

Chevalley formula in the equivariant quantum K -theory of partial flag manifolds

早稲田大学・基幹理工学部数学科 河野 隆史 *

Takafumi Kouno

Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering,
Waseda University

概要

Chevalley 公式は、一般旗多様体のトーラス同変量子 K 環の代数構造を決定する等式である。旗多様体のトーラス同変量子 K 環における Chevalley 公式は、Lenart, 内藤, 佐垣によって組合せ論的に記述された。これを利用すると、一般旗多様体に対する Chevalley 公式の記述が得られる。しかし、この記述には cancellation が発生する。本研究では、 A , C 型の極大放物型部分群に対応する一般旗多様体、また A 型 2 ステップ旗多様体に対して、これらの cancellation を決定した。本稿では、そのうち A 型 2 ステップ旗多様体の場合の結果を紹介する。本研究は、Cristian Lenart, 内藤聡, 佐垣大輔との共同研究である。また、本稿では論文 [KLNS] の内容を扱う。

1 Introduction

G を連結かつ単連結な複素単純代数群とし、 $H \subset G$ をその極大トーラス、 $(H \subset) B \subset G$ を Borel 部分群とする。また、 I を G の Dynkin 図形の頂点集合とし、 $(B \subset) P_J \subset G$ を集合 $J \subset I$ に対応する G の放物型部分群とする。このとき、商 G/B は旗多様体 (flag manifold)、商 G/P_J は一般旗多様体 (partial flag manifold) と呼ばれる。Schubert calculus では、これらの多様体 G/B , G/P_J を組合せ論の立場から研究する。例えば、コホモロジー環 $H^*(G/P_J)$ や K 環 $K(G/P_J)$ などの積の構造を組合せ論的に記述することは、Schubert calculus の一つの目標である。

Schubert calculus において最近扱われている代数として、一般旗多様体 G/P_J のトーラス同変量子 K 環 $QK_H(G/P_J)$ が挙げられる。量子 K 環は、Givental ([G]) および Lee ([Lee]) によって 2000 年代前半に導入された。これは、トーラス H の表現環を $R(H)$ と書き、 $K_H(G/P_J)$ を G/P_J の H -同変 K 環とすると、 $R(H)$ -加群として

$$QK_H(G/P_J) := K_H(G/P_J) \otimes_{R(H)} R(H)[Q_k \mid k \in I \setminus J]$$

と定義される。 $QK_H(G/P_J)$ には、“ K 理論版の Gromov-Witten 不変量”を用いて積が定義され

* 日本学術振興会特別研究員 PD

る. Schubert calculus では, この代数構造を組合せ論的に記述することを目標とする.

いま, W を G の Weyl 群, $W_J = W_{P_J}$ を W の P_J に対応する放物型部分群とし, $W^J = W^{P_J} \simeq W/W_J$ を商 W/W_J の minimal coset representative の集合とする. このとき, 各 $v \in W^J$ に対して Schubert 類 $[\mathcal{O}^v] \in QK_H(G/P_J)$ が定義される. Schubert 類全体の集合 $\{[\mathcal{O}^v] \mid v \in W^J\}$ は, $QK_H(G/P_J)$ の $R(H)[Q_k \mid k \in I \setminus J]$ -加群としての自由基底である. (以下 $R(H)[Q_k \mid k \in I \setminus J]$ を $R(H)[Q]$ と略記する.) そのため, 各 $v, w, u \in W^J$ に対して

$$[\mathcal{O}^v] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{u \in W^J} c_{v,w}^u [\mathcal{O}^u] \quad (1.1)$$

で定まる構造定数 $c_{v,w}^u \in R(H)[Q]$ を組合せ論的に記述することで, $QK_H(G/P_J)$ の代数構造を組合せ論的に理解できる. しかし, 一般の $v, w, u \in W^J$ に対しては構造定数の組合せ論的な記述が発見されていない.

