The existence of Cameron-Liebler line classes with parameter $x = \frac{(q+1)^2}{3}$

熊本大学 大学院先端科学研究部 (理)　籾原幸二*
Koji Momihara
Faculty of Advanced Science and Technology, Kumamoto University

概 要

この論文では, Cameron-Liebler line class と呼ばれる 3 次元有限射影空間上のある直線集合の存在問題について扱う. 特に, パラメータ $x = (q+1)^2/3$ の Cameron-Liebler line class の存在は, 計算機によって小さい q の場合の例がいくつか見つかっていたものの, 一般化されずに残されていた. 今回その存在問題を肯定的に解決したので報告する. この論文は, 論文 [11] の要約である.

1　導入

この論文は, T. Feng 氏 (Zhejiang University), M. Rodgers 氏 (Istinye University), Q. Xiang 氏 (Southern University of Science and Technology), H. Zou 氏 (University of Delaware) との共同研究によるものである. 証明を省く命題があるが, 詳しくは論文 [11] を参照していただきたい.

まずは簡単に背景から紹介したい. Cameron-Liebler は論文 [2] で, 有限射影空間の collineation group で, その点と直線への群作用による軌道数が一致するものを特徴づける問題を扱った. そのように得られた点集合と直線集合の軌道分解が symmetric tactical decomposition と呼ばれる組合せ構造を与えることが, その研究動機であった.

定義 1.1. $\mathcal{P}$ を点集合, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}$ の点の部分集合のある族とする. $\mathcal{P}_i$ $(1 \le i \le s)$ を $\mathcal{P}$ の空でない s 個の集合への分割として, 同様に, $\mathcal{B}_i$ $(1 \le i \le s)$ を $\mathcal{B}$ の空でない s 個の集合への分割とする. このとき, $s \times s$-行列 $A = (a_{i,j})$ と $B = (b_{i,j})$ が存在し,

$$|\mathcal{P}_i \cap B| = a_{i,j},\ B \in \mathcal{B}_j \text{ のとき}$$
$$|(p) \cap \mathcal{B}_j| = b_{i,j},\ p \in \mathcal{P}_i \text{ のとき}$$

を満たすとき, この点集合と直線集合の分割を *symmetric tactical decomposition* と呼ぶ. ここで, (p) は点 p を通る直線集合である.

[1] 〒 860-8555, 熊本県熊本市黒髪 2-40-1, 熊本大学教育学部, Email: momihara@educ.kumamoto-u.ac.jp

$\mathrm{PG}(n,q)$ で有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元有限射影空間を表すとすると, $\mathrm{PG}(n,q)$ の点と直線集合は, 2-design をなす. Cameron-Liebler はこのデザインの symmetric tactical decomposition が存在すると仮定すると, 以下のいずれかを満たすと予想している.

1. 一点のみからなる点クラス $\{p\}$ とその点を通る直線からなる直線クラスを持つ.
2. 点クラスと直線クラスはそれぞれ 2 つ存在し, 点クラスは一つの超平面とその補集合, 直線クラスはその超平面上にある直線とその補集合である.

この予想は, 彼らによって, $n=3$ のとき正しければ一般の n で正しいことが示され, $n=3$ の場合の問題に帰着される. $\mathrm{PG}(3,q)$ には, 互いに排反ですべての点を覆う直線集合が存在しているが, それを $\mathrm{PG}(3,q)$ の spread と呼ぶ. このとき, 『$\mathrm{PG}(3,q)$ の直線集合 $\mathcal{L}$ でどんな spread とも一定数 (x) の直線を共有するもの』を考える. 実は, $\mathrm{PG}(3,q)$ の symmetric tactical decomposition の任意の直線クラスは, この $\mathcal{L}$ の性質を満たすことが証明される. よって, このような条件を満たす直線集合 $\mathcal{L}$ が存在するか?という問題が自然に想起される. このような直線集合を **Cameron-Liebler (CL) line class** と呼び, x をそのパラメータと呼ぶ.

CL line class の一般の集合上への一般化や, 一般次元の部分空間への一般化, アフィン空間版, 極空間版, アソシエーションスキーム上への一般化など様々な類似問題が知られている. [6, 7, 8, 12, 18] を参照されたい.

CL line class における中心的課題は, 以下の通りである.

問題 1.2. $\mathrm{PG}(3,q)$ において, 与えられたパラメータ x をもつ *CL line class* が存在するか?

