

# 正次元イデアルのネター作用素の計算と特異点

## Noetherian operators of positive dimensional ideals and hypersurface singularities

東京理科大学理学部第一部応用数学科 鍋島克輔<sup>\*1</sup>

KATSUSUKE NABESHIMA

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

新潟大学大学院自然科学研究科 田島慎一<sup>\*2</sup>

SHINICHI TAJIMA

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY

### Abstract

An algorithm for computing Noetherian differential operators of positive dimensional ideals is introduced in the context of symbolic computation. It is shown that an algorithm for computing the Noetherian differential operators of zero dimensional ideals can be generalized to the case of positive dimensional ideals by utilizing maximally independent sets.

## 1 はじめに

L. Ehrenpreis は、1960 年代に定数係数線形偏微分方程式系の理論を構築し、ネター作用素を用いて multiplicity variety の概念を導入している [7, 8]. その後、ネター作用素の理論の研究は L. Hörmander [16] や U. Oberst [16] などによりなされ徐々に広がりを見せ、近年、論文 [3, 4, 5, 6, 13, 14, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29] で見られるように、計算機代数学の分野で広がっている。また、2022 年の International Congress of Mathematicians の B. Sturmfels のレクチャー [19] で定数係数線形偏微分方程式系の話が取り上げられ、そこでネター作用素の重要性が紹介されている。このように、ネター作用素は計算と理論の両面において注目されつつある。

本稿では、2022 年に著者により発表されたゼロ次元イデアルのネター作用素計算アルゴリズム [13, 14] を一般化することで、正次元イデアルのネター作用素を計算するアルゴリズムを導出する。この一般化において、鍵となるのはイデアルの極大独立集合であり、計算機代数学でよく用いられるゼロ次元化というテクニックである。また、論文 [13, 14] で議論されているイデアルのネター作用素表現の一般化も議論する。

## 2 ゼロ次元イデアルのネター作用素の計算

ここでは、論文 [13, 14] で紹介されたゼロ次元イデアルのネター作用素の計算法について簡単に復習をする。

<sup>\*1</sup> 〒 162-0825 東京都新宿区神楽坂 1-3 E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp

<sup>\*2</sup> 〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地 E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

$K$  を  $\mathbb{C}$  の部分体とする.  $n$  個の変数を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とし,  $n$  個の変数の省略形を  $x := \{x_1, \dots, x_n\}$  とする. また, 変数  $x_i$  で偏微分するという操作を  $\partial_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}$  で表す ( $1 \leq i \leq n$ ). このとき,  $i \neq j$  で  $x_i x_j = x_j x_i$ ,  $x_i \partial_j = \partial_j x_i$ ,  $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$  が成り立ち,  $i = j$  でライプニッツの公式より  $\partial_{x_i} x_i = x_i \partial_{x_i} + 1$  が成り立つ.  $K$  係数の  $n$  変数多項式全体のなす環  $K[x_1, \dots, x_n]$  を  $K[x]$  とし, 係数を  $K[x]$  とする偏微分作用素環を

$$D_X := \left\{ \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} h_\beta(x) \partial^\beta \mid h_\beta(x) \in K[x] \right\}$$

とする. ただし,  $\partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$  である. 本稿では,  $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$  をメインのシンボルとして扱う.  $I \subset K[x]$  をイデアルとすると,  $\sqrt{I}$  は  $I$  の根基を意味する.

### 定理 1 ([7, 8, 17])

準素イデアルを  $Q \subset K[x]$  とし, その素イデアル  $\sqrt{Q}$  を  $\mathfrak{p}$  とする (すなわち,  $Q$  は  $\mathfrak{p}$ -primary ideal である). このとき,  $D_X$  に属する有限個の  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\ell$  があり, 次を満たすものが存在する

$h \in K[x]$  が  $Q$  に属すなら,  $\psi_1(h), \psi_2(h), \dots, \psi_\ell(h) \in \mathfrak{p}$  となる. 逆に,  $\psi_1(h), \psi_2(h), \dots, \psi_\ell(h) \in \mathfrak{p}$  なら  $h \in K[x]$  は  $Q$  に属す.

### 定義 2 ([7, 8, 17])

定理 1 を満たす多項式係数偏微分作用素をイデアル  $Q$  の **ネター作用素 (Noether operator)** と呼ぶ.

近年, ネター作用素が再注目され始め論文 [20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29] により計算機代数のみならず, 微分方程式, 特異点論においてネター作用素の有用性が議論されている.

### 命題 3 ([13, 14, 25])

零次元準素イデアルを  $Q \subset K[x]$  とし,  $\sqrt{Q} = \mathfrak{p}$  とする. このとき,  $Q$  のネター作用素の集合は  $D_X$  で体  $K[x]/\mathfrak{p}$  上の有限次元ベクトル空間となる.

本稿では, 命題 3 で述べた体  $K[x]/\mathfrak{p}$  上のベクトル空間の基底を  $Q$  の **ネター作用素基底** と呼び  $\text{NB}_Q$  で表すようにする.

### 定理 4 ([13, 14, 25])

零次元イデアルを  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subset K[x]$  とし,  $Q$  を  $I$  の 1 つの準素イデアル成分とする. また,  $\mathfrak{p} = \sqrt{Q}$  とし,  $\text{NB}_Q \subset D_X$  を  $Q$  のネター作用素基底とする. このとき, 偏微分作用素  $\psi \in \text{NB}_Q$  は次の条件を満たす.

(i)  $\psi(f_i) \in \mathfrak{p}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

(ii) 交換子積  $[\psi, x_i] := \psi x_i - x_i \psi$  とすると,  $[\psi, x_i] \in \text{Span}_{K[x]/\mathfrak{p}}(\text{NB}_Q)$  となる.