一方, 特に v が W^J の単純鏡映 s の場合の (具体的な) 展開式

$$[\mathcal{O}^s] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{u \in W^J} c_{s,w}^u [\mathcal{O}^u] \quad (1.2)$$

は Chevalley 公式と呼ばれる. Chevalley 公式は, 展開式 (1.1) の特別な場合である. しかし, Buch, Chaput, Mihalcea, Perrin は次の定理を証明した.

定理 1.1 ([BCMP, Corollary 5.14]). R を, 以下の条件を満たす $R(H)[Q]$ -代数とする.

- 自由 $R(H)[Q]$ -加群としての自由基底 $\{\sigma_v \mid v \in W^J\} \subset R$ が存在する.
- 自由基底 $\{\sigma_v \mid v \in W^J\}$ は Chevalley 公式を満たす. すなわち, $\sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_1$ および任意の単純鏡映 $s \in W^J$ および任意の $w \in W^J$ に対し

$$\sigma_s \cdot \sigma_w = \sigma_w \cdot \sigma_s = \sum_{u \in W^J} c_{s,w}^u \sigma_u$$

が成り立つ. ただし, $c_{s,w}^u \in R(H)[Q]$ は式 (1.2) と同一である.

このとき, $\sigma_v \mapsto [\mathcal{O}^v]$ ($v \in W^J$) によって定まる $R(H)[Q]$ -加群の準同型写像 $R \rightarrow QK_H(G/P_J)$ は環同型である.

よって, $QK_H(G/P_J)$ の代数構造は, Chevalley 公式によって決定される. そこで, Chevalley 公式の組合せ論的記述を考える. 以下, ϖ_k ($k \in I$) を G の基本ウェイトとし, $-\varpi_k$ ($k \in J$) に対応する G/P_J 上の直線束を $\mathcal{O}(-\varpi_k)$ と書く. まずは $J = \emptyset$, すなわち $P_J = B$ である場合を考える. このとき, $G/P_J = G/B$ は旗多様体である. Lenart, 内藤, 佐垣は, $QK_H(G/B)$ における次の記述を証明した.

定理 1.2 ([LNS, Theorem 49]). $k \in I$, $w \in W$ とし, reduced $(-\varpi_k)$ -chain Γ をひとつ固定する. $QK_H(G/B)$ において

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma)} (-1)^{|A|} Q^{\text{down}(A)} e^{-\text{wt}(A)} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}] \quad (1.3)$$

が成り立つ.

定理 1.2 における reduced $(-\varpi_k)$ -chain, $\mathcal{A}(w, \Gamma)$, $Q^{\text{down}(A)}$, $\text{wt}(A)$, $\text{end}(A)$ の定義はここでは述べないが, 量子 alcove モデルという組合せ論的な理論で用いられるものである. 定理 1.2 は, 内藤, Orr, 佐垣によって記述された半無限旗多様体の結果 ([NOS]) から従う. 式 (1.3) における $[\mathcal{O}(-\varpi_k)]$ については

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] = e^{\varpi_k}(1 - [\mathcal{O}^{s_k}])$$

という 1 次関係式が知られている. そのため, 式 (1.3) は Chevalley 公式 (1.2) と等価である.

続いて, 一般旗多様体 G/P_J を考える. $\alpha_i^\vee$ ($i \in I$) を G の単純余ルート, $Q^\vee = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ を G の余ルート格子とし, $\xi = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i^\vee \in Q^\vee$ ($c_i \in \mathbb{Z}$) に対して $[\xi] := \sum_{i \in I \setminus J} c_i \alpha_i^\vee$ と定める. また, $w \in W$ に対し, w の W/W_J における minimal coset representative を $[w]$ と書く. 加藤は, 旗多様体の H -同変量子 K 環 $QK_H(G/B)$ と一般旗多様体の H -同変量子 K 環 $QK_H(G/P_J)$ の間に, 次のような関係があることを証明した.

