Second order asymptotics in Bayesian estimation for a one-sided truncated family of distributions

筑波大学　赤平　昌文
Masafumi Akahira
University of Tsukuba
筑波大学・数理物質系　大谷内　奈穂
Nao Ohyauchi
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1. はじめに

統計学の応用分野においてパレート (Pareto) 分布は重要な役割を果す．実際, 経済学, 物理学, 水文学, 地質学, 天文学等の分野において広範に用いられている．パレート分布については, その歴史的概略を含めて Arnold[Ar15] において, また, Johnson et al. [JKB94] においても論じられている．さらに, パレート分布を含む, 切断母数 γ と自然母数 θ をもつ切断指数型分布族において, γ(または θ) を局外母数として大きさ n の無作為標本に基づく θ(または γ) の最尤推定, ベイズ (Bayes) 推定が論じられた (Akahira[A17])．特に, γ が既知のときの θ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator, 略して MLE)$\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と γ が未知のときの θ の MLE$\hat{\theta}_{ML}$ が 1 次のオーダーでは漸近的に同等であることが Bar-Lev[B84] において示されたが, 2 次のオーダーでは補正 MLE$\hat{\theta}_{ML^*}$ が, $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ より漸近的に良くないことが示されるとともに $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失も求められた ([A17])．また, ベイズ推定においても最尤推定の場合と同様の結果が得られた ([A17])．さらに下側切断指数型分布族を拡張して, 一般の下側切断分布族における最尤推定も考察できる (Akahira[A21])．

本稿では, 局外母数 θ と切断母数 γ をもつ一般の下側切断分布族において, θ が既知または未知の場合に γ のベイズ推定量の確率展開 (stochastic expansion) を求め, θ が既知のときの γ のベイズ推定量に対する θ が未知のときの γ のベイズ推定量の 2 次の漸近損失を, 2 次の漸近分散を用いて求める．その際, 未知の母数 θ を θ の MLE で代用する．また, 下側切断指数型分布族の場合の結果はその系となるが, 基本的な構造は変わらないことを示し, 例として切断コーシー分布の場合を挙げる．

2. 片側切断分布族における切断母数のベイズ推定量

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} p(x,\theta)/b(\theta,\gamma) & (c < \gamma \leq x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.1}$$

をもつ分布 $P_{\theta,\gamma}$ に従う確率変数列とする．ただし, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ とし, $p(x,\theta)$ は区間 $[\gamma, d)$ 上で正値とする．また, $\gamma \in (c,d)$ について

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \;\middle|\; 0 < b(\theta,\gamma) := \int_{\gamma}^{d} p(x,\theta)dx < \infty \right\} \tag{2.2}$$

とおくと, $\gamma_1 < \gamma_2$ となる任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in (c,d)$ について $\Theta(\gamma_1) \subset \Theta(\gamma_2)$ になる. ここで, 任意の $\gamma \in (c,d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間であると仮定する. このとき, 分布族 $\mathcal{P}_o = \{P_{\theta,\gamma} \mid \theta \in \Theta, \gamma \in (c,d)\}$ を片側切断分布族 (one-sided truncated family (oTF) of distributions) という. 厳密には下側切断分布族 (Lower-truncated family (ℓTF) of distributions) という. 特に, (2.1) において

$$p(x,\theta) = a(x)e^{\theta u(x)} \tag{2.3}$$

の形になるとき, 片側切断指数型分布族 (one-sided truncated exponential family (oTEF) of distributions) $\mathcal{P}_e$ という ([B84], [A17]). ただし, $a(\cdot)$ は正値でほとんど至るところ連続で, 区間 (γ,d) 上で $u(\cdot)$ は絶対連続で $du(x)/dx \not\equiv 0$ とする.

