On generalized partial Dedekind zeta and Euclidean minima

早稲田大学 基幹理工研究科数学・応用数理専攻 * 松野　優太郎
Yutaro Matsuno
Department of Mathematics, Waseda University

1　概要

Euclidean minima は，代数体が整数環から norm の意味でどの程度離れているかを表す値であり，代数体の norm Euclidity を研究する主要な手法の一つとなっているが，その性質は整数環の格子の形状という幾何的な問題が関与するため，二次体を除いて大きな規則性は見出されていない．一方，Hurwitz zeta は新谷によってその多重化が与えられており，負の整数点での値と Bernoulli 多項式との関係が分かっている．本記事では，Hurwitz zeta を多重化とは少し異なる形で部分 Dedekind zeta と Hurwitz zeta の両方を含むような一般化部分 Dedekind zeta を定義して，それが関数等式を持つことを述べ，正の無限大における振る舞いと数に関する Euclidean minima との関係を指摘する．

2　記号の設定

K を n 次代数体，$\mathfrak{o}$ を K の整数環，$\mathfrak{o}^*$ を $\mathfrak{o}$ の単数群，$\mathfrak{o}^*_+ \subset \mathfrak{o}^*$ を総正な単数全体の部分群，D を K の判別式，w を K 内の 1 の冪根全体の有限群の位数，R を K の単数基準，r_1 を K の実埋め込みの個数，r_2 を K の虚埋め込みの個数の半分，$\mathbf{R} = \mathbb{R}^{r_1} \times \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w = \overline{z}\}^{r_2}$ を K の Minkowski 空間，$\mathbf{R}_+ = \mathbb{R}^n_{>0} \subset \mathbf{R}$，$\mathrm{Tr} : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$ を trace，$N : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$ を norm，J を K の分数 ideal 群，$\mathfrak{N} : J \to \mathbb{Q}_{>0}$

* 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3 丁目 4-1

を ideal norm，$\mathfrak{d}$ を K の微分 (共役差積)，P を K の単項 ideal 群，$Cl = J/P$ を K の ideal 類群，$h = \#Cl$ を K の類数，$P_+ \subset P$ を総正な単項 ideal 全体の部分群，$P/P_+ = \{[(\alpha_0)], [(\alpha_1)], \ldots, [(\alpha_{t-1})]\}$ $(t \leq r_1,\ \alpha_0 = 1)$ とし，混同の無い限り，自然な入射 $\Phi : K \to \mathbf{R}$ を同一視する．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は 0 を含むものとする．

3　研究の背景

3.1　Euclidean minima について

$\mathfrak{o}$ が norm に関して Euclid 整域であるとき，K を **norm Euclidean** という．このとき明らかに，$h = 1$ である．

K の ideal $\mathfrak{a}$，$\alpha \in K$ に対し，

$$M_{\mathfrak{a}}(\alpha) = \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}} \inf_{\theta \in \mathfrak{a}} |N(\alpha + \theta)|$$

を α の $\mathfrak{a}$ における **Euclidean minima** という．α の有理性から，上の定義の inf は min に書き換えられることが簡単に分かる．

K の ideal 類 $A = [\mathfrak{a}]$ に対し，

$$M(A) = \sup_{\alpha \in K} M_{\mathfrak{a}}(\alpha)$$

を A の **Euclidean minima** という．$\mathbf{R}/\mathfrak{a}$ の compact 性から，$M(A)$ は有限値であることが分かり，$M(A)$ が $\mathfrak{a} \in A$ の取り方に依らないことも明らかである．特に，$M(K) = M([(1)])$ を K の **Euclidean minima** といい，$M(K) < 1$ ならば，K が norm Euclidean であり，$M(K) > 1$ ならば，K が norm Euclidean でないことが分かる．

Lenstra[4] は，ideal 類の Euclidean minima が 1 より小さいならば，それが ideal 類群の生成元であることを指摘した．特にこのとき，ideal 類群は巡回群である．