定理 1.3 ([K, Theorem 2.18]). $R(H)$ -加群の全射準同型写像

$$\Phi_J : QK_H(G/B) \rightarrow QK_H(G/P_J)$$

であって

- $\xi \in Q^{\vee,+} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee$ および $w \in W$ に対し, $\Phi_J(Q^\xi[\mathcal{O}^w]) = Q^{[\xi]}[\mathcal{O}^{[w]}]$
- $\Phi_J([\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot \bullet) = [\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot \Phi_J(\bullet)$

となるものが存在する.

よって, $QK_H(G/B)$ における Chevalley 公式 (1.3) の両辺を全射 Φ_J で写すことで, $QK_H(G/P)$ における Chevalley 公式が得られる. しかし, このように得られた Chevalley 公式には, 全射 Φ_J の核に応じて cancellation が発生する. 本研究の目的は, この cancellation をすべて決定し, Chevalley 公式の cancellation-free な表示を得ることである.

Chevalley 公式の cancellation-free な記述は, G/P_J が “cominusculc” の場合は Buch, Chaput, Mihalcea, Perrin によって得られている ([BCMP]). また, 旗多様体 G/B に対しては, Lenart, 内藤, 佐垣による定理 1.2 で記述されている. G が A , D , E , B 型で, $J = I \setminus \{k\}$ という形 (すなわち P_J が極大放物型部分群) の場合で, かつ ϖ_k が minuscule であるときは, 筆者および内藤, 佐垣によって記述された ([KNS]). 本研究では, G が A , C 型で P_J が極大放物型部分群のとき, また G が A 型で, $J = I \setminus \{k_1, k_2\}$ ($k_1 \neq k_2$) という形 (このとき, G/P_J を **2 ステップ旗多様体** という) のときに cancellation-free な Chevalley 公式の表示を得た ([KLNS]). 本稿では, そのうち G/P_J が A 型 2 ステップ旗多様体のときの cancellation-free Chevalley 公式を紹介する.

以下, $G = SL_n(\mathbb{C})$ とし, $I = \{1, \dots, n-1\}$ とみなす. $k_1, k_2 \in I$ を $k_1 < k_2$ となるようにとり, $J = I \setminus \{k_1, k_2\}$ とする.

記号

- Δ : G のルート系
- $\Delta^+ \subset \Delta$: 正ルート全体の集合
- $\rho := (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$
- α_i ($i \in I$): 単純ルート
- $\alpha^\vee$ ($\alpha \in \Delta$): α に対応する余ルート
- $|\beta| := \begin{cases} \beta & \text{if } \beta \in \Delta^+ \\ -\beta & \text{if } \beta \in -\Delta^+ \end{cases} \quad (\beta \in \Delta): \beta \text{ の絶対値}$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}$ 上の自然なペアリング ($\mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$)
- $s_\alpha \in W$ ($\alpha \in \Delta^+$): α に対応する鏡映
- $s_i = s_{\alpha_i}$ ($i \in I$): α_i に対応する単純鏡映
- ℓ : W 上の長さ関数

2 量子 alcove モデルと Chevalley 公式

量子 alcove モデルは、整ウェイトを 1 つ決めるごとに定まる組合せ論的理論である。優整ウェイトに対する量子 alcove モデルは、Lenart, Lubovsky ([LL]) によって、1 列の Young 図形に対応するいくつかの Kirillov-Reshetikhin クリスタルのテンソル積を実現するモデルとして考案された。その後、量子 alcove モデルは、Lenart, 内藤, 佐垣 ([LNS]) により、優整とは限らない一般の整ウェイトに対して拡張され、Chevalley 公式の組合せ論的記述に現れた。本節では、本稿で使う必要最低限な分に絞って、量子 alcove モデルを導入する。一般の量子 alcove モデルについての詳細は、[LNS] を参照されたい。

