に対しても，$(G,\{e\},\psi)$ は必ずカンドル三つ組になる．これから得られる等質カンドルは $Q=G$ であり，点対称は

$$s_g(h)=g\psi(g^{-1}h)\quad\text{for any } g,h\in G$$

となる．このカンドルを**一般化アレキサンダーカンドル**と呼び，$Q(G,\psi)$ で表す．なお G がアーベル群のとき，**アレキサンダーカンドル**と呼ばれている．

等質カンドルの研究には，以下の命題から一般化アレキサンダーカンドルを調べることが重要であると思われる．

命題 3.2 (Higashitani–K. [3])**.** $\psi,\psi'\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ とし，$K=\mathrm{Fix}(\psi,G)$，$K'=\mathrm{Fix}(\psi',G)$ とする．もし $Q(G,\psi)\cong_{\mathrm{qu}}Q(G,\psi')$ ならば，$Q(G,K,\psi)\cong_{\mathrm{qu}}Q(G,K',\psi')$ である．

証明は [3] を参考にされたい．

有限群 G に対して，$\mathcal{Q}(G)$ を $Q(G,\psi)$ の同型類の集合とする．つまり，

$$\mathcal{Q}(G):=\{Q(G,\psi):\psi\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)\}/\cong_{\mathrm{qu}}$$

とする．以下の問題が本稿の主題である．

問題 3.3. 与えられた G に対して，$\mathcal{Q}(G)$ を決定せよ．

以下の命題は $\mathcal{Q}(G)$ を大雑把に把握するのに役に立つ．

命題 3.4 (Higashitani–K. [3])**.** $\psi,\psi'\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ は共役とする．つまり $\psi'=\tau\circ\psi\circ\tau^{-1}$ となる $\tau\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ が存在すると仮定する．このとき，$Q(G,\psi)\cong_{\mathrm{qu}}Q(G,\psi')$ が成り立つ．

したがって $\mathcal{Q}(G)$ は $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ の共役類の集合と同じになるかということが気になる．しかし，そうはならない例が存在する．C_n を位数 n の巡回群とする．Nelson [8] はアレキサンダーカンドルに対してのカンドル同型写像の必要十分条件を与えた．特に $\mathcal{Q}(C_n)$ を初等整数論の言葉で分類した．以下で $\mathcal{Q}(C_n)$ について説明する．まず $\mathrm{Aut}(C_n)\cong_{\mathrm{gr}}U(C_n)$ であることが知られている．ただし，$U(C_n)=\{x\in C_n: x\text{ is coprime to }n\}$ であり，$a\in U(C_n)$ に対して，$x\mapsto ax$ によって C_n 上に自己同型が定まる．この a に関するアレキサンダーカンドルを $Q(C_n,\times a)$ で表す．$N(n,a)=\frac{n}{\gcd(n,1-a)}$ とおくとき，$Q(C_n,\times a)\cong_{\mathrm{qu}}Q(C_n,\times b)$ の必要十分条件は $N(n,a)=N(n,b)$ かつ $a\equiv b\pmod{N(n,a)}$ である．つまり，$\mathcal{Q}(C_n)$ は完全に特徴づけられている．

例えば，$Q(C_9,\times 4)\cong_{\mathrm{qu}}Q(C_9,\times 7)$ である．一方で，$U(C_n)$ は可換群だから，$U(C_n)$ の共役類は $U(C_n)$ 自身である．したがって，この例は $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(C_n)$ の共役類と $\mathcal{Q}(C_n)$ は一対一に対応しないことを示している．

問題 3.3 の解決に向けて，等質カンドルや，その中でも $Q(G,\psi)$ の不変量をいくつか紹介する．以降群はすべて有限群であることを仮定する．以下では，命題 3.4 や [3] に記載しているいくつかの不変量を少し一般化した形で紹介する．

定理 3.5 (cf. Higashitani–K. [3])**.** G, G' を有限群とし，$\psi \in \mathrm{Aut}(G)$，$\psi' \in \mathrm{Aut}(G')$ とし，$Q = Q(G,\psi)$, $Q' = Q(G',\psi')$ とする．

