区間演算を用いた反復計算について

Iterative computation with the use of interval arithmetic

関東学院大学　大墨礼子 [*1]
Noriko Osumi
Kanto Gakuin University

香川高等専門学校　近藤祐史 [*2]
Yuji Kondoh
National Institute of Technology, Kagawa College

防衛大学校　藤村雅代 [*3]
Masayo Fujimura
National Defense Academy

Abstract

The aim of this study is to find a method to draw Julia set with less error. We have tried several method to reduce errors, and in this paper, we compute Julia sets of polynomials with interval number coeffients which have tiny widths. From those experimental results, we will explore expansion and error suppressing methods for general iterative computation.

1　はじめに

ジュリア集合は複素力学系の研究対象となる集合であり，その性質として，不安定な集合であるため，正確な描画は難しいとされている．ジュリア集合の描画では多くの反復合成を行い，点の挙動を調べる必要がある．しかし，これらの描画には，ジュリア集合自身の不安定性に基づく問題もあるが，計算に浮動小数点数を用いることによって起こる問題が大きく影響している．

本研究では，描画アルゴリズムのうち，単純な反復計算のみを行うレベルセット法を扱う．レベルセット法において浮動小数点数演算を用いると，丸め誤差の影響を大きく受け，描画されたものがどの程度正しいのかの判断が不可能である．図 1 は，浮動小数点数を用いて $c = -0.778264 + 0.1155285i$ の場合のレベルセット法での描画結果である．反復回数を増加させれば，ジュリア集合として描画される点は絞り込めるが，誤差の影響が大きいため，残った点に対しても，また描画されない点に関しても正しい計算結果であるとは言い切れない．

これらの誤差の影響を抑えるため，これまで筆者らは数式処理システム上で区間数を用いた計算を行い，その挙動の分析を行ってきた [3][4]．また，数式処理システム Risa/Asir の区間数にはゼロ書き換えモード

[*1] E-mail: `osumi@kanto-gakuin.ac.jp`
[*2] E-mail: `kondoh@di.kagawa-nct.ac.jp`
[*3] E-mail: `masayo@nda.ac.jp`

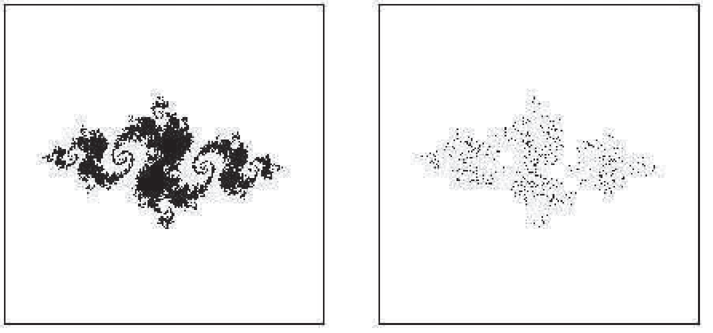


図 1: $c = -0.778264 + 0.1155285i$ のレベルセット法による描画 (左：繰り返し回数 500 回, 右: 繰り返し回数 50000 回)

の実装もされており，区間数と合わせてゼロ書き換えによる誤差の抑制を期待できる．これまでの計算実験では，区間数を各格子点間であるとし，その挙動を分析した．本研究では，より誤差の影響を少なくするために区間数の取り方について検討を行い，その計算結果について示す．

2　区間演算の反復計算への適用

区間演算は区間を数の拡張と考え，その間の四則演算を定義する．実数で与えられる真値の上限と下限を浮動小数点数とし，浮動小数点数演算により実装する場合，厳密には機械区間演算と呼ばれる [1] が，ここでは，単に区間演算と呼ぶ．実装に際しては，上限下限の計算時に浮動小数点数の丸めモードを変更することにより，得られた区間に真値が必ず含まれる，つまり，下限以上で上限以下の区間に真の値があることを保証する．

数式処理システム Risa/Asir では区間演算の実装がなされている [2]．Risa/Asir 上での区間演算及び区間数とは，

$$A = \{x | \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\} \qquad x, \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}$$

なる A を区間数と呼び，$A = [\underline{a}, \overline{a}]$ と表す．ただし，$\underline{a} \leq \overline{a}$ とする．$\underline{a}, \overline{a}$ それぞれを区間数の下限，上限と呼ぶ．また，2 つの区間数 $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ の間の演算を次のように定義する．ここで，英大文字は区間数，英小文字は実数を表す．

$$\left\{\begin{array}{lcl} A + B & = & [\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}], \\ A - B & = & [\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}], \\ A \cdot B & = & [\underline{a}, \overline{a}] \cdot [\underline{b}, \overline{b}] = [\min(\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{ab}), \max(\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{ab})], \\ A \;/\; B & = & [\underline{a}, \overline{a}] \;/\; [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a}, \overline{a}] \cdot [1/\overline{b}, 1/\underline{b}] \\ & = & [\min(\underline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}), \max(\underline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b})], \\ & & (\text{ただし，} \quad 0 \notin B). \end{array}\right.$$