次に, $p(x,\theta)$ が区間 $[\gamma,d)$ のほとんどすべての x について, θ に関して 3 回微分可能であるとし, $b(\theta,\gamma)$ の積分記号下で θ に関して 3 回微分可能であると仮定する. また,

$$\lambda_1(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X_1,\theta)\right], \quad \lambda_2(\theta,\gamma) = V_{\theta,\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X_1,\theta)\right), \tag{2.4}$$

$$\tilde{\lambda}_3(\theta,\gamma) := \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lambda_1(\theta,\gamma), \tag{2.5}$$

$$\lambda_{(j)}(\theta,\gamma) := \frac{1}{b(\theta,\gamma)}\left\{\frac{\partial^j}{\partial\theta^j}b(\theta,\gamma)\right\} \quad (j=1,2,3) \tag{2.6}$$

とおく. このとき

$$\lambda_{(1)}(\theta,\gamma) = \lambda_1(\theta,\gamma) \tag{2.7}$$

になる. また, $\ell(\theta,x) := \log p(x,\theta)$, $\ell^{(j)}(\theta,x) := (\partial^j/\partial\theta^j)\ell(\theta,x)$ $(j=1,2,3)$ とおき, 次の期待値は存在すると仮定し, それらを左辺の記号で表わす.

$$I_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^2\right], \tag{2.8}$$

$$J_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}\left\{\ell^{(2)}(\theta,X_1)\right\}\right], \tag{2.9}$$

$$K_p(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^3\right]. \tag{2.10}$$

このとき, (2.6), (2.8)〜(2.10) より

$$\kappa_{(2)}(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\ell^{(2)}(\theta,X_1)\right] = \lambda_{(2)}(\theta,\gamma) - I_p(\theta,\gamma), \tag{2.11}$$

$$\kappa_{(3)}(\theta,\gamma) := E_{\theta,\gamma}\left[\ell^{(3)}(\theta,X_1)\right] = \lambda_{(3)}(\theta,\gamma) - 3J_p(\theta,\gamma) - K_p(\theta,\gamma) \tag{2.12}$$

になる. また

$$Z_1(\theta,\gamma) := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(\theta,\gamma)n}}\sum_{i=1}^n\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_i) - \lambda_1(\theta,\gamma)\right\}, \tag{2.13}$$

$$Z_2(\theta,\gamma) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\ell^{(2)}(\theta,X_i)-\kappa_{(2)}(\theta,\gamma)\right\} \tag{2.14}$$

とおく.

次に, $\pi(\gamma)$ を開区間 (c,d) 上の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度とし, $L(\hat{\gamma},\gamma)$ を $\boldsymbol{X} := (X_1,\cdots,X_n)$ に基づく γ の任意の推定量 $\hat{\gamma}=\hat{\gamma}(\boldsymbol{X})$ の 2 乗損失 $(\hat{\gamma}-\gamma)^2$ とする. ここで, θ を Θ に任意に固定する. このとき, L と π に関する γ のベイズ推定量は

$$\hat{\gamma}_{B,\theta}(\boldsymbol{X}) := \int_c^{X_{(1)}}\frac{t\pi(t)}{b^n(\theta,t)}dt \Bigg/ \int_c^{X_{(1)}}\frac{\pi(t)}{b^n(\theta,t)}dt \tag{2.15}$$

になる. ただし, $X_{(1)} := \min_{1\le i\le n} X_i$ とする.

なお, 本稿における漸近平均, 漸近分散の定義は Akahira and Takeuchi[AT87] に依るが, それらの高次への拡張も可能である.

3. 局外母数 θ が既知のときの切断母数 γ のベイズ推定

まず, $v := n(t-\gamma)$ とおくと, (2.15) より

$$\hat{\gamma}_{B,\theta}(\boldsymbol{X}) = \gamma + \frac{1}{n}\left(\int_{\tau_n}^{T_{(1)}}\frac{v\pi\left(\gamma+(v/n)\right)}{b^n\left(\theta,\gamma+(v/n)\right)}dv \Bigg/ \int_{\tau_n}^{T_{(1)}}\frac{\pi\left(\gamma+(v/n)\right)}{b^n\left(\theta,\gamma+(v/n)\right)}dv\right)$$