量子 alcove モデルの理論では、Brenti, Fomin, Postnikov によって導入された量子 Bruhat グラフを用いる。

定義 2.1 ([BFP, Definition 6.1]). 次のように定まるラベル付き有向グラフ $\text{QBG}(W)$ を**量子 Bruhat グラフ**という。

- 頂点集合: W
- ラベルの集合: Δ^+
- 辺: $x \xrightarrow{\alpha} y$ ($x, y \in W$, $\alpha \in \Delta^+$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} y = xs_\alpha$ であり、次のいずれか一方が成り立つ:
 - (i) $\ell(y) = \ell(x) + 1$ (このとき、辺 $x \xrightarrow{\alpha} y$ を **Bruhat 辺**という)
 - (ii) $\ell(y) = \ell(x) - 2\langle \rho, \alpha^\vee \rangle + 1$ (このとき、辺 $x \xrightarrow{\alpha} y$ を**量子辺**という)

与えられた 2 元 $x, y \in W$ に対して、 $\text{QBG}(W)$ において辺 $x \rightarrow y$ が存在するかを判定する方法を考える。まず、 W は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型である。この同型のもと、各 $w \in W$ を置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

と同一視する．また，各 $1 \leq i < j \leq n$ に対して $(i, j) := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1}$ と定めると， $\Delta^+ = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ である．混乱の恐れがないときは，同じ記号 (i, j) で正ルート $(i, j) \in \Delta^+$ に対応する鏡映 $s_{(i, j)} \in W$ を表すことにする．求める判定法は以下の通りである．

補題 2.2 ([Len, Proposition 3.6]). $w \in W$, $1 \leq i < j \leq n$ とする．

(1) $w \xrightarrow{(i, j)} w(i, j)$ が Bruhat 辺であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成り立つことである．

- $w(i) < w(j)$
- $w(i) < w(k) < w(j)$ となる $i < k < j$ が存在しない

(2) $w \xrightarrow{(i, j)} w(i, j)$ が量子辺であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成り立つことである．

- $w(i) > w(j)$
- すべての $i < k < j$ に対して $w(j) < w(k) < w(i)$

量子 alcove モデルの理論では，整ウェイト λ に対して定まる “ λ -chain” を用いる． λ -chain は， λ に応じて作られるルートの列である．ここでは，基本ウェイトの (-1) 倍 $-\varpi_k$ ($k \in I$) に対して，特定の $(-\varpi_k)$ -chain $\Gamma(k)$ を導入する．

定義 2.3 ([Len, (3.1)] (cf. [LP, Corollary 15.4])). ルートの列 $\Gamma(k)$ を

$$\begin{aligned} \Gamma(k) := & \begin{pmatrix} -(1, n), & -(1, n-1), & \cdots, & -(1, k+1), \\ -(2, n), & -(2, n-1), & \cdots, & -(2, k+1), \\ & & \cdots & \\ -(k, n), & -(k, n-1), & \cdots, & -(k, k+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

で定める．

上で定めた $\Gamma(k)$ に， $\Gamma(k) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ と添字をつける．量子 alcove モデルの理論では，次に定義する admissible subset を主な対象として扱う．

定義 2.4 ([LNS, Definition 17]). $w \in W$ とする．添字集合 $\{1, \dots, m\}$ の部分集合 $A = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_s\} \subset \{1, \dots, m\}$ に対して

$$\Pi(A) : w = w_0 \xrightarrow{|\beta_{j_1}|} w_1 \xrightarrow{|\beta_{j_2}|} \cdots \xrightarrow{|\beta_{j_s}|} w_s$$

が QBG(W) における道であるとき， A は w -admissible であるという． w -admissible である $\{1, \dots, m\}$ の部分集合全体の集合を $\mathcal{A}(w, \Gamma(k))$ と書く．