Risa/Asir では特に設定しない場合は，区間の範囲 a, b は double の浮動小数点数となる．

また，Risa/Asir の区間演算では，ゼロ書き換えモードが実装されている．ゼロ書き換えとは，区間演算の結果がゼロが含まれる区間数となった場合，その区間をゼロに置き換える演算のことである．

本研究では，Risa/Asir の区間演算を反復計算に適用し計算実験を行う．描画アルゴリズムとしてはレベルセット法を使用する．レベルセット法は，関数 f が多項式の場合，無限遠点は超吸引的不動点で，$J(f) = \partial A(\infty)$ であるという性質を用いて充填ジュリア集合を描くアルゴリズムである. 具体的には, 描画領域の各格子点 z に対して，f による軌道 $z, f(z), f^2(z), \ldots$ を計算し, 十分大きな正の値 $R > 2$ と十分大きな自然数 n で $|f^n(z)| > R$ となれば，$z \in A_0(\infty)$ と判定する．そうでなければ, 充填ジュリア集合の元と判定する．レベルセット法では, このような比較的単純なアルゴリズムで f の充填ジュリア集合の内点を描画することが出来る．さらに, $|f^n(z)| > R$ となる最小の n の値によりプロットする色を変化させることで, 充填ジュリア集合の境界であるジュリア集合を推測することが可能である.

本研究では, $f_c(z) = z^2 + c$, $(c \in \mathbb{C})$ とし, 各格子点は実軸，虚軸ともに -2 以上 2 以下の範囲で $\frac{1}{150}$ の幅で刻むものとする.

3　数式処理による計算実験

3.1　区間数の取り方の検討

筆者らはこれまで，区間演算を用いた Julia 集合の計算および描画実験を行ってきた [3][4]．これらの実験で区間数を用いる際には，描画領域の各格子点間，z_i と z_{i+1} を区間数として演算している．各格子点間を区間数として計算する場合は，実軸上に存在する充填ジュリア集合に含まれる区間が描画されない．実軸上の点の挙動の計算は区間数がゼロを含む場合に相当すると考えられるため, ゼロ書き換えモードを用いれば補正できると推測し，区間数と合わせてゼロ書き換えモードを用いて描画を行ったところ，実軸上の黒点がより多く検出されて, 特に実軸の一部の描画がされた. ただし, 虚軸上の点の計算が不正確であり, 本来の充填ジュリア集合には属さない部分の虚軸上の点も充填ジュリア集合の点としてプロットされていることが観測された.

また，極座標系式において区間数を用いることを考え，Risa/Asir に三角関数に対応した区間数を実装し，これを用いて極座標系での描画実験を行った．結果として極座標形式では単純な区間数の適用と，区間数およびゼロ書き換えモードの適用では差がみられなかった.

これらの結果から，区間数を格子点間として演算する場合には，座標軸をはさんだ充填ジュリア集合の検出には区間数およびゼロ書き換えモードの適用が有効であることが考えられるが，原点の近くの開集合およびその逆像の描画には成功しているが, 実軸の一部およびその逆像は描けていないことが観測でき，区間数を Julia 集合の演算に用いるためには，さらなる工夫が必要であると考えた.

本研究では，演算に用いる区間数をどのようにとるかを検討しなおした．各格子点の値および c の値は,浮動小数点数を用いる限り誤差を排除することができない．今回は格子点間を区間とするのではなく，各値を微小な誤差 $\pm\alpha$ の範囲で真値があるものと考え，格子点および c からごくわずかに前後した範囲を区間とし，演算を行うこととした.

3.2　計算実験

数式処理 Risa/Asir を用いて，いくつかの c の値を用いてその描画結果を観察する．計算に際しては区間演算のゼロ書き換えモードを適用する．c の値には

- $c = -0.778264 + 0.1155285i$
- $c = -0.1226 + 0.7449i$

- $c = -0.222 + 0.71838i$

を用いる．

$c = -0.778264 + 0.1155285i$ の場合に，格子点及び c の値の範囲を $\pm\frac{5}{10000000000000000}$ で区間とし，計算した結果を図 2 に示す．図 1 は同様に $c = -0.778264 + 0.1155285i$ を用いて浮動小数点数でレベルセット法で計算した結果である．浮動小数点数での結果では，繰り返し回数を増やすと描画される点も少なくなるが，区間の幅を微細にとった場合，繰り返し回数を 150 回よりも増加させても描画される点が減り続けることはないという現象が確認された．

図 2: $c = -0.778264 + 0.1155285i$ の描画 (左：繰り返し回数 100 回, 右: 繰り返し回数 150 回)

DEM 法を用いて $c = -0.778264 + 0.1155285i$ の概形を図 3 に示す．DEM 法はジュリア集合の ε-近傍を描くアルゴリズムであり, 数学的に実状に近い描画が可能である．区間数を格子点間とした [4] では，繰り返し回数を増加させると本来あるべき点が誤差の影響を大きく受けて消えてしまうという状況が起こっており，特に境界に近い点ではその影響が顕著であった．今回の実験では，これらの現象は起きていない．