(a) $\tau \circ \psi = \psi' \circ \tau$ をみたす群同型写像 $\tau\colon G \to G'$ が存在するならば，$Q \cong_{\mathrm{qu}} Q'$ が成り立つ．

(b) もし $Q \cong_{\mathrm{qu}} Q'$ ならば以下が成り立つ．

- $|G| = |G'|$;
- $\mathrm{ord}_{\mathrm{Aut}(G)}\,\psi = \mathrm{ord}_{\mathrm{Aut}(G')}\,\psi'$;
- $|\,\mathrm{Fix}(\psi, G)| = |\,\mathrm{Fix}(\psi', G')|$;
- $\mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q')$;
- $Q(G,\psi^i) \cong_{\mathrm{qu}} Q(G',\psi'^i)$ for any $i \in \mathbb{Z}_{>0}$.

[3] では対称群 $\mathfrak{S}_n$ に対しての問題 3.3，つまり $\mathcal{Q}(\mathfrak{S}_n)$ の分類を主題とした．定理 3.5 や $\mathfrak{S}_n$ 独自の理論を用いて以下の結果を得た．

定理 3.6. $2 \le n \le 30$, $n \neq 15$ となる任意の整数 n に対して，$\mathcal{Q}(\mathfrak{S}_n)$ と $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathfrak{S}_n)$ の共役類集合の間に一対一対応がある．

なお，$n = 15$ で $\mathcal{Q}(\mathfrak{S}_{15})$ が分類できない理由は型が $(9, 3^2)$ と $(9, 3, 1^3)$ に対応する内部自己同型写像から得られる一般化アレキサンダーカンドルたちが定理 3.5 の不変量だけでは見分けられないからである．また $\mathfrak{S}_n$ 独自の不変量として，とある両側コセットの要素数があるが，これが $n > 30$ 以上だと計算機でも計算が終わらないため，定理 3.6 では $n \le 30$ の要請をしている．

定理 3.6 については，4 節の系 4.4 で再度ふれる．

4　単位連結成分 P

G を有限群とし，$\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ を恒等写像でないものとする．また $Q = Q(G,\psi)$ とする．このとき，$P = P(Q)$ を $\mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q)$ による単位元 e の軌道とする．つまり，

$$P = \{x \in G : \exists a_1, \ldots, a_r \in G \text{ s.t. } x = s_{a_1} \circ \cdots \circ s_{a_r}(e)\}$$

とする．ここでは P を Q の**単位連結成分**と呼ぶことにする．P は問題 3.3 を解くうえで重要であり，[4] では以下の結果を得ることができた．

定理 4.1 (Higashitani–K. [4])**.** P について以下が成り立つ．

(a) P は G の正規部分群であり，$\psi|_P$ は P 上の自己同型写像である．

(b) $Q(P, \psi|_P)$ は Q の部分カンドルになる．

定理 4.2 (Higashitani–K. [4])**.** G, G' をそれぞれ単位元 e, e' をもつ有限群とする．$\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$, $\psi' \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G')$ に対して，$Q = Q(G,\psi)$, $Q' = Q(G',\psi')$ とおく．また $P = P(Q)$, $P' = P(Q')$ とおく．$Q(G,\psi) \cong_{\mathrm{qu}} Q(G',\psi')$ を仮定し，$f : Q(G,\psi) \to Q(G',\psi')$ を $f(e) = e'$ であるようなカンドル同型写像とする（このような f は必ず存在する）と次が成り立つ．

(a) $f|_P$ は P と P' の間のカンドル同型写像である．したがって $P \cong_{\mathrm{qu}} P'$ である．

(b) $f|_P$ は P と P' の間の群同型写像である．したがって $P \cong_{\mathrm{gr}} P'$ である．

(c) $\psi' \circ f|_P = f|_P \circ \psi$ が成り立つ．

系 4.3 (Higashitani–K. [4])**.** G が有限単純群のとき，$\mathcal{Q}(G)$ と $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ の共役類集合の間に一対一対応がある．

さらに系 4.3 を用いれば，[3] の主結果（定理 3.6）は一般の n の場合に拡張され，対称群に対しての問 3.3 は完全に解決される．

系 4.4 (Higashitani–K. [4])**.** 任意の 2 以上の整数 n に対して，$\mathcal{Q}(\mathfrak{S}_n)$ と $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathfrak{S}_n)$ の共役類集合の間に一対一対応がある．