定理 3.1　(Lenstra) A を K の ideal 類とするとき，
$M(A) < 1$ ならば，A は Cl の生成元であり，

$$h \leq \min_{\alpha \in \mathfrak{o} - \mathfrak{o}^*} |N(\alpha)|$$

である．

また，Treatman[7] は複数の ideal 類に対して Euclidean minima を拡張することで，それが 1 より小さいならば，それらが ideal 類群の生成系であることを示した．

定理 3.2 (Treatman) $A_1=[\mathfrak{a}_1],\ldots,A_r=[\mathfrak{a}_r]$ を K の ideal 類とするとき,

$$\sup_{\alpha\in K}\min_{i=1,\ldots,r} M_{\mathfrak{a}_i}(\alpha)<1$$

ならば，$A_1,\ldots,A_r$ は Cl の生成系である.

これらのことから，Euclidean minima は ideal 類群の生成系と連関していると考えられる.

Euclidean minima に関して知られている主要な結果は以下の三つである.

定理 3.3 (i)K が実二次体ならば,

$$\frac{1}{128}\sqrt{D}\le M(K)$$

である．(Davenport[1])
(ii)K が $[K:\mathbb{Q}]\le 6$ なる総実代数体ならば,

$$M(K)\le 2^{-[K:\mathbb{Q}]}\sqrt{|D|}$$

である．(MucMullen[5])
(iii) 任意の代数体 K に対し,

$$M(K)\le 2^{-[K:\mathbb{Q}]}|D|$$

である．(Fluckiger[2])

3.2 新谷 zeta について

後述の一般化部分 Dedekind zeta は，新谷の単数定理によって新谷 zeta の和で記述でき，新谷 zeta の負の整数点での値が新谷の一般化 Bernoulli 多項式によって表されることから，AMMC(後述) の Euclidean minima の Bernoulli 多項式による表示を得る．本節では，新谷の結果 [6] について述べる.

部分集合 $\mathfrak{C}\subset\mathbf{R}$ に対し，$\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in K^*$ が存在して,

$$\mathfrak{C}=\left\{\sum_{i=1}^m x_i\alpha_i\in\mathbf{R}\;\middle|\; x_i\in\mathbb{R}_{>0}\right\}$$

となるとき，$\mathfrak{C}$ を **$\mathbb{Q}$-有理単体錐**といい，$\mathbb{Q}$-有理単体錐の有限個の非交和を **$\mathbb{Q}$-有理多面錐**という.

新谷は，$\mathfrak{o}_+^*$ の $\mathbf{R}_+$ への群作用による基本領域が，ある $\mathbb{Q}$-有理多面錐で取れることを示した.

定理 3.4 (新谷の単数定理) $E \subset \mathfrak{o}_+^*$ を指数有限なる部分群とするとき，
$\mathbb{Q}$-有理多面錐 $\mathfrak{C} \subset \mathbf{R}_+$ が存在して，$\mathfrak{C}$ は $E \backslash \mathbf{R}_+$ の基本領域となる.

$m \le n$，$\mathbb{R}_{>0}$-成分の (n,m)-行列 $A=(a_{ij})$，$\mathbb{R}_{>0}$-成分の m 項列 vector $\mathbf{x}=(x_j)$ に対し，

$$\zeta(A,\mathbf{x},s)=\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{N}^m}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x_j+z_j)\right)^{-s}\qquad(s\in\mathbb{C})$$

を新谷 **zeta** という.

