ゲーム理論における数式処理の応用
-浮動小数係数多項式系に対するグレブナ基底の計算-

Application of computer algebra system in game theory -Computation of Gröbner basis for polynomial systems with floating-point coefficients-

甲南大学知能情報学部　　高橋 正 [*1]
Tadashi Takahashi
Department of Intelligence and Informatics, Konan University

啓明学院　　宮寺 良平 [*2]
Ryohei Miyadera
Keimei Gakuin

Abstract

ゲーム理論におけるナッシュ交渉解は、個人的な立場からの意見も踏まえ、そのうえで、全体のバランスを考慮した結果を考える手立てである。ナッシュ交渉解を得るためには、まず、社会的総便益関数を求め、パレート解におけるナッシュ交渉解を求める。社会的総便益関数は両者の利得の総和であり、両者の利得は媒介変数による近似多項式で表せ、微小な浮動小数係数の項を有する多項式となる。そのような両者の利得の近似多項式系から媒介変数を消去し、両者の利得の関係式を求めるために、グレブナ基底を計算することはできない。

このような浮動小数係数の項を有する多項式系のグレブナ基底を計算する方法を示し、COVID-19 に対する医療機関の対策予算残額と営利活動自粛に対する補償を題材として、グレブナ基底の消去イデアルを用いた、社会的総便益関数のグラフの求め方を示す。

The Nash bargaining solution in game theory is a way of thinking about the result of considering the balance of the whole, based on the opinion from a personal standpoint. To get the Nash bargaining solution, first find the total social benefit function and find the Nash bargaining solution with the Pareto solution. The total social benefit function is the sum of the benefits of both, and the benefits of both can be represented by approximation polynomials with parametric variables, which are polynomials with some minute floating-point coefficient term. It is not possible to compute Gröbner basis in order to eliminate parametric variable from such both approximation polynomials and obtain a relational expression of approximation polynomials.

We show how to calculate the Gröbner basis in such a case, and graph the total social benefit function using the elimination ideal of the Gröbner basis for the remaining budget of medical institutions for COVID-19 and the compensation for self-restraint of commercial activities.

[*1] 〒 658-8501 兵庫県神戸市東灘区岡本 8-9-1　　E-mail: `takahasi@konan-u.ac.jp`
[*2] 〒 654-0131 兵庫県神戸市須磨区横尾 9-5-1

1　目的

様々なゲーム的状況ではプレイヤーの意思決定は相互に関連しプレイヤーが得る利得の戦略だけでなく、他のプレイヤーの戦略にも依存する。このようなプレイヤーの相互依存関係を表現する基本的なモデルが戦略形ゲームである。仲裁者の立場に立って、プレイヤー間の効用を相互比較する場合、決めなければならないことは、各プレイヤー共通の「原点」(交渉原点) をどこに置くかということである。すべてのプレイヤーの効用が、仲裁者の目から見てゼロ値と定義できる状態を定めなければならない。[1]

ナッシュ交渉解は、交渉領域において、2 人のプレイヤーの基準点からの利得増加分の積を最大化する点を妥結点とするナッシュが導出した交渉解である。正アフィン変換からの独立性、対称性、妥結点のパレート最適性、無関連な代替案からの独立性の公理を満たす交渉解である。[2]

ナッシュ交渉解を社会現象で考察するために、2019 年 12 月から流行した COVID-19 に対する医療機関の対策予算残額と営利活動自粛に対する補償を題材とする際、社会的総便益関数を決定することが必要となる。医療機関の対策予算残額と営利活動自粛に対する補償を利得と考えると社会的総便益関数は、その両者の総和であり、その両者の利得は媒介変数による近似多項式で表せ、微小な浮動小数係数の項を有する多項式となる。そのような両者の利得の近似多項式系から媒介変数を消去し、両利得の関係式を求めるには、そのままの多項式ではグレブナ基底を計算することはできない。このような微小な浮動小数係数の項を有する多項式系のグレブナ基底を計算する方法を示し、グレブナ基底の消去イデアルを用いた、社会的総便益関数のグラフの求め方を示す。

