グレブナー基底による多面体の頂点の計算

Computing Vertices of a Polyhedron by Using Groebner Bases

東海大学 理系教育センター　　中山洋将 *1
Hiromasa Nakayama
Tokai University

東海大学大学院 理学研究科　　山本侑理 *2
Yuuri Yamamoto
Tokai University Graduate School of Science

Abstract

Zalgaller polyhedron is a convex polyhedron whose faces are regular polygons. Sekiguchi computed the vertices of Zalgaller polyhedrons and quasi Zalgaller polyhedrons by using algebraic method. Under as few assumptions about vertices as possible, we solved a system of equations of vertices and obtained some new quasi Zalgaller polyhedrons.

1 Introduction

各面が正多角形である多面体はザルガラー多面体と呼ばれ, 92 種類のみ存在することが知られている [3]. 関口氏は, その頂点の座標の満たす連立方程式を立て, それを解くことでザルガラー多面体と擬ザルガラー多面体の頂点の座標を計算している [2]. 本稿では, その計算において仮定している条件式を極力減らして, 連立方程式を解くことにより, 新たな擬ザルガラー多面体を幾つか見つけることができたことを報告する.

2 ザルガラー多面体, 擬ザルガラー多面体と頂点の計算

定義 1 (ザルガラー多面体 [3])
各面が正多角形である凸多面体を**ザルガラー多面体**という.

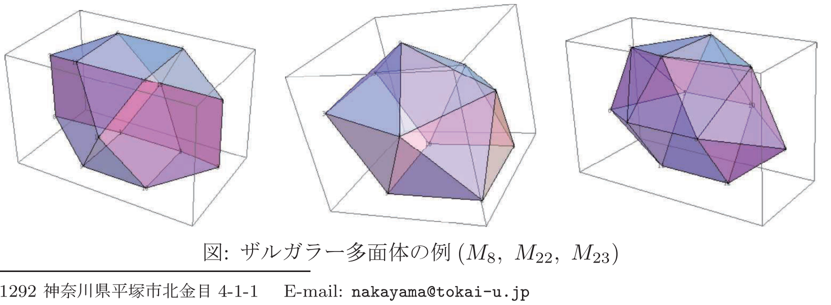


図: ザルガラー多面体の例 (M_8, M_{22}, M_{23})

*1 〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1　E-mail: nakayama@tokai-u.jp
*2 〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

正多角柱, 正多角反柱を除くと, ザルガラー多面体は 92 種類のみ存在することが知られている [3]. [1] では, ザルガラー多面体の頂点を計算するアルゴリズムと各多面体の頂点のデータが与えられている. [2] において, 関口氏はザルガラー多面体と擬ザルガラー多面体の頂点の代数的方法による計算を行っている. 具体的には, 次のような方法である.

アルゴリズム 1 (ザルガラー多面体の頂点の計算, [2])
ザルガラー多面体の頂点を $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ としておく.

1. ザルガラー多面体のグラフ (点, 辺, 面の組合せ構造) を考える.
2. 各頂点の座標 (x_i, y_i, z_i) について, 次の条件から連立代数方程式を立てる.
   - 辺 P_iP_j と辺 P_kP_l の長さが等しい
     $\iff (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2$
   - $\angle P_iP_jP_k = \angle P_jP_kP_l \iff P_iP_k = P_jP_l$
   - 点 P_i, P_j, P_k, P_l が同一平面上にある $\iff \det \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \end{pmatrix} = 0$
3. 2 で得られた連立代数方程式をグレブナー基底を用いて解く. 得られた実数解 (x_i, y_i, z_i) を頂点とする多面体を作り, 面の交差がなく, 凸性を満たすものをとれば, それがザルガラー多面体の頂点となる.

この計算の際, 得られた実数解を頂点とするものは擬ザルガラー多面体と呼ばれる. これは面が星形になったり, 面が交差したり, 凸性を満たさないものも含めるなど, ザルガラー多面体の条件を緩めたものになる.