項  $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$  の多重次数  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  に着目した項順序  $\succ$  を  $\mathbb{N}^n$  上で設定する. このとき, 偏微分作用素

$$\psi = c_\alpha \partial^\alpha + \sum_{\alpha \succ \beta} c_\beta \partial^\beta \quad (c_\beta \in K[x]/\mathfrak{p}, c_\beta \neq 0)$$

において,  $\partial^\alpha$  を  $\psi$  の **先頭項** といい  $\text{ht}(\psi)$  で表し,  $c_\alpha$  を  $\psi$  の **先頭係数** といい  $\text{hc}(\psi)$  で表し,  $\partial^\beta$  を  $\psi$  の **低階項** という.  $\psi$  の低階項の集合を  $\text{LL}(\psi)$  で表す. また, 集合  $\Psi \subset D_x$  において,  $\text{ht}(\Psi) = \{\text{ht}(\psi) \mid \psi \in \Psi\}$ ,  $\text{LL}(\Psi) = \bigcup_{\psi \in \Psi} \text{LL}(\psi)$  とする.

項順序  $\succ$  に関して、(簡約された) ネター作用素基底  $NB_Q$  を求める方法が論文 [14] では紹介されている。このとき、ネター作用素の先頭項と低階項は、定理 4 (ii) より次の二つの系を満たすことが容易にわかる。ただし、ここでは第  $i$  標準単位ベクトルを

$$e_i = (0, \dots, 0, \overset{\text{第 } i \text{ 成分}}{1}, 0, \dots, 0)$$

とする。

### 系 5

項順序  $\succ$  とする。準素イデアル  $Q$  の  $\succ$  に関して簡約なネター作用素基底を  $NB_Q$  とする。また、 $\psi \in NB_Q$ ,  $\text{ht}(\psi) = \partial^\alpha$ ,  $\partial^\beta \in \text{LL}(\psi)$  とする。ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  とする。このとき、次が成り立つ。

- (i) 各  $1 \leq i \leq n$  において、もし、 $\alpha_i \geq 1$  ならば、 $\partial^{\alpha - e_i} \in \text{ht}(NB_Q)$  となる。ただし、 $\alpha - e_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  である。
- (ii) 各  $1 \leq i \leq n$  において、もし、 $\beta_i \geq 1$  ならば、 $\partial^{\beta - e_i} \in \text{ht}(NB_Q) \cup \text{LL}(NB_Q)$  となる。ただし、 $\beta - e_i = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i - 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$  である。

もし、 $\psi = \partial^\alpha + \sum_{\alpha > \beta} c_\beta \partial^\beta$ , ( $c_\beta \in K[x]/\mathfrak{p}$ ,  $c_\beta \neq 0$ ) がネター作用素であることがわかれば、系 5 より、 $\partial^{\alpha + e_i}$  が  $\text{ht}(NB_Q)$  に所属する可能性があり、同様に  $\partial^{\beta + e_i}$  が  $\text{LL}(NB_Q)$  に所属する可能性があることがわかる。ネター作用素を計算する際に、系 5 は先頭項となる可能性がある候補と、低階項となる可能性の候補を与える。

### 系 6

系 5 と同じ設定とする。もし、 $\partial^\gamma \notin \text{ht}(NB_Q)$  であれば、任意の  $\delta \in \mathbb{N}^n$  において、 $\partial^{\gamma + \delta} \notin \text{ht}(NB_Q)$  である。

系 6 により、さらに先頭項の候補を絞ることが出来、候補が無くなれば計算を終了する。

定理 4 にあるように、ネター作用素を計算するためには、素イデアルが必要となる。ゼロ次元イデアルの根基の素イデアル分解は論文 [1, 12, 18] で紹介されており、準素分解と比べると遥かに速く得られる。論文 [14] で著者たちにより紹介されたネター作用素計算アルゴリズムは、ゼロ次元イデアルの根基の素イデアル分解を行った後に、それぞれの素イデアルに対応する準素イデアルのネター作用素基底を求めている。

### アルゴリズム 1

**入力:**  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ : ゼロ次元イデアル  $\langle F \rangle$  の基底。  $\succ$ : 項順序

**出力:**  $\{(\mathfrak{p}_1, NB_1), (\mathfrak{p}_2, NB_2), \dots, (\mathfrak{p}_\ell, NB_\ell)\}$ :  $\langle F \rangle$  の最短準素イデアル分解  $\langle F \rangle = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_\ell$  とするとき、 $\sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$  で、準素イデアル  $Q_i$  のネター作用素基底が  $NB_i$  である。

1.  $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_\ell\} \leftarrow \sqrt{\langle F \rangle}$  の素イデアル分解を行う; ( $\sqrt{\langle F \rangle} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_\ell$ )  
NR  $\leftarrow \emptyset$ ;
2. 各  $\mathfrak{p}_i$  ( $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ) において、対応する準素イデアルのネター作用素を計算する。  
HT  $\leftarrow \emptyset$ ; LL  $\leftarrow \emptyset$ ; NB  $\leftarrow \{1\}$ ; (先頭項の候補, 低階項の候補, 結果)  
 $\varphi \leftarrow 1$ ;
- 2-1. もし  $\varphi \neq 0$  ならば、 $\varphi$  から先頭項の候補たち HC を作成し、LL( $\varphi$ ) から、新しい低階項の候補 LC を作成する。  
HT  $\leftarrow \text{HT} \cup \text{HC}$ ; LL  $\leftarrow \text{LL} \cup \text{LC}$ ;

- 2-2. もし,  $HT = \emptyset$  なら,  $NR$  を  $NR \cup \{(p_i, NB)\}$  に更新し, 2 に戻る.
- 2-3.  $HT$  から  $\succ$  に関して最小項  $\partial^\alpha$  を選択し,  $HT$  を  $HT \setminus \{\partial^\alpha\}$  に更新する;
- 2-4.  $\psi = \partial^\alpha + \sum_{\partial^\beta \in LL} c_\beta \partial^\beta$  とする. ここで,  $c_\beta$  は未定定数である.
- 2-5. 交換子積  $[\psi, x_1], [\psi, x_2], \dots, [\psi, x_n]$  を計算し, これらが  $\text{Span}_{K[x]/p}(NB)$  となる  $c_\beta$  たちの条件 (一次式) を得る. また,  $\psi(f_1), \psi(f_2), \dots, \psi(f_\ell)$  を計算し, これらが  $p_i$  に属するための  $c_\beta$  たちの条件 (一次式) を得る.
- 2-5. 2-5. で得られた一次式を吐き出し法で解き,  $c_\beta$  たちを求める.  
 解が存在しなければ  $\varphi = 0$  とし,  $LL$  を  $LL \cup \{\partial^\alpha\}$  と更新し 2-1 へ.  
 解が存在すれば解を  $\psi$  に代入し,  $\varphi = \psi$  とし,  $NB$  を  $NB \cup \{\psi\}$  に更新し 2-1 へ.