となる. ただし, $\tau_n := n(c-\gamma)$, $T_{(1)} = n(X_{(1)}-\gamma)$ とする. また,

$$b_{(j)}(\theta,\gamma) := \frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\log b(\theta,\gamma) \quad (j=1,2,\cdots), \tag{3.1}$$

$$\pi_{(j)}(\gamma) := \frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\log\pi(\gamma) \quad (j=1,2,\cdots) \tag{3.2}$$

になる. ここで, (2.2), (3.1) より

$$k(\theta,\gamma) := \frac{p(\gamma,\theta)}{b(\theta,\gamma)} = -b_{(1)}(\theta,\gamma) \tag{3.3}$$

となる. このとき, 次の定理を得る.

定理 1 密度 (2.1) をもつ oTF $\mathcal{P}_o$ について, θ が既知のとき $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ を 2 乗損失 L と事前密度 π に関する γ のベイズ推定量 (2.15) とする. このとき, $T_{B,\theta} := n(\hat{\gamma}_{B,\theta}-\gamma)$ の確率展開は

$$\begin{aligned} T_{B,\theta} =& T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)T_{(1)} \\ &- \frac{1}{k^2 n}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)-\pi_{(1)}\right\} + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

であり, $kT_{B,\theta}$ の漸近平均, 漸近分散は, それぞれ

$$E_\gamma(kT_{B,\theta}) = -\frac{1}{kn}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)-\pi_{(1)}\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.5}$$

$$V_\gamma(kT_{B,\theta}) = 1 - \frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.6}$$

である．ただし，k，$\pi_{(1)}$ は，それぞれ (3.3)，(3.2) における $k = k(\theta,\gamma)$，$\pi_{(1)} = \pi_{(1)}(\gamma)$ とする．

証明は [A17] の oTEF の場合の Theorem 6.3.1 のそれと同じである．

注意 1 母数 θ が既知の場合，$\hat{k}_\theta = k(\theta, X_{(1)})$ とすると γ の偏り補正した MLE $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ は

$$X^*_{(1)} := X_{(1)} - \frac{1}{\hat{k}_\theta n}$$

になり，$T^*_{(1)} = n(X^*_{(1)} - \gamma)$ の確率展開は (3.4) の右辺において

$$-\frac{1}{k^2 n}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) - \pi_{(1)}\right\}$$

を除いたものになる ([A17] の Remark 6.3.1 参照)．このとき，

$$k(T_{B,\theta} - T^*_{(1)}) = -\frac{1}{kn}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) - \pi_{(1)}\right\} + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となり，(3.5)，(3.6) より $kT_{B,\theta}$ と $kT^*_{(1)}$ は $1/n$ のオーダーでは漸近平均が異なるが，

$$V_\gamma(kT_{B,\theta}) - V_\gamma(kT^*_{(1)}) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となって，それらの漸近分散は $o(1/n)$ のオーダーまで漸近的に等しく，また $kT_{B,\theta}$ の漸近分散は $o(1/n)$ のオーダーまで事前密度 π に無関係になる．

4. 局外母数 θ が未知のときの切断母数 γ のベイズ推定

まず，$\gamma \le x_{(1)} := \min_{1\le i\le n} x_i$，$x_{(n)} := \max_{1\le i\le n} x_i < d$ を満たす $\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n)$ について (θ,γ) の尤度関数は

$$L(\theta,\gamma;\boldsymbol{x}) := \frac{1}{b^n(\theta,\gamma)}\prod_{i=1}^n p(x_i,\theta) \tag{4.1}$$