5　条件 (P1) と (P2)

この節では，条件 (P1), (P2) を導入し，この条件をみたす一般化アレキサンダーカンドルについて考察する．詳細は [4] にある．

まずは一般化アレキサンダーカンドルのカンドル内部自己同型群の構造を P を用いて記述する．以下の命題 5.1, 5.2 は [3] で対称群の場合に示された結果の一般化となっている．

命題 5.1 (Higashitani–K. [4])**.** $Q = Q(G,\psi)$ に対して，$P = P(Q)$，$m = \mathrm{ord}_{\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)}(\psi)$ とおく．このとき，

$$\mathrm{Inn}_{\mathrm{qu}}(Q) \cong_{\mathrm{gr}} P \rtimes_\phi C_m$$

が成り立つ．ただしこの半直積 $\rtimes_\phi$ は $\phi : C_m \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(P)$, $i \mapsto \psi|_P^i$ から定まるものとする．

命題 5.1 は Bonatto [2] でも本質的に同じ結果が得られていることに注意する．

命題 5.2 (Higashitani–K. [4])**.** さらに，もし P の中心が自明ならば，次が成り立つ：

- $\psi|_P \in \mathrm{Inn}_{\mathrm{gr}}(P)$ ならば，$P \rtimes_\phi C_m \cong_{\mathrm{gr}} P \times C_m$;
- $\psi|_P \notin \mathrm{Inn}_{\mathrm{gr}}(P)$ ならば，$P \rtimes_\phi C_m \not\cong_{\mathrm{gr}} P \times C_m$.

なお次の命題は [4] では述べていなかったが，定理 4.1, 4.2 を用いれば容易に示せる．

命題 5.3 (cf.Andruskiewitsch–Graña [1], Bonatto [2])**.** $Q = Q(G,\psi)$ が連結（つまり $P = G$）ならば，

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{qu}}(Q) \cong_{\mathrm{gr}} G \rtimes_\phi C_\psi(\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G))$$

が成り立つ．ただし $C_\psi(\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)) = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G) : f \circ \psi = \psi \circ f\}$ とし，半直積 $\rtimes_\phi$ は $C_\psi(\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G))$ が G に自然に作用するものとする．

次に今回の主結果に用いられる条件 (P1), (P2) について説明をする．$P(Q) = Q(P, \psi|_P)$ は一般化アレキサンダーカンドルなので，$P^2 := P(P(Q))$ を定義することができる．P^2 に関して以下の二つの条件を考える．

(P1) P^2 は G の正規部分群である．

(P2) $P^2 = \{s_p(e) : p \in P\}$ が成り立つ．

注意 5.4. 一般的には (P1), (P2) は成り立たない．さらに (P1), (P2) は独立な条件であることが以下の例からわかる．8 元数群 Q_8 上の位数 3 の自己同型写像 ψ から得られる一般化アレキサンダーカンドル $Q(Q_8, \psi)$ は，(P1) は満たさないが，(P2) は満たす．一方で，$G' = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ 上の自己同型写像 $\tau' \colon G' \to G'$ を $\psi'(a, b) := (b, a)$ で定めると，この一般化アレキサンダーカンドル $Q(G', \psi')$ は，(P1) は満たすが，(P2) は満たさない．

命題 5.5 (Higashitani–K. [4])**.** 一般化アレキサンダーカンドル $Q = Q(G, \psi), Q' = Q(G', \psi')$ に対して，$P^2 = P(P(Q)), P'^2 = P(P(Q'))$ とおく．このとき，$Q \cong_{\mathrm{qu}} Q'$ ならば次が成り立つ：

(a) $P^2 \cong_{\mathrm{qu}} P'^2$ かつ $P^2 \cong_{\mathrm{gr}} P'^2$;

(b) Q は (P1) を満たす $\iff$ Q' は (P1) を満たす;

(c) Q は (P2) を満たす $\iff$ Q' は (P2) を満たす.

つまり P^2 と (P1) と (P2) はカンドル不変量である.

例 5.6. アレキサンダーカンドル $Q(G, \psi)$ は (P1), (P2) を満たす.