このアルゴリズムでは, 準素イデアルの生成元は必要ない. 論文 [3, 4, 5, 6] の方法では, 準素イデアルの生成元が必要となり, 計算法は全く異なる.

本稿では, アルゴリズム 1 で出力される形

$$\{(p_1, NB_1), (p_2, NB_2), \dots, (p_\ell, NB_\ell)\}$$

をイデアル  $\langle F \rangle$  のネター表現という. これは,  $\langle F \rangle$  の準素分解と同一視することができるが, 明らかに準素分解より各準素イデアルの情報を多く含んでいる. 論文 [14] では,  $(p_i, NB_i)$  から “対応する準素イデアル” の生成元を計算する方法も示されている. ここでは, 生成元の計算方法については述べない.

**注意:** イデアルのネター表現は L. Ehrenpreis によって紹介された multiplicity variety *i.e.*  $\{(V(p_1), NB_1), (V(p_2), NB_2), \dots, (V(p_\ell), NB_\ell)\}$ , と本質的には同じであるが, ネター作用素を計算代数の対象として積極的に利用したいため, **イデアルのネター表現**ということにする.

アルゴリズム 1 は, 本稿の著者により計算機代数システム Risa/Asir に実装されている.

### 例 1

$F = \{3x^6z^3 - 9x^6 + 27x^4z^3 - 81x^4 + x^2y + 81x^2z^3 - 243x^2 + 3y + 81z^3 - 243, x^6 + 9x^4 + 27x^2 - y^3 + 27, x^2 - z^3 + 6\}$  とする. このとき, 我々のプログラムは, 次のように  $\langle F \rangle$  のネター作用素表現を出力する.

$$\begin{aligned} & \{((3z^6 - 15z^3 + 19, y + 2z^3 - 5, x^2 - z^3 + 6), \{1\}) \\ & ((3z^6 - 18z^3 + 28, y - z^3 + 3, x^2 - z^3 + 6), \{1\}), \\ & ((3z^6 - 21z^3 + 37, y + 2z^3 - 7, x^2 - z^3 + 6), \{1\}), \\ & ((z^3 - 3, y, x^2 + 3), \{-\frac{8}{81}x\partial_z^3 - \frac{4}{9}z^2\partial_x\partial_z^2 + \frac{28}{81}xz^2\partial_z^2 + \frac{2}{3}xz\partial_x^2\partial_z + \frac{14}{9}z\partial_x\partial_z - \frac{152}{243}xz\partial_z - 24x\partial_y^3 + \partial_x^3, \\ & \quad -\frac{4}{27}z^2\partial_z^2 + \frac{4}{9}xz\partial_x\partial_z + \frac{14}{27}z\partial_z + \partial_x^2, \partial_y^2, \frac{2}{9}xz\partial_z + \partial_x, \partial_y, 1\})\}. \end{aligned}$$

## 3 主結果のための準備

前節で議論したゼロ次元イデアルのネター表現を, 正次元に拡張するとき重要となるのは, 次の極大独立集合である.

**定義 7**

変数の集合  $U \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  がイデアル  $I$  の独立集合であるとは,  $I \cap K[U] = \{0\}$  のときをいう. さらに,  $U$  が  $I$  の極大独立集合とは,  $U$  は  $I$  の独立集合であり, かつ  $U$  を真に含むいかなる  $\{x_1, \dots, x_n\}$  の部分集合も  $I$  の独立集合になり得ず, 要素数最大ものをいう.

イデアルの極大独立集合の計算アルゴリズムは知られており多くの計算機代数システムに実装されている. 以下,  $K(U)$  を変数  $U$  を持つ有理関数体とする.

**定義 8**

$I \subset K[x]$  をイデアルとし, 変数の集合を  $U \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  とし,  $Y = \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$  とする. このとき,  $K(U)[Y]$  へのイデアル  $I$  の**拡張 (extension)**  $I^e$  とは,  $K(U)[Y]$  で  $I$  によって生成されたイデアルのことである. また,  $J$  を  $K(U)[Y]$  のイデアルとしたとき,  $K[x]$  への  $J$  の**縮約 (contraction)**  $J^c$  とは,  $J \cap K[x]$  のことである.

イデアルの拡張及び縮約の計算アルゴリズムは, Becker-Weispfenning [2] で紹介されている. 素イデアルと準素イデアルに関して, 次が成り立つことが良く知られている.

**補題 9**

- (1)  $\mathfrak{p} \subset K[x]$  を素イデアルとし,  $U$  を  $\mathfrak{p}$  を法とした極大独立集合,  $Y := \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$  とする. このとき,  $\mathfrak{p}^e$  は  $K(U)[Y]$  で素イデアルであり,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$  となる.
- (2)  $Q \subset K[x]$  を準素イデアルとし,  $U$  を  $Q$  を法とした極大独立集合,  $Y := \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$  とする. このとき,  $Q^e$  は  $K(U)[Y]$  で準素イデアルであり,  $Q = Q^{ec}$  となる.

次の3つの補題では,  $U \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  とし,  $Y := \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$  とする.