になる．このとき，(4.1) より任意に固定した $\theta \in \Theta$ について，γ の MLE は $\hat{\gamma}_{ML} = X_{(1)}$ となる．また，任意に固定した $\gamma \in (c,d)$ について，θ の尤度方程式 $(1/n)\sum_{i=1}^n \ell^{(1)}(\theta,\gamma) = \lambda_1(\theta,\gamma)$ が各 n と $\boldsymbol{x}$ について唯一つの解を持つと仮定すれば，$n\to\infty$ のとき漸近的に確率 1 で $\hat{\theta}_n$ は θ の MLE になるので，$(1/n)\sum_{i=1}^n \ell^{(1)}(\theta,\hat{\gamma}_{ML}) = \lambda_1(\theta,\hat{\gamma}_{ML})$ の解は $n\to\infty$ のとき漸近的に確率 1 で θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ になる．よって $\hat{\theta}_{ML}$ は漸近的に確率 1 で尤度方程式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ell^{(1)}(\hat{\theta}_{ML}, X_i) = \lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$$

を満たす．

ここで, $\lambda_2 = \lambda_2(\theta, \gamma)$ と表わし, $U := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta)$ とおく. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 2 密度 (2.1) をもつ oTF $\mathcal{P}_o$ について, θ が未知のときに (2.15) のベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ において θ に $\hat{\theta}_{ML}$ を代入した推定量を $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ とする. このとき, $T_{B,\hat{\theta}_{ML}} := n(\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}} - \gamma)$ の確率展開は

$$\begin{aligned}
T_{B,\hat{\theta}_{ML}} =& T_{(1)} - \frac{1}{k} \\
&+ \frac{1}{k^2\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)\left[U + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left\{\frac{1}{k}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) - \frac{1}{\lambda_2}\left(J_p - \lambda_1\kappa_{(2)} + \frac{\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3}{2}\right)\right\}\right] \\
&+ \frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\log k\right)T_{(1)} + \frac{1}{2k^2\lambda_2 n}\left\{\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} - \frac{2}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\right\}(U^2 - 1) \\
&+ \frac{B}{kn} + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

である. ただし

$$\begin{aligned}
B :=& \frac{1}{2k\lambda_2}\left\{\frac{2}{\lambda_2}\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)\left(J_p - \lambda_1\kappa_{(2)} + \frac{\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3}{2}\right) + \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}\right\} \\
&- \frac{1}{k}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\log k\right) - \pi_{(1)}\right\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

とする. また, $kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の漸近平均, 漸近分散は, それぞれ

$$E_{\theta,\gamma}\left[kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}\right] = \frac{B}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{4.4}$$

$$V_{\theta,\gamma}\left(kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}\right) = 1 - \frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\log k\right) + \frac{1}{\lambda_2 n}\left\{\ell^{(1)}(\theta, \gamma) - \lambda_1\right\}^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{4.5}$$

である.

証明は, [A17] の oTEF の場合の Theorem 6.4.1 のそれと同様ではあるが, 分布族を一般化したことによって少し複雑にはなる. なお, U の確率展開は

$$U = Z_1 + \frac{1}{\lambda_2\sqrt{n}}Z_1Z_2 + \frac{\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right)T_{(1)} + O_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり,

$$E_{\theta,\gamma}(U) = \frac{1}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}\left\{J_p - \lambda_1\kappa_{(2)} + \frac{1}{2}\left(\kappa_{(3)} - \tilde{\lambda}_3\right)\right\} + \frac{1}{b_{(1)}\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E_{\theta,\gamma}(U^2) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる ([A21]). ただし, Z_1, Z_2 をそれぞれ (2.13), (2.14) とする.

注意 2 $T_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の確率展開 (4.2) において U を含む項は $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ の θ に $\hat{\theta}_{ML}$ を代入したことから生ずる. また, (4.3), (4.4) より $kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の漸近平均, 漸近分散において λ_2, J_p, $\kappa_{(2)}$, $\kappa_{(3)}$, $\tilde{\lambda}_3$ に依存する項も同様の要因と考えられる.