2　分析（付録に掲載する資料）

以下に、付録に掲載する資料（Mathematica を用いて計算したファイル）の説明を行う。

COVID-19 の死亡者数に関するデータとして Johns Hopskins 大学が集積しているデータ [3] を使用した。

第 3 波〜第 7 波の死亡者数のグラフを見て、いずれか 1 つの初期から終息を考察することを考え、第 5 波を対象として考察することにした。死亡者一人に対してある単位の感染者数がいると仮定して、感染者に必要な対策予算が使われるとし日数を変数とする関数（多項式）で近似した。営利活動自粛に対する補償金も日数を変数とする関数（多項式）で近似し、補償金額は日数を x とするとき sin 関数 のように増えると仮定した。ある医療機関の COVID-19 の第 5 波で国から予算措置されている金額を 500 億円、医療機関が感染者に必要となる対策費（治療費等）を死亡者 1 人に対して 1000 万円とし、社会的総便益関数のグラフの求め方を示した。

謝　辞

本研究の発表において、微小な浮動小数係数の項を有する近似多項式系から媒介変数を消去し、グレブナ基底を計算することについて、佐々木 建昭 筑波大学名誉教授から適切な助言を賜りました。ここに深謝の意を表します。

参　考　文　献

[1] 岡田　章 (2021). 『ゲーム理論』. 有斐閣

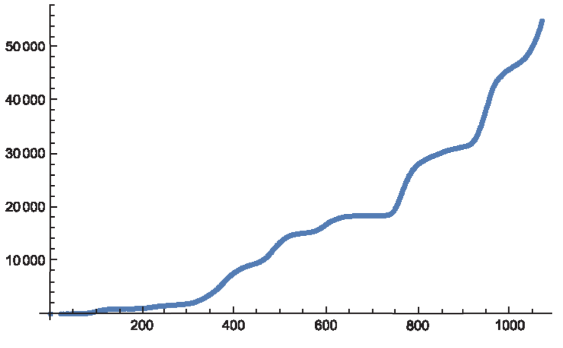
[2] 佐伯　胖 (2018). 『「きめ方」の論理-社会的決定理論への招待』.　筑摩書房

[3] https://coronavirus.jhu.edu/region/japan

付録-Mathematicaプログラム

```
In[•]:= country = "Japan";
        population = 126 × 860 × 299;
        urlCovid19 = "https://pomber.github.io/covid19/timeseries.json";
        data = Map[Association, Association[Import[urlCovid19]][country], {1}];
               適用  連想              連想          インポート
        ddata = {DateObject[#["date"]], #["deaths"]} & /@ data;
                 日付オブジェクト
        firstday = ddata[[1, 1]];
        Last[ddata]
        最後
Out[•]= {Day: Sat 24 Dec 2022, 55027}
```

```
In[•]:= i4 = Map[{QuantityMagnitude[#[[1]] - firstday], #[[2]]} &, ddata];
             適用  数量の値
        raw = Map[First, Gather[i4, #1[[2]] == #2[[2]] &]];
              適用 最初    同一要素ごとにまとめる
        rawModified[1] = raw;
        g1 = ListPlot[raw, PlotStyle → AbsolutePointSize[3]]
             リストプロット   プロットス…    絶対ポイントサイズ
Out[•]=
```



```
(* 第１波からの死亡者数（累計）をジョンホプキンス大のデータでグラフにしたもの *)
```

```
In[•]:= h1 = Fit[raw, {1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7,
             フィット
           x^8, x^9, x^10, x^11, x^12, x^13, x^14, x^15, x^16 }, x]
```