定義 2.5 ([LNS, (11), (13)]). $w \in W$ とする．各 $A = \{j_1, \dots, j_s\} \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k))$ に対し

$$\begin{aligned} \text{end}(A) &:= ws_{|\beta_{j_1}|} s_{|\beta_{j_2}|} \cdots s_{|\beta_{j_s}|} (= w_s), \\ \text{down}(A) &:= \sum_{\substack{1 \leq t \leq s \\ w_{t-1} \rightarrow w_t \text{ は量子辺}}} |\beta_{j_t}|^\vee \end{aligned}$$

と定める．

注意 2.6. admissible subset $A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k))$ に対して, 上で定めた $\text{end}(A)$ と $\text{down}(A)$ の他に, $\text{wt}(A)$ という整ウェイトが定まる ([LNS, (12)]). 本稿では, その定義を省略する. なお, 今回の設定においては, 常に $\text{wt}(A) = -w\varpi_k$ となる.

Lenart, 内藤, 佐垣は, この admissible subset を用いて, $QK_H(G/B)$ における Chevalley 公式 (式 (1.3)) を記述した. ここでは, 上で定義した $\Gamma(k)$ を使って, 改めて式を書き下す. 非負整数 $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($i \in I$) に対して $Q^{\sum_{i \in I} m_i \alpha_i^\vee} := \prod_{i \in I} Q_i^{m_i}$ と定める.

定理 2.7 ([LNS, Theorem 49]). $k \in I$, $w \in W$ とする. $QK_H(G/B)$ において, 以下が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k))} (-1)^{|A|} Q^{\text{down}(A)} e^{w\varpi_k} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}] \quad (2.1)$$

一方, 加藤による定理 1.3 により, よい全射 $\Phi_J : QK_H(G/B) \twoheadrightarrow QK_H(G/P_J)$ が存在する. そこで, 式 (2.1) の両辺を全射 Φ_J で写すことで, 以下の定理を得る. これは, $QK_H(G/P_J)$ における Chevalley 公式の組合せ論的記述を与える.

定理 2.8. $k \in I \setminus J = \{k_1, k_2\}$, $w \in W^J$ とする. $QK_H(G/P_J)$ において, 以下が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k))} (-1)^{|A|} Q^{[\text{down}(A)]} e^{w\varpi_k} [\mathcal{O}^{[\text{end}(A)]}] \quad (2.2)$$

この式には, 次の例のように cancellation が発生する.

例 2.9. $n = 6$ とする. $G = SL_6(\mathbb{C})$ は A_5 型である. $J = \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 4\}$ に対し, 対応する 2 ステップ旗多様体 G/P_J を考える. $w = s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2 \in W^J$ とするとき, 式 (2.1) を計算することで, $QK_H(G/B)$ における等式

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}(-\varpi_2)] \cdot [\mathcal{O}^w] &= e^{w\varpi_2} ([\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2}] - [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_1 s_2}] \\ &\quad - Q_2 Q_3 Q_4 [\mathcal{O}^{s_5 s_1}] - Q_2 [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3}] \\ &\quad + Q_2 Q_3 Q_4 [\mathcal{O}^{s_5 s_2 s_1}] + Q_2 [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_1}] \\ &\quad + Q_2 Q_3 Q_4 [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2}] - Q_2 Q_3 Q_4 [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_1}]) \end{aligned}$$

を得る. 一方, この両辺を全射 Φ_J で写す (または式 (2.2) を用いる) ことで, $QK_H(G/P_J)$ における等式

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}(-\varpi_2)] \cdot [\mathcal{O}^w] &= e^{w\varpi_2} ([\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2}] - [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_1 s_2}] \\ &\quad - Q_2 Q_4 [\mathcal{O}^e] - Q_2 [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4}] \\ &\quad + Q_2 Q_4 [\mathcal{O}^{s_2}] + Q_2 [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4}] \\ &\quad + Q_2 Q_4 [\mathcal{O}^{s_1 s_2}] - Q_2 Q_4 [\mathcal{O}^{s_1 s_2}]) \\ &= e^{w\varpi_2} ([\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2}] - [\mathcal{O}^{s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_1 s_2}] \\ &\quad - Q_2 Q_4 [\mathcal{O}^e] + Q_2 Q_4 [\mathcal{O}^{s_2}]) \end{aligned}$$

を得る. この式では, 確かに cancellation が発生していることがわかる.

