

# The Lemmens-Seidel conjecture for base size 5

広島工業大学情報学部情報工学科 吉野 聖人

Kiyoto Yoshino

Department of Computer Science, Faculty of Applied Information Science,  
Hiroshima Institute of Technology

## 1 はじめに

本稿の内容は2022年12月5日の講演内容に基づく。主結果としてはLemmens-Seidel予想の解決である。より詳細な議論や結果に関しては[12]を参照されたい。また本研究はJSPS 科研費JP21J14427の助成を受けたものである。

**等角直線族**とは互いに成す角が一定であるような原点を通る直線の集合である。例えば、図1は角度 $\pi/3$ の等角直線族の例である。正整数 $d$ に対して、 $d$ 次元ユークリッド空間内の角度 $\arccos(\alpha)$ の等角直線族の

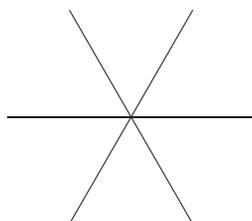


図1: 2次元ユークリッド空間内の角度 $\pi/3$ の等角直線族

最大濃度を $N_\alpha(d)$ で表す。さらに、 $d$ 次元ユークリッド空間内の等角直線族の最大濃度を $N(d)$ で表す。

この $N(d)$ を決定する問題は1940年代[8]にまで遡る。上界として $N(d) \leq d(d+1)/2$ [9]、下界として $N(d) \geq (32d^2 + 328d + 29)/1089$ [4]が知られている。また低次元では表1のような結果が知られる[1, 5, 6, 7, 8, 9, 11].

表1: The values or bounds of  $N(d)$  for  $d \leq 43$ .

$d$	2	3	4	5	6	7–14	15	16	
$N(d)$	3	6	6	10	16	28	36	40	
$d$	17	18	19	20	21	22	23–41	42	43
$N(d)$	48	57–59	72–74	90–94	126	176	276	276–288	344

次に、共通角度を固定した $N_\alpha(d)$ に関する先行研究を紹介する。まず、Lemmens氏とSeidel氏[9]は、 $d$ 次元ユークリッド空間内の $2d$ 本より多い等角直線族の共通角度は奇数 $\alpha$ によって $\arccos(1/\alpha)$ と表されることを示した。より精密な結果も知られている[10, Theorem 5.3]。最も簡単な場合 $\alpha = 3$ に関しては後に

解説するピラー法によって

$$N_{1/3}(d) = \begin{cases} 10 & \text{if } d = 5 \\ 16 & \text{if } d = 6 \\ 28 & \text{if } d = 7 \\ 2(d-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることが知られている [9]. また, 近年 Cao 氏らによってルート格子を用いたより精密な結果が与えられた [3]. 次に考えるべき  $\alpha = 5$  の場合は難しく,  $N_{1/5}$  の値に関する Lemmens-Seidel 予想は長く未解決であった.

**定理 1** (Lemmens-Seidel 予想). 23 以上の整数  $d$  に対して

$$N_{1/5}(d) = \max \{276, \lfloor (3d-3)/2 \rfloor\}$$

である.

この予想もピラー法によってアプローチされてきた. ベースサイズと呼ばれる値が 3 から 6 のそれぞれの場合に示す必要があり, まず Lemmens 氏はベースサイズ 6 の場合を証明した [9]. 次に Lin 氏はベースサイズ 3 の場合をコンピュータを用いて証明した [10]. 彼らはベースサイズ 5 の場合も議論をしたがそれには誤りがあった. 詳しくは最後の章で解説する. また, Cao 氏ら [2] はコンピュータを使わずにベースサイズ 3 と 4 の場合を証明した. 今回の講演における主結果は次の定理であり, これにより Lemmens-Seidel 予想は解決した.

**定理 2** (ベースサイズ 5 の Lemmens-Seidel 予想). 空間  $\mathbb{R}^d$  内の共通角度  $\arccos(1/5)$  かつベースサイズ 5 の等角直線属の濃度  $n$  は

$$n \leq \max \{276, \lfloor (4d+10)/3 \rfloor\}.$$

を満たす.

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 章では基本的な用語を与える. 第 3 章では主なツールであるピラー法を紹介する. 第 4 章では主結果である定理 2 の証明を与える. 第 5 章では主定理の証明に必要な定理の証明の概要を与える.