注意として, パラメータ x の CL line class が存在すれば, その直線集合の補集合はパラメータ q^2+1-x の CL line class となるので, $x \le (q^2+1)/2$ の範囲で考えれば十分である.

CL line class の非存在性に関する研究は, [14, 16] の結果がある. 特に, [16] で, パラメータが

$$2 < x < q\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} - \frac{2}{3}q.$$

の範囲内では CL line class は存在しないことが証明されている. $x=1,2$ については, 「自明」なものしか存在しないことが知られている. ここで, 自明な $x=1$ の CL line class とは, 「固定した一点を通るすべての直線の集合」か「1 つの平面上のすべての直線の集合」であり, また, 自明な $x=2$ の CL line class とは, これらの和集合からなるものである.

一方, CL line class の存在性に関しては, 時系列で以下の研究がある.

- $q=3$ かつ $x=5$ (Drudge, 1999 [9])
- $x=(q^2+1)/2$ (Bruen-Drudge, 1999 [1])
- $q=4$ かつ $x=7$ (Govaerts-Penttila, 2005 [13])
- $x=(q^2-1)/2$ と $x=(q+1)^2/3$ の場合のいくつかの例 (Rodgers, 2013 [17])

- $x = (q^2-1)/2$ (Feng-Momihara-Xiang, 2015 [10], De Beule-Demeyer-Metsch-Rodgers, 2016 [5])
- $x = (q^2+1)/2$ (Gavrilyuk-Matkin-Penttila, 2018 [15], Cossidente-Pavese, 2019 [3, 4])

Govaerts-Penttila による $(q, x) = (4, 7)$ の場合の例と, Rodgers による $x = (q+1)^2/3$ の場合の例を除いて, 先行研究で存在性が知られていた CL line class の例は, 既に無限系列への一般化がなされている. この論文では, $x = (q+1)^2/3$ の場合に既に発見されていたいくつかの例について, 一般化に成功したので報告したい. 以下が主定理である.

定理 1.3. $q \equiv 2 \pmod 3$ なる任意の素数冪 q に対し, パラメータ $x = (q+1)^2/3$ の *CL line class* が存在する.

2 同値な条件

CL line class の定義の同値な条件がいくつも知られている. この章では, 重要な同値条件を紹介したい.

補題 2.1. $\mathcal{L}$ を $\mathrm{PG}(3, q)$ のある直線集合とする. $\mathcal{L}$ がパラメータ x の *CL line class* であるための必要十分条件は, $\mathrm{PG}(3, q)$ の任意の直線 L が $\mathcal{L}$ の $x(q+1) + q^2\delta_L$ 本の直線と交点を持つことである. ここで, δ_L は, $L \in \mathcal{L}$ か否かで, $\delta_L = 1$ または 0 を与えるとする.

この補題の証明は, 任意に固定した直線 ℓ に対し, ℓ と排反な直線 $L \in \mathcal{L}$ と, ℓ と L を含む spread S のペアを数え上げることによって示される.

次の同値条件は, 次の Klein 対応を用いて得られる.

命題 2.2. $\mathrm{PG}(3, q)$ の任意の直線 $\ell = \langle (x_i), (y_i) \rangle$ に対し,

$$p_{i,j} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}, \ 0 \le i, j \le 3$$

と定める. このとき, ベクトル $\kappa(\ell) := (p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, p_{03}, p_{12}) \in \mathbb{F}_q^6$ は $p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$ を満たす. この $\mathrm{PG}(3, q)$ から $\mathrm{Q}^+(5, q)$ への写像 κ は全単射を与える. ここで, $\mathrm{Q}^+(5, q)$ は上の等式 (双曲型二次形式) の定める二次曲面を意味する.

この Klein 対応によって, $\mathrm{PG}(3, q)$ の直線は, $\mathrm{PG}(5, q)$(特に, $\mathrm{Q}^+(5, q)$) の点へ移されることになり, 補題 2.1 より, 以下の同値条件を得る.

補題 2.3. $\mathrm{PG}(3, q)$ の直線集合 $\mathcal{L}$ がパラメータ x の *CL line class* をなすための必要十分条件は, 以下が成立することである.

$$|P^\perp \cap T_{\mathcal{L}}| = \begin{cases} x(q+1) + q^2, & P \in T_{\mathcal{L}} \text{ のとき} \\ x(q+1), & \text{それ以外.} \end{cases}$$

ここで, $T_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の *Klein* 対応による像, $P^{\perp}$ は $\mathrm{Q}^{+}(5,q)$ に付随する双線形形式 $B(x,y)$ に対し, $P^{\perp} := \{a \in \mathrm{PG}(5,q) \mid B(P,a)=0\}$ で定められる $\mathrm{PG}(5,q)$ の超平面である.