3 2 ステップ旗多様体に対する cancellation-free Chevalley 公式

式 (2.2) では, 例 2.9 でみたように cancellation が発生する. この cancellation を記述し, cancellation-free な Chevalley 公式を書き下すことが, 本研究の目的である. 本節では, その結果を紹介し, 証明の方法を説明する.

まず, 結果の記述に必要ないくつかの条件を整理する. まず, $w \in W$ に対し

$$\mathcal{A}_{\prec}(w, \Gamma(k)) := \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k)) \mid \Pi(A) \text{ の辺はすべて Bruhat 辺} \}$$

と定める. 次に, $w \in W^J$ に対し, 条件 (Q) および (Full) を, 以下のように定める.

$$(Q) \quad w(k_1) > w(k_2) > w(k_1 + 1) > w(k_2 + 1)$$

(Full) 以下のすべてが成り立つ:

- (i) $w(k_2 + 1)$ は $\{w(1), \dots, w(n)\}$ の中で最小である.
- (ii) $w(k_1 + 1)$ は $\{w(1), \dots, w(k_2)\}$ の中で最小である.
- (iii) $w(k_1)$ は $\{w(1), \dots, w(n)\}$ の中で最大である.

注意 3.1. $w \in W^J$ とする. 判定法 (補題 2.2) を用いると, 以下のことがわかる. ただし, $w \in W^J$ より, 不等式

- $w(1) < w(2) < \dots < w(k_1)$
- $w(k_1 + 1) < w(k_1 + 2) < \dots < w(k_2)$
- $w(k_2 + 1) < w(k_2 + 2) < \dots < w(n)$

が成り立っていることに注意する (例えば [BB, Lemma 2.4.7] 参照).

- (1) 条件 (Q) と, $w \xrightarrow{(k_1, k_2+1)} w(k_1, k_2 + 1)$ が量子辺であることは同値である.
- (2) $w(k_1) > w(k_1 + 1)$ であることと, $w \xrightarrow{(k_1, k_1+1)} w(k_1, k_1 + 1)$ が量子辺であることは同値である.
- (3) $w \xrightarrow{(i, j)} w(i, j)$ ($i \leq k_1, j \geq k_1 + 1$) が量子辺ならば, (i, j) は $(k_1, k_1 + 1)$ または $(k_1, k_2 + 1)$ のいずれかである.

以下, cancellation-free な Chevalley 公式の記述を紹介する.

定理 3.2 ([KLNS, Theorems 18, 20, 22]). $w \in W^J$ とする.

(1) 条件 (Full) が成り立つとき, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] &= e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\prec}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\text{end}(A)}] - Q_{k_1} [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A) s_{k_1} \rfloor}] \right. \\ &\quad \left. - Q_{k_1} Q_{k_2} \left([\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A)(k_1, k_2+1) \rfloor}] - [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A)(k_1, k_2+1) s_{k_1} \rfloor}] \right) \right) \end{aligned}$$

(2) 条件 $w(k_1) < w(k_1 + 1)$ が成り立つとき, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}]$$

(3) 条件 $w(k_1) > w(k_1 + 1)$ が成り立っているとし, さらに条件 (Q) が成り立たないと仮定する.

(i) 条件 $w(1) < w(k_1 + 1)$ または条件 $w(k_1) < w(k_2)$ が成り立つとき, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}]$$

(ii) 条件 $w(1) > w(k_1 + 1)$ かつ条件 $w(k_1) > w(k_2)$ が成り立つとき, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\text{end}(A)}] - Q_{k_1} [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A) s_{k_1} \rfloor}] \right)$$

(4) 条件 (Q) が成り立つと仮定し, さらに条件 $w(k_1) < w(n)$ が成り立つとする.