**補題 10 ([2, Lemma 8.91])**

変数  $U$  での項順序を  $\succ$  とし,  $J \subset K(U)[Y]$  をイデアル,  $G$  を  $\succ$  に関するグレブナー基底とする. ただし, 係数  $K(U)$  を調整し  $G \subset K[x]$  とする.  $I \subset K[x]$  を  $G$  から生成されるイデアルとし,  $f = \text{lcm}\{lc(g) \mid g \in G\}$  とする. ただし,  $lc(g) \in K[U]$  は多項式  $g$  の先頭係数であり  $g$  を  $K(U)[Y]$  の元とみたしたものとする. このとき,  $J^c = I : f^\infty$  となる.

**補題 11 ([2, Proposition 8.94])**

$\succ$  を  $Y \gg U$  となるブロック項順序とし,  $I \subset K[x]$  をイデアル,  $G$  を  $\succ$  に関するグレブナー基底とし,  $f = \text{lcm}\{lc(g) \mid g \in G\}$  とする. ただし,  $lc(g) \in K[U]$  であり  $g$  を  $K(U)[Y]$  の元とみたしたものとする. このとき,  $I^{ec} = I : f^\infty$  となる.

**補題 12 ([2, Lemma 8.95])**

$I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset K[x]$  とし,  $q \in K[x]$  と  $s \in \mathbb{N}$  を  $I : q^s = I : q^\infty$  を満たすものとする. このとき,  $I = \langle f_1, \dots, f_r, q^s \rangle \cap (I : q^s)$  である.

上の補題より,  $I : q^s = I : q^\infty$  を満たす  $s$  が得られれば,  $I = \langle f_1, \dots, f_r, q^s \rangle \cap I^{ec}$  となる.

## 4 主結果

ここでは, 前節で議論したゼロ次元イデアルのネター表現を, 正次元に一般化する. イデアル  $I$  がゼロ次元でない場合は,  $I$  の極大独立集合を用いてゼロ次元化を行うことで, 前節のネター作用素の計算法を適用することが一般化のポイントとなる. まず, 正次元準素イデアルのネター作用素の計算法について議論し, 次に, 正次元イデアルのネター表現の計算法について述べる.

#### 4.1 正次元準素イデアルのネター作用素の計算

準素イデアルを多項式環を変えることによりゼロ次元することで、次が成り立つ。

##### 定理 13

正次元準素イデアルを  $Q = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$  とし,  $U \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  を  $\sqrt{Q} = \mathfrak{p} \subset K[x]$  の極大独立集合,  $Y := \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$  とする. このとき, 入力を  $\{g_1, \dots, g_r\} \subset K(U)[Y]$  としアルゴリズム 1 を実行すると, 素イデアル  $\mathfrak{p}$  と準素イデアル  $Q$  のネター作用素からなる組  $\{(\mathfrak{p}, \Psi)\}$  が出力される.

補題 9 より,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$  であり  $\sqrt{Q} = \mathfrak{p}$  であるので,  $\Psi$  は  $Q$  のネター作用素となる. また,  $\mathfrak{p}$  は  $K(U)[Y]$  上でゼロ次元であり素イデアルでもあるので, ゼロ次元に特化したアルゴリズム 1 は必ず終了し  $\{(\mathfrak{p}, \Psi)\}$  を出力する. すなわち, ただ単に素イデアルの極大独立集合を求めて, 前節で紹介したアルゴリズムを適用するだけで, 一般次元準素イデアルのネター作用素を求めることができる. ここでは,  $\sqrt{Q}$  の極大独立集合を求めたが, 準素イデアル  $Q$  の極大独立集合でも同じである. 4.2 節で準素イデアルの“生成元を計算せず”にネター作用素を計算する方法を紹介するため,  $\sqrt{Q}$  に着目した.

ここで, 定理 4 の  $I$  は, 準素イデアルではなくゼロ次元イデアルであることを思い出そう. ネター作用素を求めるには  $\sqrt{I}$  の素イデアル分解に現れる素イデアル  $\mathfrak{p}$  と  $I$  の生成元  $f_1, \dots, f_m$  があればよい. したがって, 正次元の場合もアルゴリズムの入力の多項式集合  $F$  は準素イデアルの生成元である必要はない.

次のアルゴリズムの入力は, 多項式集合  $F$  と  $\sqrt{\langle F \rangle}$  の素イデアル分解に現れる最大次元の素イデアル  $\mathfrak{p}$  と,  $\mathfrak{p}$  を法とする極大独立集合  $U$ ,  $Y := \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$  と項順序とした. ここで, 最大次元の素イデアルとした理由は,  $\langle F \rangle$  をゼロ次元とするためである.  $\langle F \rangle$  の最短準素分解で現れる準素イデアル  $Q$  (ただし,  $\sqrt{Q} = \mathfrak{p}$ ) のネター作用素を出力する. もちろん, 準素イデアルの生成元を入力しても問題ない.

##### アルゴリズム 2

Noether\_main( $F, \mathfrak{p}, U, Y, \succ$ )

入力:  $F \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathfrak{p}: \sqrt{\langle F \rangle}$  の素イデアル分解で得られた最大次元の素イデアル,

$U: \mathfrak{p}$  を法した極大独立集合,  $Y: \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$ ,  $\succ$ : 項順序.

出力:  $(\mathfrak{p}, \text{NB})$ : NB は  $\langle F \rangle$  の最短準素分解で現れる準素イデアル  $Q$  (ただし,  $\sqrt{Q} = \mathfrak{p}$ ) のネター作用素.