上の補題の点 P は, 本来 $\mathrm{Q}^{+}(5,q)$ 内のみ考えれば良いが, $\mathrm{Q}^{+}(5,q)$ の外の点に延長しても同じ主張が成立することが知られている.

最後に, 上の同値条件を指標和を用いて表現したものを紹介する. $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} := \{xy : x \in \mathbb{F}_q^{*}, \langle y\rangle \in T_{\mathcal{L}}\} \subset \mathbb{F}_q^6$ と定める.

補題 2.4. $\mathrm{PG}(3,q)$ の直線集合 $\mathcal{L}$ がパラメータ x の *CL line class* をなすための必要十分条件は, 以下が成立することである.

$$\sum_{y\in\mathcal{T}_{\mathcal{L}}}\psi(y)=\begin{cases}-x+q^3, & P\in T_{\mathcal{L}}\text{ のとき}\\ -x, & \text{それ以外.}\end{cases}$$

ここで, ψ は $\mathbb{F}_q^6$ の非自明な指標であり, 超平面 $P^{\perp}$ の上で自明となるものである.

この補題によって, 代数的グラフ理論とも関係することがわかる. $(\mathbb{F}_q^6,+)$ のすべての指標 ψ に対し, $\sum_{y\in\mathcal{T}_{\mathcal{L}}}\psi(y)$ は, ケーリーグラフ $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_q^6,\mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ のすべての固有値を与えることに注意する. このとき, 補題 2.4 によりその非自明な値が 2 種類であるので, グラフの非自明固有値が 2 種類であることを意味する. これにより, このケーリーグラフは, 強正則グラフとなる.

3　二次形式のモデルとセッティング

$\mathrm{Q}:\mathbb{F}_{q^3}\times\mathbb{F}_{q^3}\to\mathbb{F}_q$ を $\mathrm{Q}(x,y)=\mathrm{Tr}_{q^3/q}(xy)$ で定める. ここで, $\mathrm{Tr}_{q^3/q}$ は $\mathbb{F}_{q^3}$ から $\mathbb{F}_q$ へのトレース関数とする. このとき, $\mathrm{Q}(x,y)$ は, 非退化な双曲型二次形式を与えるが, この二次形式から定まる $\mathrm{PG}(5,q)$ の二次曲面を考える. 補題 2.4 より, 以下の問題を考えればよい.

問題 3.1. Q の零点集合の $\mathbb{F}_q^{*}$-不変な部分集合 $\mathcal{T}\subset\mathbb{F}_{q^3}\times\mathbb{F}_{q^3}$ で, 以下の条件を満たすものを発見せよ.

$$\sum_{y\in\mathcal{T}}\psi_{a,b}(y)=\begin{cases}-x+q^3, & (b,a)\in\mathcal{T}\text{ のとき,}\\ -x, & \text{それ以外.}\end{cases}$$

ここで, $\psi_{a,b}$, $a,b\in\mathbb{F}_{q^3}$, は $\psi_{a,b}(x,y)=\psi_{\mathbb{F}_{q^3}}(ax+by)$ で定まる $\mathbb{F}_{q^3}\times\mathbb{F}_{q^3}$ の指標であり, また, $\psi_{\mathbb{F}_{q^3}}$ は $\mathbb{F}_{q^3}$ の標準的指標とする.

さらに, 以下の自己同型群を持つもののみ考えることとする. ($q=5,2^3,11,17,23,29,2^5$ に対し, パラメータ $x=(q+1)^2/3$ の CL line class の例が知られているが, すべてこの群を自己同型として持っている.) $\mathbb{F}_{q^3}$ の原始根 ω に対し,

$$C:=\{\omega^{(q-1)i}\mid i=0,1,\ldots,q^2+q\}$$

と定める. $z\in C$ に対し, $\mu_z:\langle(x,y)\rangle\to\langle(zx,z^{-1}y)\rangle$ と定め, 群 $G=\{\mu_z\mid z\in C\}$ の $\mathrm{Q}^{+}(5,q)$ への作用を考え, 点集合を軌道分解すると, 各軌道の長さは q^2+q+1 で, その数は q^2+1 と

なる．元 $\langle(a,b)\rangle$ を含む軌道を $O_{(a,b)}$ と書くと, それらの軌道は, $O_{(1,0)}$, $O_{(0,1)}$, $O_{(1,z)}$, ($z \in \mathbb{F}_{q^3}^*$ は $\mathrm{Tr}_{q^3/q}(z) = 0$ を満たす) と書ける． $O_{(1,0)}$，$O_{(0,1)}$ は選ばないものとすると，パラメータ $x = (q+1)^2/3$ の CL line class を得るためには,

$$T_0 = \{z \in \mathbb{F}_{q^3}^* : \mathrm{Tr}_{q^3/q}(z) = 0\}$$

から適切な $(q+1)^2/3$-部分集合 D を選ぶ必要がある.