$m \le n$，$\mathbb{R}_{>0}$-成分の (n,m)-行列 $A=(a_{ij})$，$\mathbb{R}_{>0}$-成分の m 項列 vector $\mathbf{x}=(x_j)$ に対し，

$$\begin{aligned}B_g(A,\mathbf{x}) =&(g!)^n\left\{\sum_{\mathbf{q}}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{B_{q_j}(x_j)}{q_j!}\right)C_g(A,\mathbf{q})\right.\\&\left.+\frac{1}{n}\sum_{\emptyset\ne S\subset\{1,\dots,m\}}\sum_{\mathbf{q}}\left(\prod_{j\in S}\frac{B_{q_j}(x_j)}{q_j!}\right)\sum_{k=1}^{n}C_g(S,A,\mathbf{q})^{(k)}\right\}\end{aligned}$$

を新谷の一般化 **Bernoulli** 多項式という. ただし, $\mathbf{q}=(q_j)\in\mathbb{N}_{>0}^m$ は $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}q_j=n(g-1)+m$ なるもの全体を走り，$C_g(A,\mathbf{q})$ は $t_1,\dots,t_n$ を変数とする多項式 $\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}t_i\right)^{q_j-1}$

における $(t_1\ldots t_n)^{g-1}$ の係数であり，

$$C_g(S,A,\mathbf{q})^{(k)} = \frac{1}{\{(g-1)(n-1)\}!}\left\{\frac{\partial^{(n-1)(g-1)}}{(\partial t_1\ldots\partial t_{k-1}\partial t_{k+1}\ldots\partial t_n)^{g-1}}\left(\left(\frac{\prod_{j\in S}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}t_i\right)^{q_j-1}}{\prod_{j\notin S}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}t_i\right)}\right)\Bigg|_{t_k=1}\right)\right\}(0)$$

であり，$B_{q_j}(x_j)$ は通常の Bernoulli 多項式である．

新谷は，新谷 zeta の負の整数点での値が新谷の一般化 Bernoulli 多項式で表せることを示した．

定理 3.5 (新谷 zeta の負の整数点での値) $m\le n$，$\mathbb{R}_{>0}$-成分の (n,m)-行列 A，$\mathbb{R}_{>0}$-成分の m 項列 vector $\mathbf{x}=(x_j)$，$g\in\mathbb{N}_{>0}$ に対し，

$$\zeta(A,\mathbf{x},1-g) = (-1)^m\frac{B_g(A,\mathbf{x})}{g^n}$$

である．

4 一般化 ideal 類と一般化部分 Dedekind zeta の導入

Euclidean minima に対して，zeta 的手法を用いることを素朴に考えると，以下の級数

$$\tilde{\zeta}(\alpha,\mathfrak{a},s) = (\mathfrak{N}\mathfrak{a})^s\sum_{[\delta]\in\mathfrak{o}^*\backslash(\mathfrak{o}^*\alpha+\mathfrak{a})}\frac{1}{|N([\delta])|^s}$$

を考えるのが自然に思われる．ここで，$\mathfrak{o}^*\backslash(\mathfrak{o}^*\alpha+\mathfrak{a})$ とは，集合 $\mathfrak{o}^*\alpha+\mathfrak{a}=\{\varepsilon\alpha+a\in K\mid\varepsilon\in\mathfrak{o}^*,\ a\in\mathfrak{a}\}$ への $\mathfrak{o}^*$ の乗法的作用による軌道分解である．これについて，正の無限大での指数的な発散速度 $\lim_{s\to+\infty}\sqrt[s]{\tilde{\zeta}(\alpha,\mathfrak{a},s)}$ が $\dfrac{1}{M_{\mathfrak{a}}(\alpha)}$ となっていて，$\tilde{\zeta}(\alpha,\mathfrak{a},s)$ が正の無限大において発散するか $0,1$ に収束するかのいずれかに対応して，$M_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ の 1 との大

小関係が分かる．本節ではこれらのことを適切に整備する．まず，ideal(類) の一般化を定義する．

定義 4.1　K の ideal $\mathfrak{a}$ と非空部分集合 $\emptyset \neq S \subset K$ に対し，任意の $\alpha \in S$, $\varepsilon \in \mathfrak{o}^*$, $a \in \mathfrak{a}$ に対し，$\varepsilon\alpha + a \in S$ であるとき，S を ($\mathfrak{a}$ を法とする) **加法-乗法的不変集合 (additive-multiplicative invariant set)** といい，以下 **AMIS** と略記する．