注意 3 $T_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の確率展開 (4.2) の右辺の $B/(kn)$ を除いた部分は $o(n^{-1})$ のオーダーまで $T_{(1)}^{**} := n(X_{(1)}^{**} - \gamma)$ の確率展開と一致する. ここで

$$\begin{aligned}X_{(1)}^{**} :=& X_{(1)} - \frac{1}{\hat{k}n} - \frac{1}{\hat{k}^2\hat{\lambda}_2 n^2}\left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial\theta}\right)\left(\hat{J}_p - \hat{\lambda}_1\hat{\kappa}_{(2)} + \frac{\hat{\kappa}_{(3)} - \hat{\tilde{\lambda}}_3}{2}\right)\\ &- \frac{1}{2\hat{k}^2\hat{\lambda}_2 n^2}\left(\frac{\partial^2\hat{k}}{\partial\theta^2}\right)\end{aligned}$$

は γ の偏り補正した MLE $\hat{\gamma}_{ML^*}$ で, $\hat{k} = k(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$, $\partial^j\hat{k}/\partial\theta^j = (\partial^j/\partial\theta^j)(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$ $(j = 1,2)$, $\hat{\lambda}_j = \lambda_j(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$ $(j = 2,3)$, $\hat{J}_p = J_p(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$, $\hat{\kappa}_{(j)} = \kappa_{(j)}(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$ $(j = 2,3)$, $\hat{\tilde{\lambda}}_3 = \tilde{\lambda}_3(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$ とする (Akahira and Ohyauchi[AO21]). このとき,

$$k(T_{B,\hat{\theta}_{ML}} - T_{(1)}^{**}) = \frac{B}{n} + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

となり, $kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ と $kT_{(1)}^{**}$ は $1/n$ のオーダーでは漸近平均が異なるが,

$$V_{\theta,\gamma}(kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}) - V_{\theta,\gamma}(kT_{(1)}^{**}) = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

となり, $kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ と $kT_{(1)}^{**}$ の漸近分散は $o(1/n)$ のオーダーまで漸近的に等しく, また $kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の漸近分散は $o(1/n)$ のオーダーまで事前密度 π に無関係になる.

特に, 分布族を oTEF $\mathcal{P}_e$ に制限すれば次の系が得られる.

系 1([A17]) $p(x,\theta)$ として (2.3) をもつ oTEF $\mathcal{P}_e$ について, θ が未知のときに (2.15) のベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ において θ に $\hat{\theta}_{ML}$ を代入した推定量を $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ とする. このとき, $T_{B,\hat{\theta}_{ML}} = n(\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}} - \gamma)$ の確率展開は

$$\begin{aligned}T_{B,\hat{\theta}_{ML}} =& T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)\left[U + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left\{\frac{1}{k}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}\right) + \frac{\lambda_3}{2\lambda_2}\right\}\right]\\ &+ \frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)T_{(1)} + \frac{1}{2k^2\lambda_2 n}\left\{\frac{\partial^2 k}{\partial\theta^2} - \frac{2}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)^2\right\}(U^2 - 1)\\ &+ \frac{B}{kn} + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

である. ただし,

$$B := -\frac{1}{2\lambda_2}\left\{\frac{\lambda_3}{k\lambda_2}\left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial\theta^2}\right)\right\} - \frac{1}{k}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) - \pi_{(1)}\right\}, \tag{4.7}$$

$k = k(\theta,\gamma)$, $\lambda_j = \lambda_j(\theta,\gamma)$ $(j = 1,2,3)$ とする．また, $kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の漸近平均と漸近分散は, それぞれ

$$E_{\theta,\gamma}[kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}] = \frac{B}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{4.8}$$

$$V_{\theta,\gamma}(kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}) = 1 - \frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) + \frac{1}{\lambda_2 n}\{u(\gamma) - \lambda_1\}^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{4.9}$$

である．

証明 oTEF の場合には, (2.2), (2.3), (2.5), (2.11), (2.12) より, $\kappa_{(2)} = \kappa_{(3)} = 0$, $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 := (\partial^3/\partial\theta^3)\log b(\theta,\gamma)$, $J_p = 0$, $\ell^{(1)}(\theta,\gamma) = u(\gamma)$ になるから (4.2)〜(4.5) より (4.6)〜(4.9) を得る．□