Out[•]=

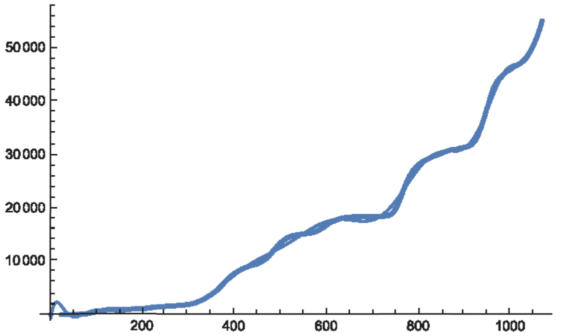
$$-580.905 + 589.89\,x - 40.0381\,x^2 + 1.12356\,x^3 - 0.0172986\,x^4 + 0.000166123\,x^5 - 1.06868\times10^{-6}\,x^6 + 4.81197\times10^{-9}\,x^7 - 1.55898\times10^{-11}\,x^8 + 3.69361\times10^{-14}\,x^9 - 6.44335\times10^{-17}\,x^{10} + 8.25627\times10^{-20}\,x^{11} - 7.66922\times10^{-23}\,x^{12} + 5.02039\times10^{-26}\,x^{13} - 2.19451\times10^{-29}\,x^{14} + 5.74606\times10^{-33}\,x^{15} - 6.81292\times10^{-37}\,x^{16}$$

```
(* このグラフを基に、上記の値をとる16次の多項式で近似した結果 *)

g2 = Plot[h1, {x, 0, 1060}];
     プロット
```

```
Show[g1, g2]
示す
```

Out[•]=




```
(* 近似した関数と元のグラフとを重ねて表示 *)

h2 = Expand[h1 /. x → t + 220]
展開
(* 第５波、220日目から385日目までの関数を置き直す（第５波の初日を0とする関数にする） *)
```

Out[•]= $1499.72 + 9.40944\,t - 0.229704\,t^2 - 0.000528637\,t^3 + 0.0000405179\,t^4 + 7.06408\times10^{-9}\,t^5 - 2.01903\times10^{-9}\,t^6 + 4.69321\times10^{-12}\,t^7 + 3.50032\times10^{-14}\,t^8 - 1.79423\times10^{-16}\,t^9 + 8.50767\times10^{-20}\,t^{10} + 1.40837\times10^{-21}\,t^{11} - 4.83021\times10^{-24}\,t^{12} + 7.75186\times10^{-27}\,t^{13} - 6.94008\times10^{-30}\,t^{14} + 3.34791\times10^{-33}\,t^{15} - 6.81292\times10^{-37}\,t^{16}$

```
h3 = h2 /. t → x (* 変数をxに戻す *)
```

Out[•]= $1499.72 + 9.40944\,x - 0.229704\,x^2 - 0.000528637\,x^3 + 0.0000405179\,x^4 + 7.06408\times10^{-9}\,x^5 - 2.01903\times10^{-9}\,x^6 + 4.69321\times10^{-12}\,x^7 + 3.50032\times10^{-14}\,x^8 - 1.79423\times10^{-16}\,x^9 + 8.50767\times10^{-20}\,x^{10} + 1.40837\times10^{-21}\,x^{11} - 4.83021\times10^{-24}\,x^{12} + 7.75186\times10^{-27}\,x^{13} - 6.94008\times10^{-30}\,x^{14} + 3.34791\times10^{-33}\,x^{15} - 6.81292\times10^{-37}\,x^{16}$

```
h4 = h3 /. x → 0  (* 第５波の初日の値を0とする（補正） *)
```

Out[•]= 1499.72

```
h5 = h3 - h4  (* 第５波の初日の値を0とする（補正） *)
```

Out[•]= $0. + 9.40944\,x - 0.229704\,x^2 - 0.000528637\,x^3 + 0.0000405179\,x^4 + 7.06408\times10^{-9}\,x^5 - 2.01903\times10^{-9}\,x^6 + 4.69321\times10^{-12}\,x^7 + 3.50032\times10^{-14}\,x^8 - 1.79423\times10^{-16}\,x^9 + 8.50767\times10^{-20}\,x^{10} + 1.40837\times10^{-21}\,x^{11} - 4.83021\times10^{-24}\,x^{12} + 7.75186\times10^{-27}\,x^{13} - 6.94008\times10^{-30}\,x^{14} + 3.34791\times10^{-33}\,x^{15} - 6.81292\times10^{-37}\,x^{16}$

```
h5 /. x → 0  (* 確認 *)
```

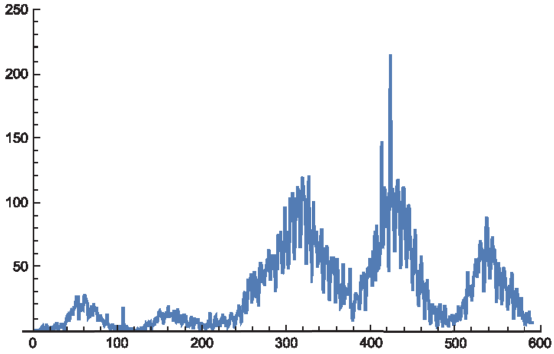
Out[•]= 0.

```
h5 /. x → 165  (* 第５波の終焉日の値 *)
```