BEGIN

$\varphi \leftarrow 1$ ; HT  $\leftarrow \{\partial_{x_i} \mid x_i \in U\}$ ; LT  $\leftarrow \emptyset$ ; NB  $\leftarrow \{1\}$ ; (先頭項の候補, 低階項の候補, 結果)

while HT  $\neq \emptyset$  do

$\partial^\alpha \leftarrow$  HT から  $\succ$  に関して最小項を選択; HT  $\leftarrow \text{HT} \setminus \{\partial^\alpha\}$ ;  $\psi \leftarrow \partial^\alpha + \sum_{\partial^\beta \in \text{LL}} c_\beta \partial^\beta$ ; ( $c_\beta$  は未定定数)

$E \leftarrow \emptyset$ ; (一次式の保存場所)

for each  $x \in U$  do

$E_q \leftarrow$  交換子積  $[\psi, x]$  が  $\text{Span}_{K(U)[Y]/\mathfrak{p}}(\text{NB})$  となる  $c_\beta$  たちの条件 (一次式) を求める;

$E \leftarrow E \cup \{E_q\}$ ;

end-for

for each  $f \in F$  do

$E_q \leftarrow \psi(f)$  が  $\mathfrak{p}$  に所属するための  $c_\beta$  たちの条件 (一次式) を求める;

$E \leftarrow E \cup \{E_q\}$ ;

end-for

/\*連立一次式  $E$  を解き,  $c_\beta$  たちを求める\*/

if 連立一次式  $E$  が解を持たない then

$\varphi \leftarrow 0$ ; LL  $\leftarrow \text{LL} \cup \{\partial^\alpha\}$ ;

```

else
   $\varphi \leftarrow$  解を  $\psi$  に代入ししたもの;  $NB \leftarrow NB \cup \{\psi\}$ ;
end-if
if  $\varphi \neq 0$  then
   $HC \leftarrow \varphi$  から先頭項の候補を作成;  $HT \leftarrow HT \cup HC$ ;
   $LC \leftarrow LL(\varphi)$  から新しい低階項の候補を作成;  $LT \leftarrow LT \cup LC$ ;
end-if
end-while
return (p, NB);
END

```

このアルゴリズムは次節で、一般次元のイデアルのネター作用素表現を計算する際にも使われる。

## 例 2

$F = \{x^{12} + 9x^8y + 27x^4y^2 + 27y^3 + z, x^8 + 6x^4y + xz + 9y^2, z^4\} \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$  を考える。このとき、 $\langle F \rangle$  は準素イデアルであり  $\sqrt{\langle F \rangle} = \langle x^4 + 3y, z \rangle$  である。明らかに、これはゼロ次元では無いことがわかる。

1.  $\langle x^4 + 3y, z \rangle$  の極大独立集合は  $\{y\}$  なので、 $\mathbb{Q}(y)[x, z]$  では  $\langle F \rangle$  はゼロ次元イデアルである。
2.  $(\mathbb{Q}(y)[x, z]/\langle x^4 + 3y, z \rangle) [\partial_x, \partial_z]$  上でネター作用素を計算する。 $\langle F \rangle$  は  $\mathbb{Q}(y)[x, z]$  上でゼロ次元なのでアルゴリズム 1 で計算可能である。

このとき、体  $\mathbb{Q}(y)[x, z]/\langle x^4 + 3y, z \rangle$  上でのネター作用素基底として

$$\{1, \partial_x\}$$

が得られる。ただし、 $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$  である。

3. すなわち、 $\{1, \partial_x\}$  がそのまま、準素イデアル  $\langle F \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$  のネター作用素となる。

準素イデアルのネター作用素を計算するプログラムは論文 [4] でも紹介されており、計算機代数システム Macaulay 2 [9] に実装されている。Macaulay 2 に実装されているアルゴリズムは本稿で紹介した方法と異なり、また、理論および入力が準素イデアルのみに特化したものである。

次の例は、我々の Risa/Asir プログラムと Macaulay 2 のプログラムの出力の比較をみる。

多項式  $f = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + x^2z^2 + 5xy^4 + 2xyz^2 + xz^3 + y^5 + y^2z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$  のヤコビイデアル  $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$  を考える。このとき、 $\sqrt{J} = \langle x + y, z \rangle$  である。ここでは、 $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$  とする。

Macaulay 2 のネター作用素を計算するプログラムに  $J$  を入力すると次が出力される

$$\{1, \partial_z, \partial_x, \partial_x \partial_z, \partial_x^2, 3y \partial_x^2 \partial_z + 2 \partial_z^2, \partial_x^3, (-162y^2 - 36) \partial_x^4 + (240y^3 + 540y) \partial_x^3 \partial_z - 1620 \partial_x^2 \partial_z + (4860y^2 + 1080) \partial_x \partial_z^2 + 4860y \partial_z^2\}.$$

本研究で得られたアルゴリズムの出力は次である。

$$\left\{1, \partial_z, \partial_x, \partial_x \partial_z, \partial_x^2, y \partial_x^2 \partial_z + \frac{2}{3} \partial_z^2, \partial_x^3, y \partial_x^4 + 15y^2 \partial_x^3 \partial_z - 30y \partial_x \partial_z^2 - 30 \partial_z^2\right\}.$$

両者の出力を比較すると、我々のアルゴリズムの出力は Macaulay 2 のそれよりシンプルである。Macaulay 2 の出力には冗長な項が現れている。我々の計算法では、ネター作用素の集合が  $D_X$  で体  $\mathbb{Q}(y)[x, z]/\langle x + y, z \rangle$

上の有限次元ベクトル空間になるという事実を利用し、計算結果が冗長になることを予め回避している。すなわち、我々のアルゴリズムは常に、モニックかつベクトル空間の基底が簡約なものとなるように計算しているので冗長な項が出ないという利点がある。また、論文 [13, 14] で強調されているように、我々の Risa/Asir のプログラムは、Macaulay 2 のプログラムより圧倒的に速い。

## 4.2 正次元イデアルのネター表現の計算

ゼロ次元イデアルの準素分解には埋没因子は必要ないが、正次元イデアルの準素分解には埋没因子が必要になる。正次元イデアルのネター表現の計算には、準素分解と同様に、埋没因子に相当する準素イデアルのネター作用素の計算が必要となるが、2節のアルゴリズム 1 では埋没因子は得ることは出来ない。なぜなら、イデアルの根基の素イデアル分解には埋没因子の素イデアルは出現しないからである。