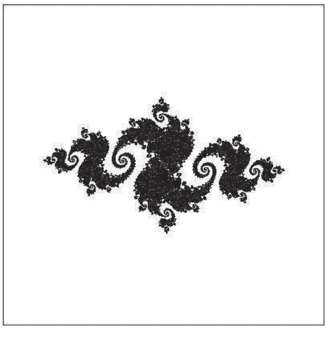


図 3: $c = -0.778264 + 0.1155285i$ の描画 DEM 法による描画

$c = -0.1226+0.7449i$，格子点および c の値を $\pm\frac{5}{10000000}$ の範囲で区間とし，繰り返し回数 100 回の場合の計算結果を図 4 に示す．同じ c の値を用いて，DEM 法で描画した結果を図 5 に示す．区間数を用いた計算でも，DEM 法に近い概形を描画し，また，繰り返し回数を 100 回よりも増加させても，$c = -0.778264+0.1155285i$ の場合と同様に，描画される点が減り続けることはない．

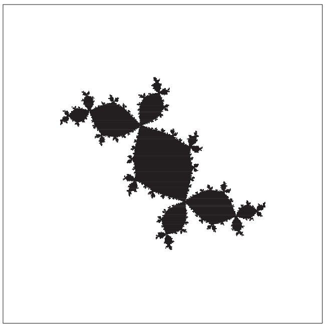


図 4: $c = -0.1226 + 0.7449i$ の区間演算での描画

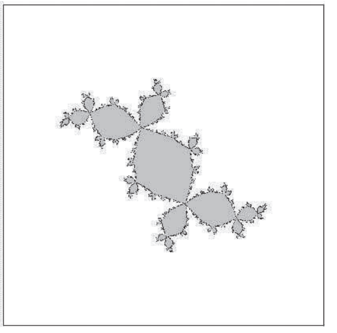
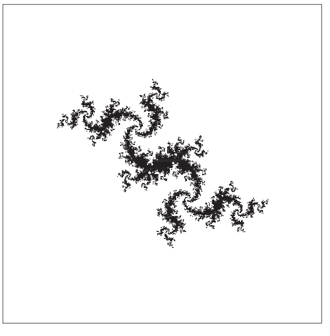


図 5: $c = -0.1226 + 0.7449i$ の DEM 法による描画

$c = -0.222 + 0.71838i$，格子点および c の値を $\pm\frac{5}{10000000}$ の範囲で区間とした計算結果を図 6 に示す．同じ c の値を用いて，DEM 法で描画した結果を図 7 に示す．$c = -0.222 + 0.71838i$ の場合でも，その他の c の値と同様に DEM 法に近い概形を描画していることが分かる．



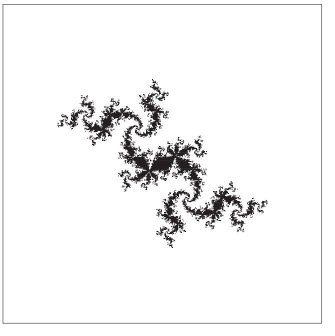


図 6: $c = -0.222 + 0.71838i$ の描画 (左：繰り返し回数 100 回, 右: 繰り返し回数 500 回)

4　まとめ

今回の実験では，区間数の幅をごく微細にとることで，比較的 DEM 法に近い見た目を持つ計算結果を得られた．比較的小さい繰り返し回数でそれらしい結果が得られ，また数値計算であるため演算速度も高速である．しかし，区間演算であっても数値計算であることに変わりはなく，誤差の影響は必ず発生する．さらに，区間数は演算を重ねるごとに区間が膨らむという特徴を持つ．区間が膨張すれば，ジュリア集合として値を満たさなくなる可能性もあり，本来であればジュリア集合として描画されるべき点が集合の範囲外だと判断されている可能性もある．

本研究の最終目標は，正確なジュリア集合の計算および描画である．正確さを求めるならすべての計算を有理数を用いて行えば実現できるが，現実問題としては実行時間などの面から実現が困難である．今回得られた，区間数を用いた計算での実験結果の詳細な状況を分析し，区間演算で描画できた点がどのような

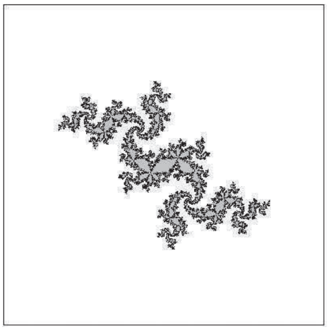


図 7: $c = -0.222 + 0.71838i$ の DEM 法による描画

意味，つまりジュリア集合として条件を満たし続ける点であるのか精査し，区間演算が反復計算において計算結果の保証に利用可能であるかを示していきたい．

参 考 文 献

[1] 大石進一，精度保証付き数値計算，コロナ社，2000.

[2] 近藤祐史, 区間演算と数式処理の歴史, 数式処理 Vol.12, No.1, pp.23-31, 2005.

[3] 大墨礼子, 近藤祐史, 藤村雅代, 反復計算への区間演算の適用について , 京都大学数理解析研究所講究録 2138, pp.59-63, 2019.

[4] 大墨礼子, 近藤祐史, 藤村雅代, 数式処理による反復演算について , 京都大学数理解析研究所講究録 2159, pp.11-17, 2020.