Out[•]= 4900.95

```
delta = Apply[Subtract, Map[Reverse,
        頭…      減算          適用  反転
    BlockMap[Transpose, Select[raw, 0 < #[[1]] ≤ 650 &], 2, 1], {2}], {2}];
    ブロッ…      転置          選択
g3 = ListLinePlot[Map[Last, delta], PlotRange → {Automatic, {0, 250}}]
     折れ線グラフ…     適用 最後            プロット範囲       自動
(* デルタ株（第３波）からの死亡者数の変化をジョンホプキンス大のデータでグラフにしたもの *)
```

Out[ ]=




```
h6 = D[h1, x] (* h1は死亡者数の累計であるので、
     微分係数
  死亡者数の変化と対応することを確認するために、累計の関数を微分する。 *)
```

Out[ ]= $589.89 - 80.0762\,x + 3.37067\,x^2 - 0.0691943\,x^3 + 0.000830615\,x^4 - 6.4121\times10^{-6}\,x^5 + 3.36838\times10^{-8}\,x^6 - 1.24719\times10^{-10}\,x^7 + 3.32425\times10^{-13}\,x^8 - 6.44335\times10^{-16}\,x^9 + 9.0819\times10^{-19}\,x^{10} - 9.20306\times10^{-22}\,x^{11} + 6.5265\times10^{-25}\,x^{12} - 3.07232\times10^{-28}\,x^{13} + 8.61909\times10^{-32}\,x^{14} - 1.09007\times10^{-35}\,x^{15}$

```
h7 = Expand[h6 /. x → t + 460]
     展開
  (* 上記の第３波からのデータに対応さるためh6を460日分平行移動させる。 *)
```

Out[ ]= $44.7349 - 0.163934\,t + 0.00669739\,t^2 + 0.0000121485\,t^3 - 6.91449\times10^{-7}\,t^4 - 4.11097\times10^{-10}\,t^5 + 2.1291\times10^{-11}\,t^6 + 4.82257\times10^{-15}\,t^7 - 2.98832\times10^{-16}\,t^8 + 3.16585\times10^{-20}\,t^9 + 2.14639\times10^{-21}\,t^{10} - 9.2747\times10^{-25}\,t^{11} - 7.7066\times10^{-27}\,t^{12} + 5.64639\times10^{-30}\,t^{13} + 1.09763\times10^{-32}\,t^{14} - 1.09007\times10^{-35}\,t^{15}$

```
h8 = h7 /. t → x (* 変数をxに戻す。 *)
```

Out[ ]= $44.7349 - 0.163934\,x + 0.00669739\,x^2 + 0.0000121485\,x^3 - 6.91449\times10^{-7}\,x^4 - 4.11097\times10^{-10}\,x^5 + 2.1291\times10^{-11}\,x^6 + 4.82257\times10^{-15}\,x^7 - 2.98832\times10^{-16}\,x^8 + 3.16585\times10^{-20}\,x^9 + 2.14639\times10^{-21}\,x^{10} - 9.2747\times10^{-25}\,x^{11} - 7.7066\times10^{-27}\,x^{12} + 5.64639\times10^{-30}\,x^{13} + 1.09763\times10^{-32}\,x^{14} - 1.09007\times10^{-35}\,x^{15}$

```
g4 = Plot[h8, {x, 220, 385}]; (* 第５波の死亡者数の変化のグラフ *)
     プロット
```

```
h8 /. x → 220 (* 第５波の初日の死亡者数 *)
```

Out[ ]= 1.29724

```
h8 /. x → 385(* 第５波の終焉日の死亡者数 *)
```

Out[ ]= 20.4302

In[∘]:= `h9 = D[h8, x]; Solve[h9 == 0, x]`

微分係数　解く

Out[∘]= {{x → -434.875}, {x → -387.624}, {x → -332.909}, {x → -269.301}, {x → -203.001}, {x → -81.6082}, {x → 12.2097}, {x → 81.3583}, {x → 195.215}, {x → 313.82}, {x → 405.664}, {x → 493.334}, {x → 553.986}, {x → 593.538}}