## 2 等角直線属の Seidel 行列表示・グラフ表示

対角成分が 0 で非対角成分が  $\pm 1$  である対称行列は **Seidel 行列** と呼ばれる. 2 つの Seidel 行列  $S$  と  $S'$  が **スイッチング同値** であるとは, ある  $\pm 1$  対角行列  $D$  と置換行列  $P$  が存在して  $S = (PD)S'(PD)^T$  が成り立つことである.

**定義 3.** グラフ  $H$  に対して Seidel 行列  $S(H)$  を  $S(H) := J - I - 2A(H)$  によって定める. ただし,  $A(H)$  はグラフ  $H$  の隣接行列を表し,  $J$  は成分が全て 1 の行列を表す. また, 2 つのグラフ  $H$  と  $G$  に対して,  $S(H)$  と  $S(G)$  がスイッチング同値であるとき, 2 つのグラフは **スイッチング同値** であるという. グラフ  $H$  とスイッチング同値なグラフ全体を  $[H]$  で表す.

スイッチング同値をグラフの言葉で説明する. グラフ  $H$  の頂点集合  $V$  の部分集合  $U$  をとる. このとき, グラフ  $H^U = (V, E^U)$  を次で定める.

$$x \sim y \text{ in } G^U \text{ if } \begin{cases} x \sim y \text{ in } G \text{ かつ } x, y \in U, \\ x \sim y \text{ in } G \text{ かつ } x, y \in V \setminus U, \\ x \not\sim y \text{ in } G \text{ かつ } x \in U, y \in V \setminus U. \end{cases}$$

グラフ  $H$  と  $H^U$  はスイッチング同値になり、逆に  $H$  とスイッチング同値なグラフ  $G$  に対して  $U$  を適当に選ぶと  $G$  と  $H^U$  は同型になる。

最小固有値  $\lambda$  である位数  $n$  の Seidel 行列  $S$  に対して、 $r := \text{rank}(\lambda I + S)$  とおく。このとき、 $I + S/\lambda$  は半正値であるからある単位ベクトル  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^r$  が存在して

$$(I + S/\lambda)_{i,j} = (x_i, x_j)$$

を満たす。そのため、 $\{\mathbb{R}x_1, \dots, \mathbb{R}x_n\}$  は  $r$  次元空間内の角度  $\arccos(1/\lambda)$  の等角直線族である。逆にこの等角直線族からスイッチング同値を除いて元の Seidel 行列は復元される。よって以降は等角直線族の代わりに Seidel 行列を主に扱う。

### 3 ピラー法

この章ではベースサイズを定義し、主定理を示すために用いるピラー法の概要を紹介する。その前にグラフ  $H$  に対して、 $\omega(H)$  で  $H$  のクリーク数を表す。さらに、 $\omega([H]) := \max\{\omega(G) : G \in [H]\}$  とする。

**定義 4.** 等角直線族の集合を  $E$ 、 $E$  が誘導するグラフを  $H$  とする。このとき、 $E$  のベースサイズは  $\omega([H])$  で定義される。

**例 5.** 等角直線族として、図 2 のような  $\pi/6$  で交わるものを考える。このとき、図 2 で示されるように等角直線族が誘導するグラフは  $K_3$  か  $K_1 + K_2$  である。それぞれのクリーク数は 3 と 2 であるから、ベースサイズは 3 となる。

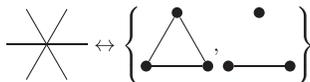


図 2: ベースサイズの例

**定義 6.** グラフ  $H$  と最大クリーク  $B$  を固定する。部分集合  $U \subset B$  に対して、ピラーとは

$$\{x \in V(H) \setminus B \mid N(x) \cap B = U\}$$

で誘導される  $H$  の部分グラフであり、 $P_{B,U}$  と表す。特にサイズを強調したいときは  $(|B|, |U|)$ -ピラーとも呼ぶ。

**例 7.** 図 3 のグラフを  $H$  とおいて、その最大クリークの 1 つを図のように  $B$  とおく。このとき、 $P_{B,\{a,c\}}$  は  $(3,2)$ -ピラーであり、図のように 3 つの点を含む。また、 $P_{B,\{b\}}$  は  $(3,1)$ -ピラーであり、図のように 2 つの点を含む。