Proof.

- (P1) を満たすことは，G がアーベル群であることから自明.
- $s_x(e) = x + \psi(-x + e) = (\mathrm{Id}_G - \psi)(x)$ より，$\rho = \mathrm{Id}_G - \psi$ とおくと，$s_x(e) = \rho(x)$．さらにこれより $P = \mathrm{Im}\,\rho$ である．また $P^2 = \mathrm{Im}\,\rho^2 = \{\rho(p) : p \in \mathrm{Im}\,\rho\} = \{s_p(e) : p \in P\}$ より (P2) が言える.

□

アーベル群以外にも，二面体群から得られる一般化アレキサンダーカンドルは (P1), (P2) をみたす．そのほかにも (P1), (P2) をみたす一般化アレキサンダーカンドルは存在する.

以下が (P1), (P2) を満たす一般化アレキサンダーカンドルのクラスにおける同値条件であり，本稿の主結果である.

定理 5.7 (Higashitani–K. [4])**.** 一般化アレキサンダーカンドル $Q = Q(G, \psi), Q' = Q(G', \psi')$ について，Q と Q' はそれぞれ (P1), (P2) を満たすと仮定する．このとき $Q \cong_{\mathrm{qu}} Q'$ であることの必要十分条件は以下の (A), (B), (C) を満たすことである：

(A) $|G| = |G'|$;

(B) $|\operatorname{Fix}(\psi, G)| = |\operatorname{Fix}(\psi', G')|$;

(C) 以下を満たす群同型写像 $h \colon P = P(Q) \to P' = P(Q')$ が存在する;

(C-1) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$;

(C-2) 任意の $a \in G$ に対して，$h(s_a(e)) = s'_{a'}(e')$ を満たす $a' \in G'$ が存在する.

証明のアイディア：

- (C-1) により $h \colon P \to P'$ はカンドル同型写像である.
- (A), (B), (C-2) により特別な全単射 $k \colon G/P \to G'/P'$ を作り，$k \times h \colon G \cong G/P \times P \to G' \cong G'/P' \times P'$ がカンドル同型写像であることを示せばよい.

定理 5.7 から以下の 4 つの系が得られる．本稿では証明の細部は割愛する．詳しくは [4] を参照していただきたい．

系 5.8 (Higashitani–K. [4]．これは Nelson [8] の Theorem 2.1 の群論的な解釈)**.** 有限アーベル群 G, G' に対して，$Q = Q(G,\psi), Q' = Q(G',\psi')$ とし，$\rho = \mathrm{Id}_G - \psi, \rho' = \mathrm{Id}_{G'} - \psi'$ とおく．このとき $Q \cong_{\mathrm{qu}} Q'$ であることの必要十分条件は次を満たすことである：

(A') $|G| = |G'|$;

(C') $h \circ \psi|_{\mathrm{Im}\,\rho} = \psi'|_{\mathrm{Im}\,\rho'} \circ h$ を満たす群同型写像 $h : \mathrm{Im}\,\rho \to \mathrm{Im}\,\rho'$ が存在する.

Proof.

- $\mathrm{Fix}(\psi, G) = \ker \rho$ より (C') から (B) が従う.
- $h(s_a(e)) = h(\rho(a))$ より (C') から (C-2) が従う.

□

D_n を位数 $2n$ の二面体群とする．このとき $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(D_n)$ と $\{(a,b) : a \in C_n^\times, b \in C_n\}$ が一対一に対応することが知られている．以降 (a,b) に対応する D_n の自己同型写像を $\varphi_{a,b}$ で表す.

系 5.9 (Higashitani–K. [4])**.** $a, a' \in C_n^\times$, $b, b' \in C_n$ とし，$d = \gcd(n, 1-a, b)$ and $d' = \gcd(n, 1-a', b')$ とおく．このとき $Q(D_n, \varphi_{a,b}) \cong_{\mathrm{qu}} Q(D_n, \varphi_{a',b'})$ であることの必要十分条件は次を満たすことである：

(B') $|\mathrm{Fix}(\varphi_{a,b}, D_n)| = |\mathrm{Fix}(\varphi_{a',b'}, D_n)|$;

(C') $d = d'$;

(C-1') $a \equiv a' \pmod{\frac{n}{d}}$.