4 構成法

この章では, 所望の CL line class の構成法を与える．まず,

$$L_0 = \{x \in T_0 : \mathrm{Norm}_{q^3/q}(x) = 1\}$$

と定める．$q \equiv 2 \pmod 3$ に注意して, 任意の $y \in \mathbb{F}_{q^3}$ に対し, $y \to y^3$ は $\mathbb{F}_{q^3}$ の置換を与えるが, $y \to y^{1/3}$ で $y \to y^3$ の逆写像とする．このとき,

$$D_1 = [x\mathrm{Norm}_{q^3/q}(\lambda + x^q - x^{q^2})^{1/3} : x \in L_0, \lambda \in \mathbb{F}_q],$$
$$D_2 = [\beta^{-1}x\mathrm{Norm}_{q^3/q}(\lambda + x^q - x^{q^2})^{-1/3} : x \in L_0, \lambda \in \mathbb{F}_q]$$

と定義する．ここで, $\beta = -3^{-1} \in \mathbb{F}_q$ とし, [ ] は多重集合を意味する．また, 各多重集合は, 群環 $\mathbb{Z}[\mathbb{F}_{q^3}]$ の元と同一視することとする.

命題 4.1. $|D| = (q+1)^2/3$ となる部分集合 $D \subset T_0$ が存在し,

$$D_1 + D_2 = 3D + T_0$$

が成立する.

この部分集合 D が, 所望の集合である.

定理 4.2. *q を $q \equiv 2 \pmod 3$ なる素数冪とする．また，命題 4.1 の集合 D に対し，$\mathcal{T} = \bigcup_{z\in D} O_{(1,z)}$ とする．このとき，Klein 対応の下で，$\mathcal{T}$ に対応する $\mathrm{PG}(3,q)$ の直線集合 $\mathcal{L}$ は，パラメータ $x = (q+1)^2/3$ の CL line class をなす.*

この定理を証明するために, 補題 2.4 と問題 3.1 より, 以下の指標和の値を決定する必要がある.

$$\psi_{a,b}(\mathcal{T}) = \sum_{z\in D} \psi_{a,b}(\mathbb{F}_q^* O_{(1,z)}) = \sum_{\theta\in\mathbb{F}_q^*} \sum_{z\in D} \sum_{\mu\in C_0} \psi_{a,b}(\theta\mu, \theta\mu^{-1}z)$$
$$= \sum_{\theta\in\mathbb{F}_q^*} \sum_{\mu\in C_0} \psi_{\mathbb{F}_{q^3}}(b\theta\mu + a\theta\mu^{-1}z).$$

この指標和の計算は, 非常に複雑になるため, この論文では略する．詳細は論文 [11] を参照していただきたい．本質的な指標和の計算は, 指標の直交性を用いて,

$$\sum_{i=1}^{q-2} \sum_{\ell=0}^{q^2+q+1} G(\chi_2^i \chi_1^{-\ell}) G(\chi_2^{-i} \chi_1^{-\ell}) \chi_1^\ell(ab) \chi_2^i(ab^{-1}) \sum_{x\in D} \chi_2^i \chi_1^\ell(x)$$

の計算に落とすことができる．ここで, $G(\chi)$ は $\mathbb{F}_{q^3}$ の乗法的指標 χ に付随するガウス和を意味する．また, $\mathbb{F}_{q^3}$ の位数 q^3-1 の乗法的指標 χ を一つ固定する．この χ に対し, $\chi_1 = \chi^{q-1}$ と $\chi_2 = \chi^{q^2+q+1}$ と定める．D を用いた直接的な計算ではなく, 命題 4.1 を用いて, D を D_1 と D_2 に分解し, $G(\chi_2^i\chi_1^{-\ell})\sum_{x\in D_1}\chi_2^i\chi_1^\ell(x)$ と $G(\chi_2^{-i}\chi_1^{-\ell})\sum_{x\in D_2}\chi_2^i\chi_1^\ell(x)$ から先に計算を行うことで, うまく計算が進むようにできる．