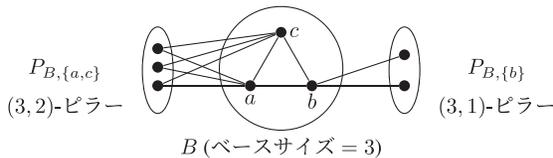


図 3: ピラーの例

ピラー法ではまず等角直線属をとり，それが誘導するグラフでクリーク数  $\omega(H)$  がベースサイズ  $\omega([H])$  と一致するものを取る．そして，ピラーごとのサイズの上界を与え，それを合わせて全体の濃度の上界を与える．

上界を与えるために必要な記号を用意しておく．なお，考えたい等角直線属は共通角度  $\arccos(1/5)$  であるため対応するグラフの最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上となる．

**定義 8.** グラフ  $H$  の最小 Seidel 固有値を  $-5$  以上とし，最大クリーク  $B$  をとる．このとき，ベクトル  $\hat{x}$  ( $x \in V(H)$ ) を

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (I + S(H)/5)_{xy} \quad (x, y \in V(H))$$

によって定める．また， $\bar{x}$  をベクトル  $\hat{x}$  の空間  $\langle \hat{b} : b \in B \rangle^\perp$  への直行射影とする．

### 4 ベースサイズ 5 の Lemmens-Seidel 予想の証明

主結果であるベースサイズが 5 の Lemmens-Seidel 予想 (定理 2) の証明の概略を紹介する．

**定理 9.** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = \omega([H]) = 5$  であるとする．このとき，

$$|V(H)| = \max\{276, \lfloor (4d + 10)/3 \rfloor\}$$

が成り立つ．ただし， $d = \text{rank}(S(H) + 5I)$  である．

この定理のグラフ  $H$  をとり，その最大クリーク  $B$  をとる．このとき，ピラーの種類は  $(5, i)$ -ピラー ( $i = 0, \dots, 5$ ) がある．しかし， $(5, 0)$ -ピラーと  $(5, 5)$ -ピラーが空でない場合は， $\omega([H]) \geq 6$  となり矛盾する．次に， $(5, 3)$ -ピラーと  $(5, 4)$ -ピラーはスイッチングすることで，非空なピラーは  $(5, 2)$ -ピラーと  $(5, 1)$ -ピラーのみの場合に帰着できる (図 4)．そして  $(5, 1)$ -ピラーは 5 個， $(5, 2)$ -ピラーは 10 個ある．

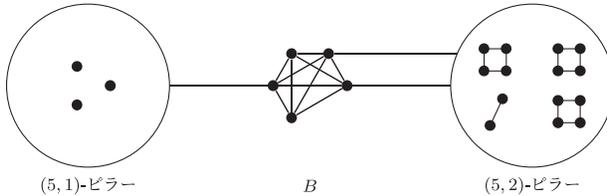


図 4: ベースサイズ 5 の場合のピラーの様子

まず， $(5, 1)$ -ピラーに関する結果を提示する．

**補題 10.** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = \omega([H]) = 5$  であるとする．このとき， $(5, 1)$ -ピラーに含まれる頂点の合計は高々 5 点である．

*Proof.* もし  $(5, 1)$ -ピラーに含まれる頂点の合計が 6 点以上であるとき，最小 Seidel 固有値が  $-5$  より小さくなるのが直接計算でわかり証明される．例えば図 5 のグラフの最小 Seidel 固有値は  $-5$  より小さい． □

次の定理の証明は [10] にあるが少し間違えているので，正しく修正した証明を載せておく．

**定理 11 ([10]).** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = \omega([H]) = 5$  であるとする．このとき，もし 1 つの  $(5, 2)$ -ピラーだけが非空であるならば， $|V(H)| \leq \lfloor (4d + 10)/3 \rfloor$  が成り立つ．