### 定義 14

$I \subset K[x]$  をイデアルとし、 $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_\ell$  を  $I$  の準素分解、 $Q_i$  は準素イデアルとする。  $NB_i \subset D_X$  を準素イデアル  $Q_i$  のネター作用素とすると、

$$\{(\sqrt{Q_1}, NB_1), (\sqrt{Q_2}, NB_2), \dots, (\sqrt{Q_\ell}, NB_\ell)\}$$

を  $I$  のネター作用素表現といい、 $Noether(I)$  で表す。

4.1 節で、準素イデアルのネター作用素の計算法が紹介されているので、準素分解を計算した後、各準素分解のネター作用素を計算することでイデアルのネター表現を得ることは可能である。しかしながら、準素分解は計算量が大きいので、ここでは、アルゴリズム 1 と同様に、準素分解を経ずにネター表現を計算する方法を紹介する。ただし、2節で述べたように、イデアルの根基の素イデアル分解は論文 [1, 12, 18] で紹介されており、準素分解と比べると遥かに速く得られる。本稿で提案する計算法では、このイデアルの根基の素イデアル分解を求めるこのアルゴリズムを利用する。

定理 13 とアルゴリズム 2 により、 $\sqrt{\langle F \rangle}$  に現れる最大次元の素イデアル  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  に対応する準素イデアルのネター作用素は計算可能である。すなわち、第 3 節の最後のコメントにあるように

$$I = \langle f_1, \dots, f_r, q^s \rangle \cap I^{ec}$$

であるので、 $I^{ec}$  の部分が計算可能であることと同じである。よって、 $\langle f_1, \dots, f_r, q^s \rangle$  に同様の操作を繰り返せば、一般イデアルのネター表現を得ることができる。もし、 $I^{ec}$  に現れる準素イデアルが埋没因子を持つとすると、埋没因子の情報は  $\langle f_1, \dots, f_r, q^s \rangle$  にあることが知られている。[10] や [2, Chapter 8] に書かれているイデアルの準素分解アルゴリズムと同じ流れで一般イデアルのネター表現を得ることができる。

### アルゴリズム 3

入力:  $F = \{f_1, \dots, f_r\} \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\succ$ : 項順序

出力:  $\{(\mathfrak{p}_1, NB_1), (\mathfrak{p}_2, NB_2), \dots, (\mathfrak{p}_\ell, NB_\ell)\}$ : イデアル  $\langle F \rangle$  のネター表現。

BEGIN

$Flag \leftarrow 1$ ;  $NR \leftarrow \emptyset$ ;

while  $Flag = 1$  do

$P \leftarrow \sqrt{\langle F \rangle}$  の素イデアル分解を行う;

$\mathfrak{p}_{max} \leftarrow P$  から最大次元の素イデアルを 1 つとる;

$U \leftarrow \mathfrak{p}_{max}$  の極大独立集合;  $Y \leftarrow \{x_1, \dots, x_n\} \setminus U$ ;

$M \leftarrow \{\mathfrak{p} \in P \mid \dim(\mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{p}_{max}), \mathfrak{p} \text{ の極大独立集合は } U\}$ ;



```

if  $Y = \emptyset$  then (最大次元がゼロ)
   $Z \leftarrow$  アルゴリズム 1 を入力  $H$  で実行; (素イデアルの集合  $P$  は求めてある)
   $NR \leftarrow NR \cup Z$ ;
   $Flag \leftarrow 0$ ;
else
  while  $M \neq \emptyset$  do
     $p_m \leftarrow M$  から 1 つ選択する;  $M \leftarrow M \setminus \{p_m\}$ ;
     $NR \leftarrow NR \cup \{\text{Noether\_main}(H, p_m, U, Y, \succ)\}$ ;
  end-while
   $g \leftarrow Y \gg U$  となるブロック項順序で  $\langle H \rangle$  のグレブナー基底  $G$  を計算し,  $K(U)[Y]$  上で  $G$  を
    考え先頭係数の最小公倍数を求める;
  if  $g$  が定数 then
     $Flag \leftarrow 0$ ;
  else
     $s \leftarrow \langle H \rangle : g^\infty = \langle H \rangle : g^s$  となる最小な自然数;
     $F \leftarrow \{F \cup \{g^s\}\}$ ;
  end-if
end-if
return  $NR$ ;
END

```

極大独立集合は一般に唯一とは限らないため、ネター作用素を用いて記号計算をする際にはネター作用素を求めた時に使用した極大独立集合の情報が必要になる。実装では、“(素イデアル, ネター作用素, 極大独立集合)”を出力するようにしている。

### 例 3

$F = \{x^3y^2 + 4x^3y + 4x^3, x^2y^3 + 4x^2y^2 + 4x^2y\} \subset \mathbb{Q}[x, y]$  を考える。ただし,  $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$  である。このとき,  $\sqrt{\langle F \rangle}$  の素イデアル分解は  $\sqrt{\langle F \rangle} = \langle x \rangle \cap \langle y+2 \rangle$  となる。このとき, 2つの素イデアル  $\langle x \rangle$  と  $\langle y+2 \rangle$  の次元が 1 である。

1-1. 最大次元の素イデアルとして  $\langle x \rangle$  を選択する。  $M = \{x\}$  であり,  $\langle x \rangle$  の極大独立集合は  $\{y\}$  である。 $\mathbb{Q}(y)[x]$  上で  $\langle F \rangle$  はゼロ次元であるので, **Noether\_main** より,  $\{1, \partial_x\}$  を得る。

1-2.  $x \gg y$  となる  $\langle F \rangle$  のグレブナー基底は  $\{(y^3 + 4y^2 + 4y)x^2, (y^2 + 4y + 4)x^3\}$  となる。 $\mathbb{Q}(y)[x]$  で考え, 先頭係数の最小公倍数は  $g = y(y+2)^2$  となる。 $\langle F \rangle : g^\infty = \langle F \rangle : g$  であるので,  $F$  を書き換え  $F := F \cup \{y(y+2)^2\}$  とする。

2-1. 根基の素イデアル分解は

$$\sqrt{\langle F \rangle} = \langle x, y \rangle \cap \langle y+2 \rangle$$

である。最大次元の素イデアルとして  $\langle y+2 \rangle$  を選択する。  $M = \{y+2\}$  であり,  $\langle y+2 \rangle$  の極大独立集合は  $\{x\}$  である。 $\mathbb{Q}(x)[y]$  上で  $\langle F \rangle$  はゼロ次元であるので, **Noether\_main** より,  $\{1, \partial_y\}$  を得る。

2-2.  $y \gg x$  となる  $\langle H \rangle$  のグレブナー基底は  $\{x^3y^2 + 4x^3y + 4x^3, y^3 + 4y^2 + 4y\}$  となる.  $\mathbb{Q}(x)[y]$  で考え, 先頭係数の最小公倍数は  $g = x^3$  となる.  $\langle F \rangle : g^\infty = \langle F \rangle : g$  であるので,  $F$  を書き換え  $F := F \cup \{x^3\}$  とする.