(* 第５波のピークは、オミクロン株のデータの314日目であることが分かる。 *)

In[∘]:= `314 - 220 + 7`

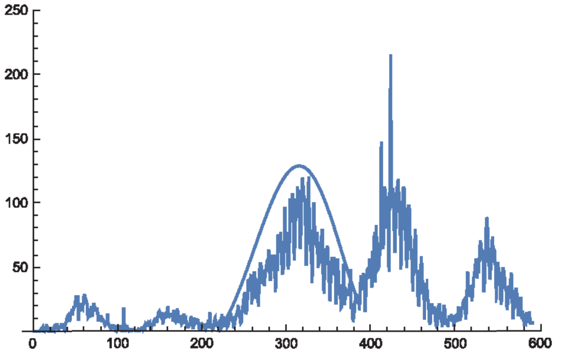
Out[∘]= 101

(* 第５波のピークは、第５波が始まってから94日目であり、
その一週間後は、第５波が始まってから101日目である。 *)

In[∘]:= `Show[g3, g4]`

示す

Out[∘]=



(* 上記の結果を基に、グラフを重ねて見ると、確かに想定した結果を得る。 *)

In[∘]:= `up = 5000 - h5`

Out[∘]= $5000. - 9.40944\,x + 0.229704\,x^2 + 0.000528637\,x^3 - 0.0000405179\,x^4 - 7.06408\times10^{-9}\,x^5 + 2.01903\times10^{-9}\,x^6 - 4.69321\times10^{-12}\,x^7 - 3.50032\times10^{-14}\,x^8 + 1.79423\times10^{-16}\,x^9 - 8.50767\times10^{-20}\,x^{10} - 1.40837\times10^{-21}\,x^{11} + 4.83021\times10^{-24}\,x^{12} - 7.75186\times10^{-27}\,x^{13} + 6.94008\times10^{-30}\,x^{14} - 3.34791\times10^{-33}\,x^{15} + 6.81292\times10^{-37}\,x^{16}$

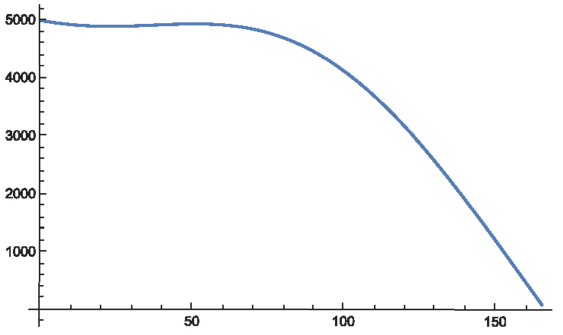
(* 医療機関の対策予算残額をup とし、up=5000-h5 （金額の単位は、一千万円）とする *)

In[∘]:= `up /. x → 165`

Out[∘]= 99.0483

(* 第５波の終焉日の医療機関の対策予算残額 *)

In[•]:= `Plot[up, {x, 0, 165}]`
プロット

Out[•]=


(* 第５波の医療機関の対策予算残額のグラフ *)

In[•]:= `h10 = 1500 Sin[(3.141592 x) / 330]`
正弦

Out[•]= `1500 Sin[0.00951998 x]`

(* 補償金額は日数をx とするとき、165日で1500（金額の単位は、一千万円）となり、sin のように増えると仮定し、1500sin(πx/330) を級数展開して５次の項までの多項式とする。）とおく。

In[•]:= `h11 = Series[h10, {x, 0, 15}]`
級数展開

Out[•]= $14.28\,x - 0.000215699\,x^3 + 9.77438\times10^{-10}\,x^5 - 2.10917\times10^{-15}\,x^7 + 2.65492\times10^{-21}\,x^9 - 2.18741\times10^{-27}\,x^{11} + 1.2708\times10^{-33}\,x^{13} - 5.4844\times10^{-40}\,x^{15} + O[x]^{16}$

In[•]:= `h12 = 14.279963636363636` x - 0.00021569870417874156` x^3 + 9.774380139017499`*^-10 x^5`