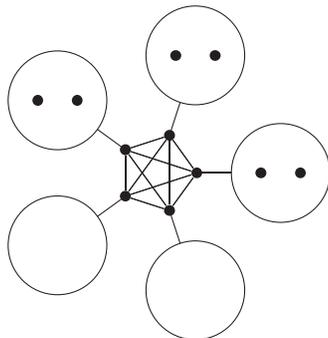


図5: 最小 Seidel 固有値が  $-5$  より小さくなる場合の例

*Proof.* 唯一の非空な  $(5, 2)$ -ピラーを  $P$  とおく. 任意の  $x, y \in P$  に対して

$$\frac{5}{2} \cdot (\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = y, \\ -1 & \text{if } x \sim y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

がなりたつ. すなわち  $\bar{x}$  ( $x \in P$ ) のグラム行列の  $5/2$  倍は  $2I - A(H)$  となる. ゆえに,  $P$  の隣接行列  $A(P)$  の最大固有値は高々  $2$  である. 一般に, そのようなグラフは図 6 の連結グラフの非交和であることが知られる.

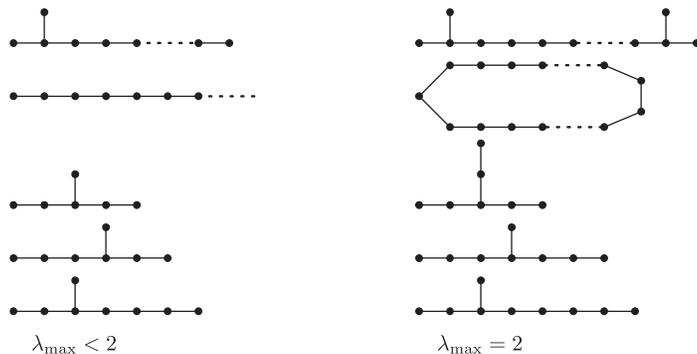


図6: 最大固有値が  $2$  未満, または  $2$  のグラフ

特に, 連結成分には三角形  $K_3$  が現れないことが  $\omega([H]) = 5$  から従うため, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} |V(P)| &= \text{rank}(2I - A(P)) + \dim \text{Ker}(2I - A(P)) \\ &= \text{rank}(2I - A(P)) + \text{最大固有値が } 2 \text{ の } P \text{ の連結成分数} \\ &\leq \dim \langle \bar{x} : x \in P \rangle + |V(P)|/4 \\ &\leq d - 5 + |V(P)|/4. \end{aligned}$$

さらに, 補題 10 も合わせて

$$|V(H)| \leq |B| + 5 + |V(P)| \leq 10 + \frac{4(d-5)}{3} = \frac{4d+10}{3}$$

となる.

□

次に, (5, 2)-ピラーが複数ある場合に必要な結果を紹介する.

**補題 12.** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = \omega([H]) = 5$  であるとする. 最大クリーク  $B = \{b_1, \dots, b_5\}$  をとる. ここで (5, 2)-ピラー以外は空だとする.  $H$  に新しい頂点  $b_6$  を  $\hat{b}_6 = -\hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \hat{b}_4 - \hat{b}_5$  なるように付け加えて新しいグラフ  $G$  を作る. このとき,  $B \cup \{b_6\}$  は  $G$  の最大クリークであり,  $H$  の (5, 2)-クリークは全て  $G$  では (6, 3)-クリークになる.

例えば, 図 7 のように (5, 2)-ピラーが (6, 3)-ピラーとなる. これによって, ベースサイズ 6 の場合の結果

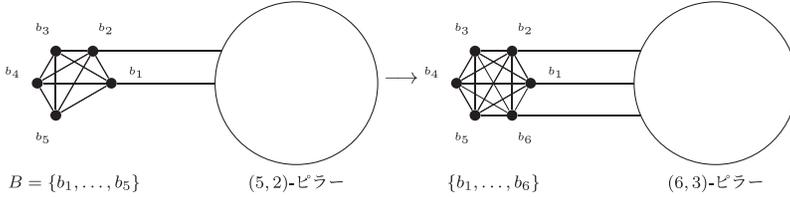


図 7: ベースサイズ 5 の場合をベースサイズ 6 の場合に帰着

を用いることができ次が成り立つことがわかる.

**定理 13** ([9, Theorems 5.3, 5.4 and 5.5]). グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = 5$  であるとする. ある非負整数  $m$  と  $n$  に対して, 1 つの (5, 2)-ピラーは  $mK_2 + nK_1$  と同型とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1)  $2m + n \leq 18$  はもし他の (5, 2)-ピラーが辺をもつとき成立.
- (2)  $2m + n \leq 24$  はもし他の (5, 2)-ピラーが隣接しない 2 点をもつとき成立.
- (3)  $2m + n \leq 36$  はもし他の (5, 2)-ピラーは頂点をもつとき成立.