K の AMIS S に対し，S が K の AMIS 全体の包含関係に関する順序集合において極小であるとき，S を**加法-乗法的極小集合 (additive-multiplicative minimal set)** といい，以下 **AMMS** と略記する．K の AMMS S と $\alpha \in S$ に対し，S の (包含関係の意味で) 最大の法 $\mathfrak{a}$ が一意的に存在して，$S = \mathfrak{o}^*\alpha + \mathfrak{a}$ と書けることが分かる．$\mathfrak{a}$ を S の導手といい，$\mathfrak{a}_S$ と書くことにする．また，S の生成する K の ideal (S) を $\mathfrak{b}_S$ と書くことにする．明らかに，K の ideal は AMMS であり，AMMS を ideal の一般化と見做す．

K の AMIS 全体の集合 $\mathfrak{S}$ に対し，各 $S, S' \in \mathfrak{S}$ に対し，$\alpha \in K^*$ が存在して，$S' = \alpha S$ となるとき，S, S' は**単項同値**であるといい，$\mathfrak{S}$ の単項同値類 $[S]$ を**加法-乗法的極小類 (additive-multiplicative minimal class)** といい，**AMMC** と略記する．明らかに，K の ideal 類は AMMC であり，AMMC を ideal 類の一般化と見做す．

K の AMMC $C = [S]$ に対し，

$$M(C) = \inf_{0 \neq \delta \in S} \frac{|N(\delta)|}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}_S}$$

を C の **Euclidean minima** という．S は $\mathfrak{o}^*\alpha + \mathfrak{a}_S$ と書けて，任意の $\gamma \in K^*$ に対し，

$$M(C) = M_{\gamma\mathfrak{a}_S}(\gamma\alpha)$$

だから，$M(C)$ は $S \in C$ の取り方に依らず，AMMC の Euclidean minima は数の ideal における Euclidean minima と本質的に同じである．S が ideal である場合は $0 \in S$ となってしまうため，$0 \neq \delta \in S$ という非零条件を入れていることに留意せよ．

次に，AMMC に対する部分 Dedekind zeta を定義する．

定義 4.2　K の AMMC $C = [S]$ に対し，形式的 Dirichlet 級数

$$\zeta(C, s) = (\mathfrak{N}\mathfrak{a}_S)^s \sum_{0 \neq [\delta] \in \mathfrak{o}^* \backslash S} \frac{1}{|N([\delta])|^s}$$

を C の**一般化部分 Dedekind zeta(generalized partial Dedekind zeta)** という．

5　主結果

5.1　解析接続と関数等式

本節では，講演にて述べた主結果について記述する．

まず, 一般化部分 Dedekind zeta は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束して, 部分 Dedekind zeta と Hurwitz zeta(の二つの和) を含む zeta の class である．

命題 5.1　C を K の AMMC とするとき，
(i)$\zeta(C, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において広義一様収束する．
(ii)

$$\lim_{s \to +\infty} \sqrt[s]{\zeta(C, s)} = M(C)^{-1}$$

である．
(iii)$C \in Cl$ ならば，$\zeta(C, s)$ は ideal 類 C^{-1} に対する部分 Dedekind zeta である．
(iv)$K = \mathbb{Q}$ かつ $C = [\pm q + \mathbb{Z}]$　$(q \in (0,1) \cap \mathbb{Q})$ であるとき，$q \neq \dfrac{1}{2}$ ならば $\zeta(C, s)$ は $q, -q$ に対する Hurwitz zeta の和であり，$q = \dfrac{1}{2}$ ならば $\zeta(C, s)$ は $\dfrac{1}{2}$ に対する Hurwitz zeta である．

