Notes on the weighted polyharmonic Bergman spaces

大同大学・教養部数学教室　田中清喜 *
Kiyoki Tanaka
Liberal Arts and Sciences,
Daido University

1　はじめに

本稿は 2022 年 10 月に開催された「再生核ヒルベルト空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」において「Notes on the weighted polyharmonic Bergman spaces」のタイトルで発表した内容についての備忘録である．発表においては既発表論文と未発表論文（投稿準備中）の内容が含まれているため，基本的には証明を与えずに今後論文として発表予定の結果のアナウンスをするとともに，講究録という良い機会であるため一般の学術誌への投稿としては馴染まないような主観的な事柄や考察中の問題も整理のために文章化してみたい．

ベルグマン空間上における Toeplitz 作用素，Hankel 作用素といった作用素の特徴づけ問題は，Axler[1] 以降の 1980 年代後半から盛んに研究されている．[*1] その研究の一つとして Zhu[8] による Toeplitz 作用素の有界性をシンボルの平均函数，Berezin 変換の有界性によって特徴づけた結果がある．単位円板で考えて設定を整えれば，Berezin 変換は Poisson 積分であることから，シンボルが調和であればこそ作用素の有界性とシンボルの有界性が同値であるが，シンボルが調和でなければ何らかの調和化した函数を考えて作用素と対応付けができる，ということになる．Berezin 変換は正規化された再生核をある種テスト函数として構成される函数であるが，自然とポテンシャル論的対象物となっている点がとても興味深い．筆者としては，この特徴づけ問題に対して二つの興味がある．一つは，この特徴づけ問題の証明を追えばわかるのだが，正則性があまり現れずに核の評価，Carleson 条件といった積分量の評価のみに着目している点で，多少の設定変更を行っても同様の証明が成立するのではないか？定義できないという意味ではなく別の条件が出るような再生核ヒルベルト空間は考えることができないかという点である．もう一つは，他の設定において Toeplitz 作用素の有界性の特徴づけを考察して，シンボルの Berezin 変換 (Poisson 積分) に類する条件が出

* 本研究は科学研究費補助金 (20K14334) の助成を受けている．

*1 Axler 以前からも研究されているが，Axler 以後からこの種の論文が増え，1990 年に K. Zhu の著書 Operator theory in function spaces が出版されたりと相当盛んに研究されただろうことが想像される．

るのではないかということに興味がある．本稿は，Zhu[8] の結果の設定違いとして多調和ベルグマン空間における Toeplitz 作用素の有界性に対して平均函数による特徴づけを目指した結果になる．結論は思いとはかけ離れたというべきか状況が見えづらい特徴づけになっているが，以下から定義と設定からはじめて主定理を述べる．

2 記号の設定と主定理

この章では，記号の設定からはじめて主定理を述べる．$\mathbb{B}$ を $\mathbb{R}^N$ 内の単位球とし，次元 N は 2 以上の自然数とする．$1 \le p \le \infty$，$m \in \mathbb{N}$，$\alpha > -1$ に対して，重み付き多調和ベルグマン空間 $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ を

$$b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B}) = H^m(\mathbb{B}) \cap L^p(\mathbb{B}, dV_\alpha)$$

と定義する．ここで，$H^m(\mathbb{B})$ は $\mathbb{B}$ 上の多調和函数の成す空間である．$p = 2$ のとき，$b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ は再生核ヒルベルト空間であり，再生核（多調和ベルグマン核）を $R_{m,\alpha}(x, y)$ と書くことにする．つまり，$f \in b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ に対して

$$f(x) = \int_{\mathbb{B}} R_{m,\alpha}(x, y) f(y) dV_\alpha(y)$$

という表示を与える積分核である[*2]．また，$L^2(\mathbb{B}, dV_\alpha)$ から $b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ への直交射影を $P_{m,\alpha}$ とするとき，この射影の表示は

$$P_{m,\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{B}} R_{m,\alpha}(x, y) f(y) dV_\alpha(y)$$