定義 2 (擬ザルガラー多面体, [2])
元のザルガラー多面体と同じ個数の頂点, 辺, 面を持ち, その頂点の座標は元のザルガラー多面体の頂点の座標が満たす連立方程式 (アルゴリズム 1 で立てたもの) を満たすものを**擬ザルガラー多面体**と呼ぶ.

3　ザルガラー多面体 M_8 とその擬ザルガラー多面体の計算

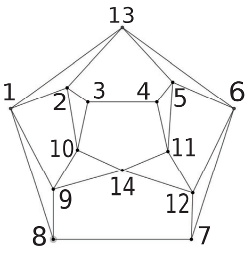
[2] に従い, ザルガラー多面体 M_8 とその擬ザルガラー多面体の頂点の計算を行う. 頂点の添字などの設定は [2] と同じにしている. ザルガラー多面体 M_8 は, 頂点 14 個, 面 14 枚 (正 3 角形 8 枚, 正 4 角形 2 枚, 正 5 角形 4 枚) を持ち, 各面は

正 3 角形　$P_1P_2P_{13}, P_5P_6P_{13}, P_9P_{10}P_{14}, P_{11}P_{12}P_{14}, P_1P_8P_9, P_2P_3P_{10}, P_6P_7P_{12}, P_4P_5P_{11}$

正 4 角形　$P_1P_2P_{10}P_9, P_5P_6P_{12}P_{11}$

正 5 角形　$P_1P_8P_7P_6P_{13}, P_2P_3P_4P_5P_{13}, P_9P_8P_7P_{12}P_{14}, P_{10}P_3P_4P_{11}P_{14}$

となる. 多面体のグラフは次のようになる.



この情報から連立代数方程式を立てると, 変数 42 個, 方程式 80 本の連立代数方程式が得られる. ザルガラー多面体の対称性などから得られる頂点の [2, p.80, (7.1)] の条件式

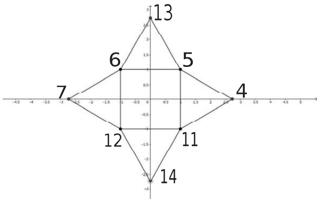
$$\begin{aligned} &x_1 = -x_2 = x_9 = -x_{10} = -1, \\ &y_1 = y_2 = y_9 = y_{10} = -y_5 = -y_6 = -y_{11} = -y_{12}, \\ &z_1 = z_2 = -z_9 = -z_{10}, \quad x_5 = -x_6 = x_{11} = -x_{12} = 1, \\ &z_5 = z_6 = -z_{11} = -z_{12} = 1, \quad y_3 = -y_4 = -y_7 = y_8 = -1, \\ &z_3 = z_4 = z_7 = z_8 = 0, \quad x_3 = x_4 = -x_7 = -x_8, \\ &x_{13} = x_{14} = y_{13} = y_{14} = 0, \quad z_{13} = -z_{14} \end{aligned} \tag{1}$$

を代入すると, 変数 4 個, 方程式 60 本の連立代数方程式が得られ, そのグレブナー基底は,

$$z_{14}^2 + z_{14} - 1,\ x_8 - z_{14} + 1,\ z_{10} + 1,\ y_{12} + z_{14}$$

となり, 解の個数は 2 個でいずれも実数解となる. これから 2 つの擬ザルガラー多面体 (そのうちの 1 つはザルガラー多面体) が得られることが知られている [2, 7.1 節].

頂点についての条件式 (1) をなるべく減らして連立代数方程式を解き, いままで見つかっていない擬ザルガラー多面体があるかどうかを調べる. 条件式 (1) の代わりに, 次のように頂点の条件式を立てる. 正四角形 $P_5P_6P_{12}P_{11}$ を xy 平面 $(1,1,0), (-1,1,0), (-1,-1,0), (1,-1,0)$ に配置し, この面に隣接する面 (正三角形) の頂点についての明らかな条件 $x_{13}=0, x_{14}=0, y_4=0, y_7=0$ を立てる.