$\zeta(C, s)$ を部分 Dedekind zeta の一般化としたが，別の視点からは部分 Dedekind zeta を幾つかに分割した" 破片" とも解釈できる．

命題 5.2　$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ なる K の ideal，$\mathfrak{a}, S_1, \ldots, S_m$ を $\mathfrak{a}$ を導手として $\mathfrak{b}$ に含まれる AMMS 全体とするとき，

$$\sum_{i=1}^{m} \zeta([S_i], s) = \left(\mathfrak{N}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)\right)^s \zeta([\mathfrak{b}], s) - \zeta([\mathfrak{a}], s)$$

である．

Hecke L-関数の関数等式を得る Hecke の手法 [3] を用いることで, 一般化部分 Dedekind zeta の解析接続と関数等式が得られる．その過程において，以下に定義する指数和が発生する．

定義 5.3　K の AMMS S，$\beta \in \mathfrak{a}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ に対し，

$$\tau(S,\beta) = \sum_{\overline{\delta} \in S/\mathfrak{a}_S} e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}(\overline{\delta}\beta)}$$

とする．ただし，$S/\mathfrak{a}_S$ とは S への $\mathfrak{a}_S$ の加法的作用による軌道分解であり，S の離散性から明らかに有限集合である．各 $\overline{\delta} \in S/\mathfrak{a}_S$ に対し，$e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}(\overline{\delta}\beta)}$ が well-defined であることに留意せよ．

この指数和は，β に対して単数の乗法的作用と $\mathfrak{b}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ の加法的作用を施しても不変である．

命題 5.4　S を K の AMMS，$T \subset \mathfrak{a}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ を $\mathfrak{b}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ を導手とする K の AMMS，$\beta \in T$ とするとき，$\tau(S,\beta)$ は $\beta \in T$ の取り方に依らない．この $\tau(S,\beta)$ を $\tau(S,T)$ と書くことにする．

指数和 $\tau(S,T)$ を用いて，一般化部分 Dedekind zeta の解析接続と関数等式が表される．以下，K の AMMS S に対し，$\mathfrak{T}_S$ を $\mathfrak{a}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ に含まれて $\mathfrak{b}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ を導手とする AMMS 全体の集合としておく．

定義 5.5　K の AMMC $C = [S]$ に対し，

$$Z(C,s) = \pi^{-\frac{ns}{2}}|D|^{\frac{s}{2}}\left(\mathfrak{N}\left(\frac{\mathfrak{b}_S}{\mathfrak{a}_S}\right)\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma_K\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(C,s)$$

を C に対する**完全 zeta** とする．ただし，$\Gamma_K(s)$ は高次元 Gamma 関数

$$\Gamma_K(s) = \Gamma(s)^{r_1}\left(2^{1-2s}\Gamma(2s)\right)^{r_2}$$

である．

定理 5.6　(完全 zeta の解析接続と関数等式) $C = [S]$ を K の AMMC とするとき，
(i)$C \in Cl$ ならば，$Z(C,s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型関数で，$s = 0, 1$ においてのみ一位の極を持ち，留数はそれぞれ $-\dfrac{2^{r_1}R}{w}, \sqrt{\mathfrak{N}\left(\dfrac{\mathfrak{b}_S}{\mathfrak{a}_S}\right)}\dfrac{2^{r_1}R}{w}$ である．
(ii)$C \notin Cl$ ならば，$Z(C,s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型関数で，$s = 1$ においてのみ一位の極を持ち，留数は $\sqrt{\mathfrak{N}\left(\dfrac{\mathfrak{b}_S}{\mathfrak{a}_S}\right)}\dfrac{2^{r_1}R}{w}\#(S/\mathfrak{a}_S)$ である．
(iii) 関数等式

$$Z(C,s) = \sqrt{\mathfrak{N}\left(\frac{\mathfrak{b}_S}{\mathfrak{a}_S}\right)}\sum_{T \in \mathfrak{T}_S}\tau(S,T)Z([T],1-s)$$