という積分表示で与えられる．T.[7] により $1 < p < \infty$ ならば再生核の評価が与えられており，この $P_{m,\alpha}$ は $L^p(\mathbb{B}, dV_\alpha)$ から $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ への有界作用素と拡張できることがわかっている．これを基に Toeplitz 作用素 T_φ

$$T_\varphi f(x) = P_{m,\beta}[f\varphi](x) = \int_{\mathbb{B}} R_{m,\beta}(x, y) f(y) \varphi(y) dV_\beta(y)$$

を考える．勿論 φ を有界とすれば，T_φ は $1 < p < \infty$ のとき，$b_\beta^{m,p}(\mathbb{B})$ から $b_\beta^{m,p}(\mathbb{B})$ への作用素として well-defined である．ただ，この段階では，シンボルのクラスによっては定義域，値域によってはこの作用素は定義できるかどうか不明である．はじめに述べた Topelitz 作用素の有界性の特徴づけ問題はこの作用素を well-defined にするシンボルを決定する問題とみなせる．今回の設定としては，T_φ を $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ から $b_\beta^{m,q}(\mathbb{B})$ への作用素として有界性を考察する．定義自体は $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ の稠密部分集合 $b^{m,\infty}(\mathbb{B})$ において定義されている状態であることに注意しておく．そのように見て作用素を有界とするようなシンボルの特徴づけ問題を考える．

[*2] 今回考えている函数は実数値函数であり，内積も Hermite 内積ではなく実内積を入れている．

この特徴づけ問題のために用いられる Carleson 条件，Berezin 変換を拡張した関数は以下である．

$b^{m,p}_\alpha - b^{m,q}_\beta$ Carleson 条件：

$$\left(\int_{\mathbb{B}} |f|^q \varphi dV_\beta\right)^{1/q} \le C\|f\|_{p,\alpha} \quad \text{for } f \in b^{m,p}_\alpha$$

(t,γ)-Berezin 変換：

$$\tilde{\varphi}_{t,\alpha}(x) := \int_{\mathbb{B}} |r_{x,t,\alpha}(y)|^t \varphi(y) dV_\alpha(y)$$

ここで，$r_{x,t,\alpha}(y) = R_{m,\alpha}(x,y)/\|R_{m,\alpha}(x,\cdot)\|_{t,\alpha}$ は正規化した再生核である．平均函数自体は Choe-Lee-Na[2] でも用いられている定義である

$$\hat{\varphi}_\delta(x) := \frac{1}{V(E_\delta(x))} \int_{E_\delta(x)} \varphi(y) dy$$

を用いる．ここで，$E_\delta(x) := \{y \in \mathbb{B} : \ |x-y| < \delta r(x)\}$，$r(x) = (1-|x|)$ である．これらの関数については次の同値性が成り立つ．

定理 1 (T.)**.** *Let* $1 < p \le q < \infty$*,* $\alpha, \beta > -1$ *and* φ *be a positive* $L^1(dV_\beta)$*-function.The following conditions are equivalent:*

(a) φ *satisfies* $b^{m,p}_\alpha - b^{m,q}_\beta$ *Carleson condition.*
(b) $\sup_{x\in\mathbb{B}} \tilde{\varphi}_{q,\beta}(x)^{1/q}(1-|x|^2)^{\frac{N+\beta}{q}-\frac{N+\alpha}{p}} < +\infty$
(c) $\sup_{x\in\mathbb{B}} \hat{\varphi}_\delta(x)^{1/q}(1-|x|^2)^{\frac{N+\beta}{q}-\frac{N+\alpha}{p}} < +\infty$

また，Toeplitz 作用素の有界性をシンボルで特徴づける結果としては，次が得られた．

定理 2 (T.)**.** *Let* $1 < p \le q < \infty$*,* $\alpha, \beta > -1$ *and* φ *be a positive* $L^1(dV_\beta)$*-function.The following conditions are equivalent:*

(a) $T_\varphi : b^{m,p}_\alpha \to b^{m,q}_\beta$ *is bounded*
(b) $\hat{\varphi}_\delta(x)(1-|x|^2)^{\frac{N+\beta}{q}-\frac{N+\alpha}{p}}$ *is boudned.*