Out[•]= $14.28\,x - 0.000215699\,x^3 + 9.77438\times10^{-10}\,x^5$

In[•]:= `us = h12`

Out[•]= $14.28\,x - 0.000215699\,x^3 + 9.77438\times10^{-10}\,x^5$

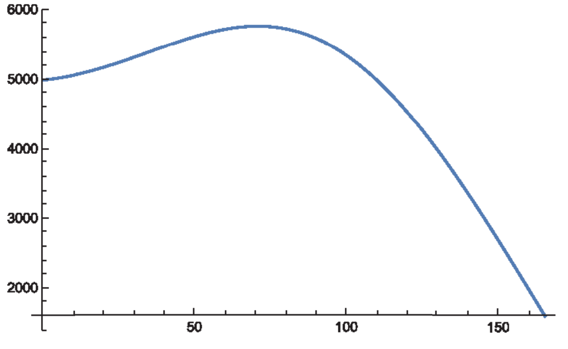
(* 営利活動自粛に対する補償金額をusとする。 *)

In[•]:= `eqn = up + us`

Out[•]= $5000. + 4.87052\,x + 0.229704\,x^2 + 0.000312938\,x^3 - 0.0000405179\,x^4 - 6.08664\times10^{-9}\,x^5 + 2.01903\times10^{-9}\,x^6 - 4.69321\times10^{-12}\,x^7 - 3.50032\times10^{-14}\,x^8 + 1.79423\times10^{-16}\,x^9 - 8.50767\times10^{-20}\,x^{10} - 1.40837\times10^{-21}\,x^{11} + 4.83021\times10^{-24}\,x^{12} - 7.75186\times10^{-27}\,x^{13} + 6.94008\times10^{-30}\,x^{14} - 3.34791\times10^{-33}\,x^{15} + 6.81292\times10^{-37}\,x^{16}$

(* これらの仮定の基で、ある地域での最適戦略を明らかにする。具体的には、
死亡者一人当たりに対する医療機関の対策予算と国が１日に補償する金額の合計を求め、
その合計の推移を考える。
医療機関はCOVID-19の第５波に対する対策費として国から500億円の予算措置を受けているが、
COVID-19の死亡者数が増えることによって、この対策費は減少する。そして、
国はCOVID-19の第５波が始まってから営利活動の自粛に対して１日に150億円補償しなければならず、
費用は増加する。
その結果、社会全体から考えた場合どのようにすべきか？
一方、感染症は変異が起きる可能性があるため、
医療機関は次の変異株に向けて対策費をできるだけ多く残しておきたい。
このとき、社会的合意（コンセンサス）をどのように形成するかを考えるために、
ナッシュの交渉理論を応用する医療機関の対策予算と営利活動自粛に対する補償の間では、
所得転移による補償が可能であるとして、社会的総便益を up+us として考える。
医療機関と補償を受ける人々の間で、パレート最適性を実現するには、
up+us を最大にすることが求められる。up+us のグラフ(xの関数)は、以下のようになる。 *)

In[]:=
```
Plot[eqn, {x, 0, 165}]
```
プロット

Out[]=


In[]:=
```
h13 = D[eqn, x]; Solve[h13 == 0, x]
```
微分係数　解く

Out[]=
```
{{x → -207.347}, {x → -168.029}, {x → -117.588}, {x → -49.3038}, {x → -11.38},
 {x → 70.4248}, {x → 245.878 - 71.9147 i}, {x → 245.878 + 71.9147 i}, {x → 382.178},
 {x → 528.78 - 58.0931 i}, {x → 528.78 + 58.0931 i}, {x → 731.383 - 72.362 i},
 {x → 731.383 + 72.362 i}, {x → 847.949 - 30.431 i}, {x → 847.949 + 30.431 i}}
```

(* この関数を微分することで最大解を得ることができる。
（0,165）の間の最大値を取るxの解は70.4248 であることが分かる。
up+us を最大にする x を、70 とする。 *)

In[]:=
```
eqn /. x → 70
```

Out[]=
```
5776.25
```

(* 医療機関の対策費と補償額について話し合いをするときの交渉の原点を、
101日（94日＋7日）とする。（COVID-19の第５波が始まって101日目で、
医療機関と国が、対策費用と補償を止めるのが、ナッシュ交渉解の観点から、
どのような解釈（社会的な観点からの解釈）になるかを考えることができる。
101日目で、医療機関と国が、対策費用と補償を止めたときの、
up+us の値は、5776.25 である。 *)