系 5.10 (Higashitani–K. [4])**.** C_{2n} を位数 $2n$ の巡回群とする．このとき任意の $a \in C_{2n}^\times$ に対して，$Q(C_{2n}, \times a)$ とカンドル同型になる二面体群から得られる一般化アレキサンダーカンドル $Q(D_n, \varphi_{a',b'})$ が存在する．つまり，$\mathcal{Q}(C_{2n}) \subset \mathcal{Q}(D_n)$ である.

n を自然数とし，要素数 n の一般化アレキサンダーカンドルの同型類を $\mathcal{Q}_{GAQ}(n)$ で表す．つまり

$$\mathcal{Q}_{GAQ}(n) := \{Q(G,\psi) : |G| = n,\ \psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)\}/\cong_{\mathrm{qu}}$$

とする．また $q(n) := |\mathcal{Q}_{GAQ}(n)|$ とする．$q(n)$ の決定は問 3.3 の発展的な問題であるが，n が小さい場合は $q(n)$ を決定することができた.

系 5.11 (Higashitani–K. [4])**.** n が 15 以下の $q(n)$ は下の表の通りである.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$q(n)$	1	1	2	3	4	3	6	9	11	5	10	11	12	7	8

注意 5.12. $n = 16$ のとき，(P2) をみたさない二つの一般化アレキサンダーカンドル $Q(C_2 \times Q_8, \psi)$, $Q((C_4 \times C_2) \rtimes C_2, \psi')$ があり，これらの様々なカンドル不変量はすべて一致する（ψ と ψ' の位数はどちらも 3)．しかし，(P2) をみたさないため，Theorem 5.7 が適応できず，これらがカンドル同型かどうか判定できない．一方で最近，大阪大学の修士学生の小坂迅氏によって，これらがカン

ドル同型であることが示された．証明手法は 2 つのカンドルの間に具体的なカンドル同型写像を構成して示したとのことである．また同様に $C_2 \times Q_8$ と $(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$ 上の位数 6 の自己同型群から得られる一般化アレキサンダーカンドルたちも (P2) を満たさないが，これらの同型も小坂氏によって示された．これらの結果から $n = 16$ の場合の分類が完了した．

$17 \leq n \leq 23$ のときは再び Theorem 5.7 が適応できるため，注意 5.12 の結果を適応すれば $n \leq 23$ までの表を得ることができる．

n	16	17	18	19	20	21	22	23
$q(n)$	29	16	17	18	15	13	11	22

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, From racks to pointed Hopf algebras. *Adv. Math.* **178** (2003), no. 2, 177–243. `https://doi.org/10.1016/S0001-8708(02)00071-3`

[2] M. Bonatto, Principal and doubly homogeneous quandles. *Monatsh. Math.* **191** (2020), no. 4, 691–717. `https://doi.org/10.1007/s00605-019-01334-1`

[3] A. Higashitani and H. Kurihara, Homogeneous quandles arising from automorphisms of symmetric groups. *Comm. Algebra* **51** (2022), no. 4, 1413–1430. `https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2137173`

[4] A. Higashitani and H. Kurihara, Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations. *arXiv preprint* arXiv:2210.16763. `https://arxiv.org/abs/2210.16763`

[5] Y. Ishihara and H. Tamaru, Flat connected finite quandles. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), no. 11, 4959–4971. `https://doi.org/10.1090/proc/13095`

[6] D. Joyce, A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra* **23** (1982), no. 1, 37–65. `https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90077-9`

[7] S. Kamada, H. Tamaru, and K. Wada, On classification of quandles of cyclic type. *Tokyo J. Math.* **39** (2016), no. 1, 157–171. `https://doi.org/10.3836/tjm/1459367262`

[8] S. Nelson, Classification of finite Alexander quandles. In *Proceedings of the Spring Topology and Dynamical Systems Conference*. 2003, 245–258

[9] L. Vendramin, Doubly transitive groups and cyclic quandles. *J. Math. Soc. Japan* **69** (2017), no. 3, 1051–1057. `https://doi.org/10.2969/jmsj/06931051`