(i) 条件 $w(1) < w(k_1 + 1)$ が成り立つならば, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}]$$

(ii) 条件 $w(1) > w(k_1 + 1)$ が成り立つならば, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\text{end}(A)}] - Q_{k_1} [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A) s_{k_1} \rfloor}] \right)$$

(5) 条件 (Q) が成り立つと仮定し, さらに条件 $w(k_1) > w(n)$ が成り立つとする.

(i) 条件 $w(1) < w(k_2 + 1)$ が成り立つならば, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}]$$

(ii) 条件 $w(k_2 + 1) < w(1) < w(k_1 + 1)$ が成り立つならば, 次の cancellation-free な等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & [\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] \\ &= e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\text{end}(A)}] - Q_{k_1} Q_{k_2} [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A) (k_1, k_2 + 1) \rfloor}] \right) \end{aligned}$$

注意 3.3. $k = k_2$ の場合の積 $[\mathcal{O}(-\varpi_{k_2})] \cdot [\mathcal{O}^w]$ も, 定理 3.2 に Dynkin 図形の自己同型 $I \rightarrow I$, $i \mapsto n - i$ を適用することで得られる.

定理の証明は, 以下のような流れで行われる.

1. 式 (2.2) において, $k = k_1$ とする. この右辺の和を, $A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))$ にわたる部分

$$S_1 := \sum_{A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\text{end}(A)}]$$

と, それ以外の項の和

$$S_2 := \sum_{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \setminus \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} Q^{\{\text{down}(A)\}} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\{\text{end}(A)\}}]$$

に分ける. なお, $A \in \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))$ に対しては, $\lfloor \text{end}(A) \rfloor = \text{end}(A)$ (例えば [BB, Corollary 2.5.2] 参照), $\text{down}(A) = 0$ が成り立つことに注意する. また, 和 S_1 は cancellation-free である ([KLNS, Remark 6] 参照).

2. 集合 $\mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \setminus \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1))$ の構造を調べる.
3. 和 S_2 の cancellation の様子を調べる.

ステップ 2 では, 以下の補題を用いる.

補題 3.4 ([KLNS, Lemma 17]). $w \in W^J$ とする. $A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1))$ に対し, 道 $\Pi(A)$ が量子辺を含むとき, $\Pi(A)$ は以下のいずれかの形である. ただし, $\xrightarrow{\text{B}}$ は Bruhat 辺, $\xrightarrow{\text{Q}}$ は量子辺を表す.

- (1) $\Pi(A) : w = w_0 \xrightarrow{\text{B}} \cdots \xrightarrow{\text{B}} w_{r-1} \xrightarrow[\text{Q}]{(k_1, k_1+1)} w_r$
- (2) $\Pi(A) : w = w_0 \xrightarrow{\text{B}} \cdots \xrightarrow{\text{B}} w_{r-1} \xrightarrow[\text{Q}]{(k_1, k_2+1)} w_r$
- (3) $\Pi(A) : w = w_0 \xrightarrow{\text{B}} \cdots \xrightarrow{\text{B}} w_{r-2} \xrightarrow[\text{Q}]{(k_1, k_2+1)} w_{r-1} \xrightarrow[\text{B}]{(k_1, k_1+1)} w_r$

よって, この補題にしたがって

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(w, \Gamma(k_1)) &:= \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \mid \Pi(A) \text{ は (1) の形} \} \\ \mathcal{A}_2(w, \Gamma(k_1)) &:= \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \mid \Pi(A) \text{ は (2) の形} \} \\ \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1)) &:= \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \mid \Pi(A) \text{ は (3) の形} \} \end{aligned}$$

と定めると

$$\mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \setminus \mathcal{A}_{\leq}(w, \Gamma(k_1)) = \mathcal{A}_1(w, \Gamma(k_1)) \sqcup \mathcal{A}_2(w, \Gamma(k_1)) \sqcup \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))$$