5. $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の 2 次の漸近損失

第 2 節において, θ が既知のとき γ のベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ の漸近分散を求め, 第 3 節において θ が未知のとき θ の MLE を用いた γ のベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の漸近分散を求めた．ここで, $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の 2 次の漸近損失 (second order asymptotic loss) を

$$d_n(\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}, \hat{\gamma}_{B,\theta}) := n\left\{V_{\theta,\gamma}(kT_{B,\hat{\theta}_{ML}}) - V_{\theta,\gamma}(kT_{B,\theta})\right\}$$

で定義し, $n \to \infty$ のときのその極限を求める．

定理 3 密度 (2.1) をもつ oTF $\mathcal{P}_o$ について, $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n(\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}, \hat{\gamma}_{B,\theta}) = \frac{1}{\lambda_2}\left\{\ell^{(1)}(\theta,\gamma) - \lambda_1\right\}^2 + o(1) \quad (n \to \infty)$$

である．

証明は定理 1, 2 より自明．

系 2([A17]) $p(x,\theta)$ として (2.3) をもつ oTEF $\mathcal{P}_e$ について, $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n(\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}, \hat{\gamma}_{B,\theta}) = \frac{1}{\lambda_2}\left\{u(\gamma) - \lambda_1\right\}^2 + o(1) \quad (n \to \infty)$$

である．

証明は定理 3 と (2.3) より自明．

次に, oTEF に属さず, oTF に属する分布の例として片側切断コーシー分布の場合を考える．

例 (片側切断コーシー分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立にいずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f(x,\theta) = \frac{1}{b(\theta,\gamma)}\left\{1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\}^{-1} \quad (-\infty < \gamma \leq x < \infty)$$

に従う確率変数列とする. ここで, $\theta > 0$, $p(x,\theta) = \{1+(x/\theta)^2\}^{-1}$ とする. このとき

$$b(\theta,\gamma) = \int_\gamma^\infty \left\{1+\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\}^{-1} dx = \theta\int_{\frac{\gamma}{\theta}}^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \theta\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\gamma}{\theta}\right) \tag{5.1}$$

になる. また,

$$\ell(\theta,x) = \log p(x,\theta) = -\log\left(1+\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right)$$

より

$$\ell^{(1)}(\theta,x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta,x) = \frac{2}{\theta}\cdot\frac{(x/\theta)^2}{1+(x/\theta)^2} \tag{5.2}$$

になる. そして, (2.4), (5.1) より

$$\lambda_1(\theta,\gamma) = \frac{\partial}{\partial\theta}b(\theta,\gamma) \Big/ b(\theta,\gamma) = \frac{1}{\theta}\left\{1+\frac{\frac{\gamma}{\theta}}{\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\gamma}{\theta}\right)\left(1+\left(\frac{\gamma}{\theta}\right)^2\right)}\right\} \tag{5.3}$$

となり, $\xi = \gamma/\theta$ とおくと (5.2), (5.3) より

$$\ell^{(1)}(\theta,\gamma) - \lambda_1(\theta,\gamma) = \frac{1}{\theta(1+\xi^2)}\left(\xi^2 - 1 - \frac{\xi}{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\xi}\right) \tag{5.4}$$

となる. 次に, (5.2) より

$$\begin{aligned} E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^2\right] =& E_{\theta,\gamma}\left[\frac{4(X_1/\theta)^4}{\theta^2(1+(X_1/\theta)^2)^2}\right] = \frac{4}{\theta b(\theta,\gamma)}\int_{\gamma/\theta}^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt \\ =& \frac{4}{\theta^2\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\gamma}{\theta}\right)}\int_{\gamma/\theta}^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt \end{aligned} \tag{5.5}$$