式としては

$$x_5=1, y_5=1, z_5=0,\ x_6=-1, y_6=1, z_6=0,\ x_{12}=-1, y_{12}=-1, z_{12}=0,\ x_{11}=1, y_{11}=-1, z_{11}=0,$$
$$x_{13}=0, x_{14}=0, y_4=0, y_7=0$$

となる. これを一番最初に立てた変数 42 個, 方程式 80 本の連立代数方程式に代入すると, 変数が 25 個で, 80 本の連立代数方程式が得られる. これは有理数係数で全次数逆辞書順序についてグレブナー基底を求めることができ (380 s 程度), 0 次元イデアルで解の個数は 12 個となる. さらにこれらはいずれも実数解になる. 回転でうつりあうものを同一視すれば, [2] にはなかった 2 種類の擬ザルガラー多面体が得られる. 既

知の擬ザルガラー多面体では, 2 枚の正方形の面が平行であるが, 新たに見つかった擬ザルガラー多面体では, 2 枚の正方形の面が平行でないことが確認できる．これは条件式 (1) では, 2 枚の正方形の面を平行であると仮定していることによる．今回の M_8 の計算では, 頂点について一番少ない仮定の下で擬ザルガラー多面体の計算を行っているので, M_8 の全ての擬ザルガラー多面体が見つかったことになる．

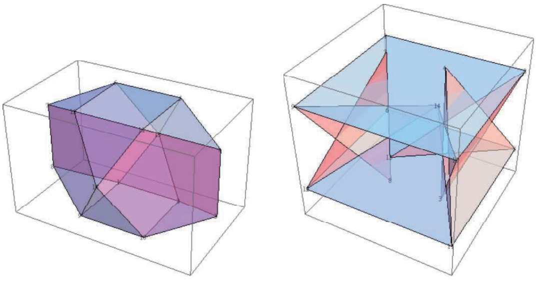


図: M_8 の既知の擬ザルガラー多面体 (左はザルガラー多面体 M_8 自身)

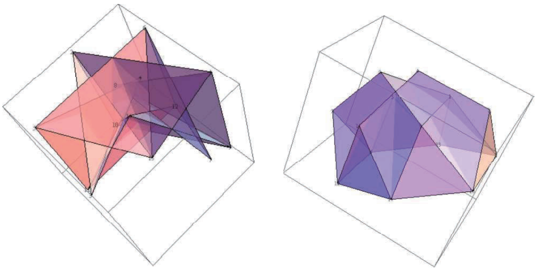


図: M_8 の新たな擬ザルガラー多面体

同様の計算を M_{22}, M_{23} に対しても行い, 幾つかの新たな擬ザルガラー多面体を得ることができた．表にまとめると以下の通りとなった．

多面体	変数	式	解	GB 計算	既知のもの	新たなもの
M_8	25 個	80 本	12 個	380s	2 個	2 個
M_{22}	12 個	38 本	20 個	2s	4 個	3 個
M_{23}	17 個	47 本	88 個	20s	8 個	8 個

ここで, グレブナー基底 (GB) 計算は有理数係数で全次数逆辞書式順序について計算し, 数式処理ソフト Risa/Asir [4] の関数 `nd_gr` を用いた．PC は CPU:Core i7-3520(2.9 GHz), メモリ:16GB を使用した．今回計算した各擬ザルガラー多面体 M_8, M_{22}, M_{23} に対するイデアル, グレブナー基底, 頂点の座標のデータは, `https://sites.google.com/view/qzalgaller/` に掲載している．

参　考　文　献

[1] 小林光夫, 鈴木卓治, 「正多角形を面にもつすべての凸多面体の頂点座標の計算」, 電気通信大学紀要, 第 5 巻 (1992), 147-184

[2] 関口次郎, 「多面体の数理とグラフィックス」, 牧野書店, 1996.

[3] V. A. Zalgaller, ”Convex polyhedra with regular faces”, Consultants Bureaux, 1969.

[4] M. Noro et al., Risa/Asir, `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html`