が成り立つ．

系 5.7 (一般化部分 Dedekind zeta の解析接続と関数等式) $C=[S]$ を K の AMMC とするとき，
$\zeta(C,s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型関数であり，$s=1$ においてのみ一位の極を持ち，留数は $\dfrac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R}{w\sqrt{|D|}}\#(S/\mathfrak{a}_S)$ であり，関数等式

$$\sum_{T\in\mathfrak{T}_S}\tau(S,T)\zeta([T],1-s)=2^n|D|^{s-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-ns}\cos^{r_1+r_2}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\sin^{r_2}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)^n\zeta(C,s)$$

が成り立つ．

系 5.8 $C=[S]$ を K の AMMC とするとき，
(i)

$$\zeta(C,0)=\begin{cases}-\dfrac{1}{w} & (K\text{ は有理数体または虚二次体, }C\in Cl)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

である．
(ii)$g\in\mathbb{N}_{>0}$ に対し，$\zeta(C,-2g)=0$ である．
(iii)$g\in\mathbb{N}_{>0}$ に対し，K が総実であるならば $\zeta(C,1-2g)\neq 0$ であり，K が総実でないならば $\zeta(C,1-2g)=0$ である．

5.2 数の Euclidean minima の多重 Bernoulli 多項式による表示

本節では，K は総実代数体とし，以下のように追加の記号を設定する:
S を K の AMMS，$\mathfrak{C}\subset\mathbf{R}$ を $\mathbf{R}_+/\mathfrak{o}_+^*$ の基本領域なる $\mathbb{Q}$-有理多面錐，$\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_r\subset\mathbf{R}$ を $\mathfrak{C}=\coprod_{i=1}^{r}\mathfrak{C}_i$ なる $\mathbb{Q}$-有理単体錐，$\{\beta_{j1},\ldots,\beta_{jm_j}\}\subset\mathfrak{a}_S\cap\mathbf{R}_+$ を $\mathfrak{C}_j$ の基底，A_j を (n,m_j)-行列 $(\Phi(\beta_{j1})\ \ldots\ \Phi(\beta_{jm_j}))$，$\mathfrak{C}_j^{(1)}=\left\{\sum_{k=1}^{m_j}t_k\beta_{jk}\ \middle|\ t_1,\ldots,t_{m_j}\in(0,1]\right\}\subset\mathbf{R}_+\cap\mathfrak{C}_j$，$R_{ij}\subset((0,1]\cap\mathbb{Q})^{m_j}$ を $A_jR_{ij}=(\alpha_iS)\cap\mathfrak{C}_j^{(1)}$ なる有限集合，$\{\tilde{\beta}_{j1},\ldots,\tilde{\beta}_{jm_j}\}\subset(\mathfrak{b}_S^{-1}\mathfrak{d}^{-1})\cap\mathbf{R}_+$ を $\mathfrak{C}_j$ の基底，$\tilde{A}_j$ を (n,m_j)-行列 $(\Phi(\tilde{\beta}_{j1})\ \ldots\ \Phi(\tilde{\beta}_{jm_j}))$，$\tilde{\mathfrak{C}}_j^{(1)}=\left\{\sum_{k=1}^{m_j}t_k\tilde{\beta}_{jk}\ \middle|\ t_1,\ldots,t_{m_j}\in(0,1]\right\}\subset\mathbf{R}_+\cap\mathfrak{C}_j$ とし，各 $T\in\mathfrak{T}_S$ に対し，$\tilde{R}_{ij}^T\subset((0,1]\cap\mathbb{Q})^{m_j}$ を $\tilde{A}_j\tilde{R}_{ij}^T=(\alpha_iT)\cap\tilde{\mathfrak{C}}_j^{(1)}$ なる有限集合とする．