さらには，Toeplitz 作用素のコンパクト性をシンボルで特徴づける結果としては次である．

定理 3. *Let* $1 < p \le q < \infty$*,* $\alpha, \beta > -1$ *and* φ *be a positive* $L^1(dV_\beta)$*-function.The following conditions are equivalent:*

(a) $T_\varphi : b^{m,p}_\alpha \to b^{m,q}_\beta$ *is compact.*
(b) $\hat{\varphi}_\delta(x)(1-|x|^2)^{\frac{N+\beta}{q}-\frac{N+\alpha}{p}} \to 0$ *as* $|x| \to 1^-$

これらの条件は少しだけ奇異に見えるかもしれないが，Berezin 変換の部分をシンボルの微分に境界との距離函数をかけたものに変えた量が Pau-Zhao-Zhu[4] による正則ベルグマン空間におけ

る Hankel 作用素の有界性の特徴づけを行った定理に見受けられる．また，Choe-Lee-Na[2] においても重みこそないが調和ベルグマン空間において同様の結果を得ており，ある種の拡張と言えるだろう．もちろん，$m=1$，$p=q$ かつ $\alpha=\beta$ の際には Miao[3]，Stroethoff[6] の結果と一致する定理となっている．

また，$p \leq q$ を仮定していることは明確な改良点ではあるが，このような場合分けはある種自然であろう．なぜなら重みがない状況で $p \leq q$ を仮定すれば，定義域が値域を含んでいる状況になり，当然シンボルには挙動を改善する役割を要求される．逆に，$p > q$ ならば定義域は値域に含まれており挙動を改善する必要はなく，むしろどの程度までなら挙動を悪くしても作用素が有界になるか？という問題になる．Pau-Zhao-Zhu[4] では彼らの設定下において $p > q$ の場合にもシンボルが何らかの L^r 可積分性を持つことによって特徴付けされており今後の課題のひとつである．

3　おわりに

本稿では，Toeplitz 作用素の有界性の特徴づけ問題について多調和ベルグマン空間という設定下での結果を述べた．出てきた結果については Zhu[8] からの流れに沿ったアナロジーの域を出ているとはいいがたい．ただ，今回の考察から現れた Berezin 変換には何らかの (Poisson 積分のような) 性質を期待している．

また，本稿では速やかに主結果を述べた都合上本文中に引用することができなかったが，多調和函数の成す函数空間自体は当然初出では無い．本稿でも使われた T.[7] は Pavlović[5] を起源として考察をしている．この論文では，多調和函数の可積分性が Almanzi 分解として分解した際の各々の函数の可積分性により特徴づけられることを与えており，この点から多くの議論がアナロジーとして問題を生じないようになっている構造であると考える．その点でいえば，多調和ハーディ空間も Pavlović によって言及されているが，Almanzi 分解した際の球面平均の特徴づけについてはベルグマン型空間とは違い少しの問題（Hardy-Littlewood 型の評価式の重みの条件の問題）があるため，今後の研究対象たりえると考える．

参考文献

[1] S. Axler, *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke Math. J., **53** (1986), 315–332.

[2] B.R.Choe, Y.J.Lee and K.Na, *Positive Toeplitz operators from a harmonic Bergman space into another*, Tohoku Math. J., **56** (2004), 255–270.

[3] J. Miao,*Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, IEOT **27** (1997), 426–438.

[4] J. Pau, R. Zhao and K. Zhu, *Weighted BMO and Hankel operators between Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J., **65** (2016), 1639–1673.

[5] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 499–509.

[6] K. Stroethoff, *Compact Toeplitz operators on weighted harmonic Bergman spaces*, J. Austral Math. Soc. Ser., **64** (1998), 136–148.

[7] K .Tanaka, *Estimate for the polyharmonic Bergman kernel and their application*, Complex Anal. Oper. Theory (2019), 2707–2727.

[8] K. Zhu, *Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains*, J. Operator Theory, **20** (1988), 329–357.