**定理 14** ([9, Theorem 5.6 の証明と Theorems 5.3, 5.4 and 5.5]). グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = 5$  であるとする. ここで (5, 2)-ピラー  $P$  を 1 つとる.

- (1)  $|V(P)| \leq 27$  はもし他の (5, 2)-ピラーが辺をもつとき成立.
- (2)  $|V(P)| \leq 36$  はもし他の (5, 2)-ピラーが隣接しない 2 点をもつとき成立.
- (3)  $|V(P)| \leq 54$  はもし他の (5, 2)-ピラーは頂点をもつとき成立.

これに加え, 証明のキーとなるのは次の定理である.

**定理 15.** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = 5$  であるとする. 最大クリーク  $B = \{b_1, \dots, b_5\}$  を取る. このとき, 次のどちらか 1 つを仮定する.

- (1) (5, 1)-ピラー  $P_{B, \{b_1\}}$  は隣接しない 2 点をもつ.
- (2) (5, 1)-ピラー  $P_{B, \{b_1\}}$  と  $P_{B, \{b_2\}}$  は少なくとも 1 つの頂点をもつ.

もし  $P_{B, \{b_3, b_4\}}$  が辺を持つならば,  $|V(P_{B, \{b_1, b_2\}})| \leq 26$  である.

これらを用いて, 主結果である定理 9 の証明をする.

定理9の証明. 章の初めで述べたように  $H$  の非空なピラーは (5, 1) と (5, 2)-ピラーのみとして良い. 非空な (5, 2)-ピラーが1つだけのとき, 定理11より

$$|V(H)| \leq \lfloor (4d + 10)/3 \rfloor$$

である. また, 補題10より, (5, 1)-ピラー全ての頂点数の合計は高々5である. 以下, 少なくとも1つの (5, 2)-ピラーの頂点数が2以上であると仮定する. 全ての (5, 1)-ピラーが辺を持たない場合, 定理13より

$$|V(H)| \leq 5 + 5 + 9 \cdot 24 + 36 = 262.$$

次に少なくとも1つの (5, 2)-ピラーは辺を持つとする. このとき, 定理13と定理14によって

$$|V(H)| \leq 5 + 5 + 9 \cdot 18 + 54 = 226.$$

次に, 少なくとも2つの (5, 2)-ピラーが辺を持ち, どれか1つの (5, 2)-ピラーは辺を持たないとする. 定理14より

$$n \leq 5 + 5 + 9 \cdot 27 + 18 = 271.$$

以下は, 全ての (5, 2)-ピラーが辺を持つと仮定して進める. まず, ある (5, 1)-ピラーの頂点数が2以上の場合を考える. ピラーを考えるときの最大クリークを  $B = \{b_1, \dots, b_5\}$  とかく. このとき, 一般性を失わず  $|V(P_{B, \{b_1\}})| \geq 2$  であるとして良い. 定理15より,  $P_{B, \{b_i, b_1\}}$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ ) の頂点数は高々26である. したがって,

$$n \leq 5 + 5 + 6 \cdot 27 + 4 \cdot 26 = 276.$$

最後に, 全ての (5, 1)-ピラーの頂点数が1以下の場合を考える. 非空な (5, 1)-ピラーの数を  $k$  とし, 一般性を失わず  $|V(P_{B, \{b_i\}})| = 1$  ( $i = 1, \dots, k$ ) として良い. もし,  $k = 1$  ならば

$$n \leq 5 + 1 + 10 \cdot 27 = 276.$$

そうでないとき, 定理15より

$$n \leq 5 + k + \left(10 - \binom{k}{2}\right) \cdot 27 + \binom{k}{2} \cdot 26 = 275 + k - \binom{k}{2} \leq 276.$$

となる. これで証明が完了した. □

## 5 定理15の証明の概略

定理15の証明の概略を示すために2つの補題を提示する. 1つめは比較的容易に示せるが, 2つめを証明するには少なくない計算を必要とする.