3-1. 根基の素イデアル分解は

$$\sqrt{\langle F \rangle} = \langle x, y \rangle \cap \langle x, y + 2 \rangle$$

であり, すべてゼロ次元である. アルゴリズム 1 を適用すると

$$\{(\langle x, y \rangle, \{1, \partial_x, \partial_x^2\}), (\langle x, y + 2 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x \partial_y, \partial_x^2, \partial_x^2 \partial_y\})\}$$

を得る.

- ここで, 得られたすべてを出力してもネター表現であるが,  $(\langle x, y + 2 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x \partial_y, \partial_x^2, \partial_x^2 \partial_y\})$  に対応する準素イデアルは,  $(\langle y + 2 \rangle, \{1, \partial_y\})$  に対応する準素イデアルを含むことが分かる. なぜなら,

$$\langle x, y + 2 \rangle \cap \mathbb{Q}[y] = \langle y + 2 \rangle$$

であり,

$$\{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x \partial_y, \partial_x^2, \partial_x^2 \partial_y\} \cap (\mathbb{Q}[x, y] / \langle x, y + 2 \rangle)[\partial_y] = \{1, \partial_y\}$$

となる.  $y$  に関するものだけを考えれば,  $(\langle x, y + 2 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x \partial_y, \partial_x^2, \partial_x^2 \partial_y\})$  は,  $(\langle y + 2 \rangle, \{1, \partial_y\})$  と同じである.

実際, 論文 [14] の手法を用いて, 生成元で表すと,

$$\{(\langle x, y + 2 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x \partial_y, \partial_x^2, \partial_x^2 \partial_y\})\} = \text{Noether}(\langle x^3, (y + 2)^2 \rangle)$$

であり,

$$\{(\langle y + 2 \rangle, \{1, \partial_y\})\} = \text{Noether}(\langle (y + 2)^2 \rangle)$$

となる.  $\langle (y + 2)^2 \rangle \subset \langle x^3, (y + 2)^2 \rangle$  なので, 得られた  $\{(\langle x, y + 2 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x \partial_y, \partial_x^2, \partial_x^2 \partial_y\})\}$  は不必要であることが分かる.

以上より,  $\langle F \rangle$  のネター表現は次である.

$$\text{Noether}(\langle F \rangle) = \{(\langle x \rangle, \{1, \partial_x\}), (\langle y + 2 \rangle, \{1, \partial_y\}), (\langle x, y \rangle, \{1, \partial_x, \partial_x^2\})\}.$$

## 5 特異点への応用

$f = x^3 + yz^2 + y^8 + xy^6 + xz^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$  とする. このとき,  $f = 0$  で定義される超曲面は特異点を持つ. ネター作用素を計算するコマンド `noether` に  $\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\}$  を入力すると次のようになる.

```
[1086] F=x^3+y*z^2+y^8+x*y^6+x*z^2$
```

```
[1087] noether([diff(F,x),diff(F,y),diff(F,z)], [x,y,z], 1);
```

```
Prime ideal [262144*z^10+1235857*z^8-141120*z^6+6970536*z^4-186624*z^2+9902736, 7717925
01963917376*y+330501747900416*z^8+71900207059830770*z^6+338978054705806881*z^4-86127605
07600888*z^2+971192182923972756, 771792501963917376*x-330501747900416*z^8-71900207059830
770*z^6-338978054705806881*z^4+8612760507600888*z^2-971192182923972756]
```

```
Noether ope. [1]
```

No. of elements 1

Prime ideal [z,9\*x-64,3\*y^2+16]

Noether ope. [1]

No. of elements 1

Prime ideal [z,y,x]

Noether ope. [(-1935360\*dy+1935360\*dx)\*dz^2+dy^9-96\*dx\*dy^7+896\*dx\*dy^6-10080\*dx^2\*dy^3+(26880\*dx^3+645120\*dx^2)\*dy-250880\*dx^3,dy^8-224/3\*dx\*dy^6-3360\*dx^2\*dy^2+8960/3\*dx^3,-20160\*dz^2+dy^7-840\*dx^2\*dy+6720\*dx^2,-360\*dz^2+dx\*dy^5+120\*dx^2,dy^6-120\*dx^2,dx\*dy^4,dy^5,dx\*dy^3,dy^4,dx\*dy^2,dy^3,dx\*dy,dy^2,(-dy+dx)\*dz,dx,dy,dz,1]

No. of elements 18

素イデアルとネター作用素の組が3つ出力されている。いま、 $f = 0$  で定義される超曲面を考えているので、1つ目と2つ目の素イデアルの零点は  $f = 0$  上にはないが、3つ目の原点  $[z, y, x]$  は存在する。ここで、出力されている作用素の数は、特異点でのミルナー数を表しており、原点でのミルナー数は18であることがネター作用素からわかる。

同様にプログラム `noether` に  $\{f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\}$  を入力する次となる。

```
[1088] noether([diff(F,x),diff(F,y),diff(F,z),F],[x,y,z],1);
```

Prime ideal [z,y,x]

Noether ope. [-20160\*dz^2+dy^7-840\*dx^2\*dy+6720\*dx^2,-360\*dz^2+dx\*dy^5+120\*dx^2,dy^6-120\*dx^2,dx\*dy^4,dy^5,dx\*dy^3,dy^4,dx\*dy^2,dy^3,dx\*dy,dy^2,(-dy+dx)\*dz,dx,dy,dz,1]

No. of elements 16

この出力から、原点でのチュリナ数は16であることがネター作用素からわかる。

ネター作用素から特異点の重複度が計算できることになる。ここでは、原点でのミルナー数とチュリナ数について具体例で紹介したが、特異点が原点を離れている場合も問題なく我々のプログラムは動く。

次に、 $g = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + x^2z^2 + 5xy^4 + 2xyz^2 + xz^3 + y^5 + y^2z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$  を考える。 $g = 0$  で定義される超曲面は1次元の特異点を持つ。 $\{\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\}$  をネター作用素を計算するコマンド `noether` に入力すると次を出力する。

Prime ideal [z,x+y]

Noetherian ope.