新谷 zeta と一般化部分 Dedekind zeta では，走る剰余類が異なるが，以下の補題により対応付けることができる．

補題 5.9

$$\theta : \coprod_{i=0}^{t-1} \mathfrak{o}_+^* \backslash (\alpha_i^{-1}((\alpha_i S) \cap \mathbf{R}_+)) \cong \mathfrak{o}^* \backslash S;\ \mathfrak{o}_+^* \delta \mapsto \mathfrak{o}^* \delta$$

は一対一対応である．

これにより，総実代数体における一般化部分 Dedekind zeta を新谷 zeta の和で表示することができる．

命題 5.10

$$\zeta([S], s) = (\mathfrak{N}\mathfrak{a})^s \sum_{i=0}^{t-1} |N(\alpha_i)|^s \sum_{j=1}^{r} \sum_{\mathbf{x} \in R_{ij}} \zeta(A_j, \mathbf{x}, s)$$

である．

このことから，一般化部分 Dedekind zeta の負の整数点での値が Bernoulli 多項式で表示され，一般化部分 Dedekind zeta に関する Siegel-Klingen の定理が成り立つ．

定理 5.11　(一般化部分 Dedekind zeta の負の整数点と正の偶数点での値) 任意の $g \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し，

$$\zeta([S], 1-g) = \frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{a}_S)^{1-g}}{g^n} \sum_{i=0}^{t-1} |N(\alpha_i)|^{1-g} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{m_j} \sum_{\mathbf{x} \in R_{ij}} B_g(A_j, \mathbf{x})$$

$$\zeta([S], 2g) = \frac{(-1)^g \pi^n \{(2\pi)^n (\mathfrak{N}\mathfrak{a}_S)\}^{2g-1}}{\sqrt{|D|}\{(2g)!\}^n} \sum_{i=0}^{t-1} |N(\alpha_i)|^{1-2g} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{m_j} \sum_{T \in \mathfrak{T}_S} \mathrm{Re}(\tau(S,T)) \sum_{\mathbf{x} \in \tilde{R}_{ij}^T} B_{2g}(\tilde{A}_j, \mathbf{x})$$

である．

系 5.12　(一般化部分 Dedekind zeta に関する Siegel-Klingen の定理) 任意の $g \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し，$\zeta([S], 1-g) \in \mathbb{Q}$ である．

系 5.13 (AMMC の Euclidean minima の Bernoulli 多項式の極限による表示)

$$\frac{1}{M([S])} = (\mathfrak{N}\mathfrak{a}_S)(\pi e)^n \lim_{g\to\infty} g^{-n}\left\{(-1)^g \sum_{i=0}^{t-1} |N(\alpha_i)|^{1-2g} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{m_j} \sum_{T\in\mathfrak{T}_S} \mathrm{Re}(\tau(S,T)) \sum_{\mathbf{x}\in\tilde{R}_{ij}^T} B_{2g}(\tilde{A}_j, \mathbf{x})\right\}^{\frac{1}{2g}}$$

である.

参考文献

[1] H Davenport. Indefinite binary quadratic forms. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 1, No. 1, pp. 54–62, 1950.

[2] Eva Bayer Fluckiger. Upper bounds for euclidean minima of algebraic number fields. *Journal of Number Theory*, Vol. 121, No. 2, pp. 305–323, 2006.

[3] Erich Hecke. Eine neue art von zetafunktionen und ihre beziehungen zur verteilung der primzahlen. *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 1, No. 4, pp. 357–376, 1918.

[4] Hendrik W Lenstra Jr. Euclidean ideal classes. *Astérisque*, Vol. 61, pp. 121–131, 1979.

[5] Curtis McMullen. Minkowski's conjecture, well-rounded lattices and topological dimension. *Journal of the American Mathematical Society*, Vol. 18, No. 3, pp. 711–734, 2005.

[6] Takuro Shintani. On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA*, Vol. 23, pp. 393–417, 1976.

[7] Stefan G Treatman. Euclidean systems. *Journal of Number Theory*, Vol. 73, No. 2, pp. 277–291, 1998.