**補題16.** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = 5$  であるとする. 2つの異なる非空の (5, 2)-ピラーが存在するとし, その1つを  $P$  とおく. このとき, ある非負整数  $n, m$  が存在し,  $G \simeq nK_1 + mK_2$  なる  $P$  誘導部分グラフ  $G$  が存在すると共に

$$|V(P)| \leq 4n/3 + 3m$$

を満たす.

**補題17.** グラフ  $H$  は最小 Seidel 固有値は  $-5$  以上かつ  $\omega(H) = 5$  であるとする. 最大クリーク  $B = \{b_1, \dots, b_5\}$  を取る. ある非負整数  $m$  が存在して,  $P_{B, \{b_1, b_2\}} \simeq mK_2$  であるとする. このとき, 次のどちらか1つを仮定する.

- (1)  $(5, 1)$ -ピラー  $P_{B, \{b_1\}}$  は隣接しない 2 点をもつ。  
 (2)  $(5, 1)$ -ピラー  $P_{B, \{b_1\}}$  と  $P_{B, \{b_2\}}$  は少なくとも 1 つの頂点を見る。

もし  $P_{B, \{b_3, b_4\}}$  が辺を持つならば,  $m \leq 8$  である。

実際に証明を与える。

定理 15 の証明. まず  $P := P_{B, \{b_1, b_2\}}$  とおく. 補題 16 より  $P$  のある誘導部分グラフ  $G$  が存在し, ある非負整数  $m$  と  $n$  に対して,  $G$  は  $nK_1 + mK_2$  と同型かつ,  $|V(P)| \leq 4n/3 + 3m$  を満たす. また定理 13 より  $2m + n \leq 18$ , かつ定理 15 より  $m \leq 8$  である. 故に,

$$|V(P)| \leq \frac{4n}{3} + 3m = \frac{4}{3} \cdot (2m + n) + \frac{1}{3} \cdot m \leq 24 + \frac{8}{3} < 27.$$

となり, 定理が示される. □

## 謝辞

シンポジウムにおいて発表と議論の場を与えてくださった世話人・関係者の皆様方に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] Alexander Barg and Wei-Hsuan Yu. New bounds for equiangular lines. In *Discrete geometry and algebraic combinatorics*, volume 625 of *Contemp. Math.*, pages 111–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [2] M.-Y. Cao, J.H. Koolen, Y.-C.R. Lin, and W.-H. Yu. The Lemmens-Seidel conjecture and forbidden subgraphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 185:105538, 2022.
- [3] Meng-Yue Cao, Jack H. Koolen, Akihiro Munemasa, and Kiyoto Yoshino. Maximality of Seidel matrices and switching roots of graphs. *Graphs Combin.*, 37(5):1491–1507, 2021.
- [4] G. Greaves, J.H. Koolen, A. Munemasa, and F. Szöllősi. Equiangular lines in Euclidean spaces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 138:208–235, 2016.
- [5] Gary R. W. Greaves and Jeven Syatriadi. Real equiangular lines in dimension 18 and the de Caen-Jacobi identity for complementary subgraphs. *arXiv:2206.04267*, 2022.
- [6] Gary R. W. Greaves, Jeven Syatriadi, and Pavlo Yatsyna. Equiangular lines in euclidean spaces: dimensions 17 and 18. *arXiv:2104.04330*, 2021.
- [7] Gary R. W. Greaves, Jeven Syatriadi, and Pavlo Yatsyna. Equiangular lines in low dimensional Euclidean spaces. *Combinatorica*, 41(6):839–872, 2021.
- [8] J. Haantjes. Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional spaces. *Nieuw Arch. Wiskunde (2)*, 22:355–362, 1948.
- [9] P. W. H. Lemmens and J. J. Seidel. Equiangular lines. *J. Algebra*, 24:494–512, 1973.
- [10] Yen-Chi Roger Lin and Wei-Hsuan Yu. Equiangular lines and the Lemmens-Seidel conjecture. *Discrete Math.*, 343(2):111667, 18, 2020.
- [11] J. H. van Lint and J. J. Seidel. Equilateral point sets in elliptic geometry. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math.*, 28:335–348, 1966.
- [12] K. Yoshino. The lemmens-seidel conjecture for base size 5. *arXiv:2209.08308*, 2022.