である. この分解を用いて, ステップ 3 の cancellation を調べる. 例えば, 和

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} Q^{\{\text{down}(A)\}} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\{\text{end}(A)\}}]$$

の cancellation は, 以下のように調べられる. まず, 補題 3.4 より, 各 $A \in \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))$ に対し $\lfloor \text{down}(A) \rfloor = [(k_1, k_2+1)^\vee] = [\alpha_{k_1}^\vee + \cdots + \alpha_{k_2}^\vee] = \alpha_{k_1}^\vee + \alpha_{k_2}^\vee$ である. よって $Q^{\lfloor \text{down}(A) \rfloor} = Q_{k_1} Q_{k_2}$ である. いま, 条件 (Q) が成り立つことを仮定し, ある $1 \leq l \leq k_1$ が存在して $w(k_2+1) < w(l) < w(k_1+1)$ となるとする. このとき, $w(p) < w(k_1+1)$ となる最小の $1 \leq p \leq k_1$ をとると, 補題

2.2 を用いて $\mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))$ 上の符号を反転する対合 $A \leftrightarrow A \sqcup \{(p, k_1 + 1)\}$ を定義できる. この対合は $\lfloor \text{end}(A) \rfloor$ を保つ. したがって

$$\begin{aligned} & \sum_{A \in \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} Q^{\lfloor \text{down}(A) \rfloor} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A) \rfloor}] \\ &= e^{w\varpi_{k_1}} Q_{k_1} Q_{k_2} \sum_{A \in \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\lfloor \text{end}(A) \rfloor}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. このように, 場合分けの条件に応じて, 符号を反転する対合を構成することで, cancellation を記述することができる.

謝辞

RIMS 共同研究「組合せ論的表現論における最近の展開」にて貴重な講演の機会を頂き, ありがとうございます. また, 共同研究者である Cristian Lenart 氏, 内藤聡氏, 佐垣大輔氏に感謝いたします. 本研究において, 筆者は JSPS 科研費 20J12058 および 22J00874 の助成を受けています.

参考文献

- [BB] A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.
- [BCMP] A.S. Buch, P.-E. Chaput, L.C. Mihai, and N. Perrin, A Chevalley formula for the equivariant quantum K -theory of cominuscule varieties, *Algebr. Geom.* **5** (2018), no. 5, 568–595.
- [BFP] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups, *Int. Math. Res. Not.* **1999** (1999), no. 8, 419–441.
- [G] A. Givental, On the WDVV equation in quantum K -theory, *Michigan Math. J.* **48** (2000), 295–304.
- [K] S. Kato, On quantum K -groups of partial flag manifolds, arXiv:1906.09343.
- [KLNS] T. Kouno, C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, Quantum K -theory Chevalley formulas in the parabolic case, arXiv:2109.11596.
- [KNS] T. Kouno, S. Naito, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant minuscule fundamental weights in the equivariant quantum K -group of partial flag manifolds, *J. Combin. Theory Ser. A* **192** (2022), Paper No. 105670.
- [Lee] Y.-P. Lee, Quantum K -theory, I: Foundations, *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 3, 389–424.

- [Len] C. Lenart, From Macdonald polynomials to a charge statistic beyond type A , *J. Combin. Theory Ser. A* **119** (2012), no. 3, 683–712.
- [LL] C. Lenart and A. Lubovsky, A generalization of the alcove model and its applications, *J. Algebr. Comb.* **41** (2015), no. 3, 751–783.
- [LNS] C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, A general Chevalley formula for semi-infinite flag manifolds and quantum K -theory, arXiv:2010.06143.
- [LP] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K -theory and representation theory, *Int. Math. Res. Not.* **2007** (2007), no. 12, Art. ID rnm038.
- [NOS] S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds, *Adv. Math.* **387** (2021), Paper No. 107828.