[1,dz,dx,dx\*dz,dx^2,2/3\*dz^2+y\*dx^2\*dz,dx^3,(-30\*y\*dx-30)\*dz^2-15\*y^2\*dx^3\*dz+y\*dx^4]

No. elements is 8

特異点が直線  $z = x + y = 0$  になっており、この直線での重複度が8であることがネター作用素からわかる。一般的には、このような特異点の重複度を調べるには、横断的な超平面で切断し、その切断された点で解析を行うが、ネター作用素を用いると、切断する必要はない。

ネター作用素は、超曲面の特異点解析に役立つことが分かる。

## 謝 辞

この研究は日本学術振興会科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 18K03214, 22K03334 の助成を受けております。

## 参 考 文 献

- [1] Aoyama, T. and Noro, M.: Modular Algorithms for Computing Minimal Associated Primes and radicals of Polynomial Ideals. *Proc. ISSAC 2018*, pp. 31–38, ACM, 2018
- [2] Becker, T. and V. Weispfenning: Gröbner Bases, A Computational Approach to Commutative Algebra (GTM 141), Springer, 1993
- [3] Chen, J., Härkönen, M., Krone, R. and Leykin, A.: Noetherian operators and primary decomposition. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. **110**, 1–23, 2022
- [4] Chen, J., Cid-Ruiz, Y., Härkönen, M., Krone, R. and Leykin, A.: Noetherian operators in Macaulay 2. *The Journal of Software for Algebra and Geometry*, Vol. **12**,33–41, 2022
- [5] Cid-Ruiz, Y. and Strumfels, B.: Primary decomposition with differential operators. *International Mathematics Research Notices*, rnacl78, 2022
- [6] Cid-Ruiz, Y., Homs, R. and Strumfels, B.: Primary ideals and their differential equations. *Foundations of Computational Mathematics*, Vol. **21**, 1363–1399, 2021
- [7] Ehrenpreis, L.: A fundamental principle for system of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications. *Proc. Inter. Symp. on Linear Spaces*, 161–174, Jerusalem Academic Press, 1961
- [8] Ehrenpreis, L.: Fourier Analysis in Several Complex Variables. Wiley Interscience Publishers, 1970
- [9] Grayson, D. R. and Stillman, M. E.: Macaulay2: a software system for research in algebraic geometry. available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>
- [10] Gianni, P., Trager, B. and Zacharias, G.: Gröbner bases and Primary decomposition of polynomial ideals. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. **6**, 149–167, 1988
- [11] Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. The third revised edition. North-Holland, 1990
- [12] Kawazoe, T. and Noro, M.: Algorithms for computing a primary ideal decomposition without producing intermediate redundant components. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. **46**, 1158–1172, 2011
- [13] 鍋島克輔, 田島慎一: 零次元準素イデアルのネター作用素の計算と応用 – 新たな数式処理をめざして –, 京都大学数理解析研究所講究録, 第 2185 号, 1–15, 2021
- [14] Nabeshima, K. and Tajima, S.: Effective Algorithm for computing Noetherian operators of zero-dimensional ideals, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. **33**, 867–899, 2022
- [15] Noro, M. and Takeshima, T.: Risa/Asir - A computer algebra system. *Proc. ISSAC 1992*, pp. 387–396, ACM, 1992. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html>

- [16] Oberst, U.: The construction of Noetherian operators. *Journal of Algebra*, Vol **222**, 595–620, 1999
- [17] Palamodov, V.P.: Linear differential operators with constant coefficients. *Translated from the Russian by A. Brown. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 168*. Springer-Verlag, New York-Berlin 1970
- [18] Shimoyama, T. and Yokoyama, K.: Localization and primary decomposition of polynomial ideals. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. **22**, 247–277, 1996
- [19] Sturmfels, B.: Beyond Linear Algebra. arXiv:2108.09494v1 (2021). (Lecture at the International Congress of Mathematicians 2022)
- [20] 田島慎一: 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素. 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1138 号, 87–95, 2000
- [21] Tajima, S.: Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formulas. *Proc. Seventh International Conference on Several Complex Variables, in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis*, (eds by Kajiwara, Li and Shon) Dekker. 503–509, 2000
- [22] Tajima, S.: An algorithm for computing the Noetherian operator representations and its applications to constant coefficients holonomic PDE's. *Tools for Mathematical Modellings*, St. Petersburg, 154–160, 2001
- [23] 田島慎一: 多変数留数の biorthogonal 基底 (双対基底) と偏微分作用素, 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1239 号, 84–89, 2001
- [24] 田島慎一, 中村弥生: Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1352 号, 1–10, 2003
- [25] 田島慎一: 零次元準素イデアルとネター作用素アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1395 号, 57–63, 2004
- [26] 田島慎一: Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1431 号, 123–136, 2005
- [27] Tajima, S.: On Noether differential operators attached to a zero-dimensional primary ideal – shape basis case –. *Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, Kyushu University Press, 357–366, 2005
- [28] 田島慎一: Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality. 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1509 号, 1–23, 2006
- [29] 田島慎一: Syzygies を用いた Noether 作用素計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録, 第 1568 号, 81–86, 2007