(* ここから、グレブナ基底を用いて社会的総便益 up+us のグラフを求めることを考える。 *)

In[•]:= uup = up - p

Out[•]= $5000. - p - 9.40944\,x + 0.229704\,x^2 + 0.000528637\,x^3 - 0.0000405179\,x^4 - 7.06408\times10^{-9}\,x^5 + 2.01903\times10^{-9}\,x^6 - 4.69321\times10^{-12}\,x^7 - 3.50032\times10^{-14}\,x^8 + 1.79423\times10^{-16}\,x^9 - 8.50767\times10^{-20}\,x^{10} - 1.40837\times10^{-21}\,x^{11} + 4.83021\times10^{-24}\,x^{12} - 7.75186\times10^{-27}\,x^{13} + 6.94008\times10^{-30}\,x^{14} - 3.34791\times10^{-33}\,x^{15} + 6.81292\times10^{-37}\,x^{16}$

In[•]:= uus = us - q

Out[•]= $-q + 14.28\,x - 0.000215699\,x^3 + 9.77438\times10^{-10}\,x^5$

In[•]:= GroebnerBasis[{uup, uus}, {x, p, q}]
グレブナー基底

Out[•]= {1.}

(* 計算できていない！ 浮動小数かつ微小な係数の多項式系に対して、
グレブナ基底を計算することができない。 そこで、
変数xに183sを代入してsを変数とする多項式系に対して、グレブナ基底を計算する
（変数xに183sを代入するのは、upの最高次の項の係数を１に近くする方法で決定した。）*)

In[•]:= uup = Expand[up - p /. x → 183 * s]
展開

Out[•]= $5000. - p - 1721.93\,s + 7692.57\,s^2 + 3239.74\,s^3 - 45\,441.4\,s^4 - 1449.81\,s^5 + 75\,831.3\,s^6 - 32\,257.2\,s^7 - 44\,026.8\,s^8 + 41\,298.8\,s^9 - 3583.62\,s^{10} - 10\,856.2\,s^{11} + 6813.65\,s^{12} - 2001.11\,s^{13} + 327.853\,s^{14} - 28.9428\,s^{15} + 1.07783\,s^{16}$

In[•]:= uup = $5000 - p - 1722\,s + 7693\,s^2 + 3240\,s^3 - 45\,441\,s^4 - 1450\,s^5 + 75\,831\,s^6 - 32\,257\,s^7 - 44\,027\,s^8 + 41\,299\,s^9 - 3584\,s^{10} - 10\,856\,s^{11} + 6814\,s^{12} - 2001\,s^{13} + 328\,s^{14} - 29\,s^{15} + s^{16}$

Out[•]= $5000 - p - 1722\,s + 7693\,s^2 + 3240\,s^3 - 45\,441\,s^4 - 1450\,s^5 + 75\,831\,s^6 - 32\,257\,s^7 - 44\,027\,s^8 + 41\,299\,s^9 - 3584\,s^{10} - 10\,856\,s^{11} + 6814\,s^{12} - 2001\,s^{13} + 328\,s^{14} - 29\,s^{15} + s^{16}$

In[•]:= uus = $-q + 2613\,s - 1322\,s^3 + 201\,s^5$

Out[•]= $-q + 2613\,s - 1322\,s^3 + 201\,s^5$

In[•]:= GroebnerBasis[{uup, uus}, {s, p, q}]
グレブナー基底

In[•]:= Length[%]
長さ

Out[•]= 4

(* 計算ができる。 *)

In[•]:= %%[[1]]

In[•]:= g = %

In[ ]:=
```
%%[[2]]
```

In[ ]:=
```
ctor[g]
```
数分解

```
 = ContourPlot[g == 0, {p, 0, 6000}, {q, 0, 6000}]
```
等高線プロット

```
 = ContourPlot[p + q == 5776, {p, 0, 6000}, {q, 0, 6000}];
```

In[ ]:=
```
ow[g1, g2
```

Out[ ]=