また, 我々の得た CL line class について, その自己同型群の位数の大きさについても部分的に特徴付けることに成功している．詳細は, [11] を参照いただきたい．

最後に, 得られた CL line class とその構成法に関しコメントする．q が奇数の場合の CL line class の無限系列は, 約 20 年前に Bruen-Drudge (1999) によって初めて発見され, それ以降, q が奇数の場合は $x=(q^2-1)/2$ または $x=(q^2+1)/2$ の場合に限って, CL line class の無限系列の構成法が見つかっていた．一方で, q が偶数の場合は, 今回の研究で初めて無限系列を得たことになる．また, $x=(q+1)^2/3$ の場合が, 一般化されずに残っていた理由として, 計算機によって, もし存在すれば自己同型群の位数は大きくないだろうという予測があり, 構成の困難さがあったと思われる．実際, 得られた CL line class は, ある意味中間的な位数の自己同型群を持ち, また, 集合 D も, D_1 と D_2 という 2 つの多重集合の共通部分として定義され, 幾何学的な良い記述は難しいように思われる．

謝辞

This research was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 20K03719, and this work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] A.A. Bruen, K. Drudge, The construction of Cameron-Liebler line classes in PG$(3,q)$, *Finite Fields Appl.* **5** (1999), 35–45.

[2] P.J. Cameron, R.A. Liebler, Tactical decompositions and orbits of projective groups, *Linear Algebra Appl.* **46** (1982), 91–102.

[3] A. Cossidente, F. Pavese, Cameron-Liebler line classes of PG$(3,q)$ admitting PGL$(2,q)$, *J. Combin. Theory, Series A* **167** (2019), 104–210.

[4] A. Cossidente, F. Pavese, New Cameron-Liebler line classes with parameter $\frac{q^2+1}{2}$, *J. Algebraic Combin.* **49** (2019), 193–208.

[5] J. De Beule, J. Demeyer, K. Metsch, M. Rodgers, A new family of tight sets in $\mathcal{Q}^+(5,q)$, *Des. Codes Cryptogr.* **78** (2016), 655–678.

[6] M. De Boeck, M. Rodgers, L. Storme, A. Švob, Cameron-Liebler sets of generators in finite classical polar spaces, *J. Combin. Theory, Ser. A* **167** (2019), 340–388.

[7] M. De Boeck, L. Storme, A. Švob, The Cameron-Liebler problem for sets, *Discrete Math.* **339** (2016), 470–474.

[8] J. D'haeseleer, J. Mannaert, L. Storme, A. Švob, A. Cameron-Liebler line classes in $AG(3, q)$, *Finite Fields Appl.* **67** (2020), 101706.

[9] K. Drudge, On a conjecture of Cameron and Liebler, *European J. Combin.* **20** (1999), 263–269.

[10] T. Feng, K. Momihara, Q. Xiang, Cameron-Liebler line classes with parameter $x = \frac{q^2-1}{2}$, *J. Combin. Theory Ser. A* **133** (2015), 307–338.

[11] T. Feng, K. Momihara, M. Rodgers, Q. Xiang, H. Zou, Cameron-Liebler line classes with parameter $x = \frac{(q+1)^2}{3}$, *Adv. Math.* **385** (2021), 107780.

[12] Y. Filmus, F. Ihringer, Boolean degree 1 functions on some classical association schemes, *J. Combin. Theory, Ser. A* **162** (2019), 241–270.

[13] P. Govaerts, T. Penttila, Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3, 4)$, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **12** (2005), 793–804.

[14] A.L. Gavrilyuk, K. Metsch, A modular equality for Cameron-Liebler line classes, *J. Combin. Theory, Ser. A* **127** (2014), 224–242.

[15] A.L. Gavrilyuk, I, Matkin, T. Penttila, Derivation of Cameron-Liebler line classes, *Des. Codes Cryptogr.* **86** (2018), 231–236.

[16] K. Metsch, An improved bound on the existence of Cameron-Liebler line classes, *J. Combin. Theory, Ser. A* **121** (2014), 89–93.

[17] M. Rodgers, Cameron-Liebler line classes, *Des. Codes Cryptogr.* **68** (2013), 33–37.

[18] M. Rodgers, L. Storme, A. Vansweevelt, Cameron-Liebler k-classes in $\mathrm{PG}(2k + 1, q)$, *Combinatorica* **38** (2018), 739–757.