となるから, (2.4), (5.3), (5.5) より

$$\begin{aligned} \lambda_2(\theta,\gamma) =& V_{\theta,\gamma}\left(\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right) = E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X_1)\right\}^2\right] - \lambda_1^2(\theta,\gamma) \\ =& \frac{4}{\theta^2\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\gamma}{\theta}\right)}\int_{\gamma/\theta}^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt - \frac{1}{\theta^2}\left\{1+\frac{\frac{\gamma}{\theta}}{\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\gamma}{\theta}\right)\left(1+\left(\frac{\gamma}{\theta}\right)^2\right)}\right\}^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる. このとき, 定理 3, (5.4) より $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の 2 次の漸近損失は

$$d_n\left(\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}, \hat{\gamma}_{B,\theta}\right) = \frac{1}{\theta^2\lambda_2(1+\xi^2)}\left(\xi^2 - 1 - \frac{\xi}{(\pi/2) - \tan^{-1}\xi}\right)^2 + o(1) \quad (n \to \infty) \tag{5.7}$$

となる. ここで, $\lambda_2 = \lambda_2(\theta, \gamma)$ は (5.6) より

$$\lambda_2(\theta,\gamma) = \frac{1}{\theta^2}\left[\frac{4}{\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\xi}\int_\xi^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt - \left\{1 + \frac{\xi}{\left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\xi\right)(1+\xi^2)}\right\}^2\right]$$

となるので, $\lambda_2^*(\theta,\gamma) = \theta^2\lambda_2(\theta,\gamma)$ とする.

特に, $\gamma = 0$ とすると $\xi = 0$ となり (5.6) より

$$\lambda_2^*(\theta, 0) = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt - 1 \tag{5.8}$$

となる. このとき

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt &= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt - 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}dt + \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^3}dt \\ &= \frac{3}{16}\pi\end{aligned}$$

となるから, これを (5.8) に代入すると

$$\lambda_2^*(\theta, 0) = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{3}{16}\pi - 1 = \frac{1}{2}$$

となり, (5.7) より

$$d_n(\gamma_{B,\hat{\theta}_{ML}}, \gamma_{B,\theta}) = \frac{1}{\lambda_2^*} + o(1) = 2 + o(1) \quad (n \to \infty)$$

になる.

上記の例の片側切断コーシー分布を一般化した, 自由度 ν の t 分布を切断した片側切断 t_ν 分布 ([A21], [AO21]) についても同様に定理 3 を適用可能である.

6. おわりに

片側切断分布族 $\mathcal{P}_o$ の切断母数 γ の推定問題において, 最尤推定の場合には偏り補正を行った上で 2 次の漸近損失を求めたが, ベイズ推定の場合には偏り補正を不要とする長所がある. また, ベイズ推定の場合に事前密度 π は γ の推定量の漸近平均の $1/n$ のオーダーには影響を与えるが, 漸近分散の $1/n$ のオーダーには影響しないので 2 次の漸近損失は π に無関係になる. 本論では下側切断分布族の場合に論じたが, 適当な変換によって上側切断分布族において同様な結果が成り立つ ([A17] の Remark 4.5.3 参照).

従来, 切断指数型分布族 $\mathcal{P}_e$ において最尤推定, ベイズ推定について論じたが ([A17]), 指数型であることは本質的ではなく, 一般の切断分布族 $\mathcal{P}_o$ で同様の結果が得られる.

参考文献

[A17] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation for Truncated Exponential Families*. Springer Briefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Singapore: Springer Nature.

[A21] Akahira, M. (2021). Maximum likelihood estimation for a one-sided truncated family of distributions. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **4**, 317–344.

[Ar15] Arnold, B. C. (2015). *Pareto Distributions*. (2nd ed.), CRC Press, Boca Raton.

[AO21] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2021). Asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter in the presence of a nuisance parameter for a one-sided truncated family of distributions. Submitted for publication.

[AT87] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1987). On the definition of asymptotic expectation. In: *Foundations of Statistical Inference*, I. B. MacNeill and G. J. Umphrey (Eds.), D. Reidel Publishing Company, 199–208. (Also included In: "*Joint Statistical Papers of Akahira and Takeuchi*," World Scientific, New Jersey, 2003).

[B84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[JKB94] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1 (2nd ed.), Wiley, New York.