吸引点に関する収束定理

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J25, 47J20, 47H09.
Keywords and phrases. 吸引点, 不動点, 擬非拡大拡張, generalized hybrid 写像.

1 はじめに

文献 [19] で導入された吸引点は不動点に似た概念で, 不動点の一般化の一つと見なせる. 例えば, ある写像の吸引点についての結果を使って, その写像の不動点に関する結果を導くことができる[*1]. 本稿では, ある条件のもとで, その逆が可能なこと, つまり, 不動点に関する結果を使って, 吸引点の結果が導けることを説明する.

本稿の構成は次の通りである. 次の第 2 節では, 本稿で必要となる概念や記号の定義および後で使う定理を紹介する. 第 3 節では, Hilbert 空間の部分集合で定義された吸引点をもつ写像 T に注目し, ある条件のもとで, T の擬非拡大拡張 $\tilde{T}\colon H \to H$ が存在して, T の吸引点の集合と $\tilde{T}$ の不動点の集合が一致することを述べる (補助定理 3.1 および補助定理 3.3). これにより, T の吸引点の問題を $\tilde{T}$ の不動点の問題として扱うことが可能になる. 最後の第 4 節では, 第 3 節の結果と既知の不動点に関する収束定理を使って, 吸引点に関する収束定理を証明し, それらの系として, 吸引点をもつ generalized hybrid 写像 [14] の収束定理などを導く.

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, C を空でない H の部分集合, I を H 上の恒等写像とする. また, H の点列 $\{x_n\}$ が, $z \in H$ に強収束するとき $x_n \to z$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup z$ と表す.

写像 $T\colon C \to H$ を所与とする. T の不動点を $\mathrm{F}(T)$ で表す. つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in$

[*1] 例えば, 文献 [19] では, generalized hybrid 写像 [14] の吸引点の存在および吸引点への平均収束定理を示し, さらにそれらを使って, その写像の不動点定理および不動点への平均収束定理が導かれることを示した. この他に吸引点を扱った先行研究としては, [1, 12, 20, 21] などがある.

$C\colon Tz = z\}$ である．点 $z \in H$ が T の**漸近的不動点** (*asymptotic fixed point*) であるとは，C の点列 $\{x_n\}$ が存在して，$x_n - Tx_n \to 0$ および $x_n \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [17]．写像 T の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(T)$ で表す．点 $z \in H$ が T の**吸引点** (*attractive point*) であるとは，すべてに $x \in C$ に対して

$$\|Tx - z\| \le \|x - z\| \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう [19]．T の吸引点の集合を $\mathrm{A}(T)$ で表す．つまり，

$$\mathrm{A}(T) = \bigcap_{x \in C} \{z \in H\colon\ \|Tx - z\| \le \|x - z\|\} \tag{2.2}$$

である．

註 1. 定義より，以下が成り立つことがわかる．

(1) $\mathrm{F}(T) \subset \hat{\mathrm{F}}(T)$;
(2) $C \cap \mathrm{A}(T) \subset \mathrm{F}(T)$;
(3) $\mathrm{A}(T)$ は閉凸である．

実際，(1) については，$z \in \mathrm{F}(T)$ をとり，C の点列 $\{x_n\}$ を $x_n \equiv z$ で定義すると，$x_n - Tx_n \to 0$，$x_n \rightharpoonup z$ だから，$z \in \hat{\mathrm{F}}(T)$．(2) については，$z \in C \cap \mathrm{A}(T)$ のとき，(2.1) より，$\|Tz - z\| \le \|z - z\| = 0$．よって，$z = Tz$．(3) については，(2.2) の $\{z \in H\colon\ \|Tx - z\| \le \|x - z\|\}$ の部分が，H の閉半空間であることよりすぐにわかる．

H の空でない部分集合 F および写像 $T\colon C \to H$ を所与とする．このとき，T が F に関して**擬非拡大** (*quasinonexpansive*) であるとは，任意の $x \in C$ および $z \in F$ に対して (2.1) が成り立つときをいう [7]．写像 T が擬非拡大であるとは，$\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であり，任意の $x \in C$ および $z \in \mathrm{F}(T)$ に対して (2.1) が成り立つときをいう．C が閉凸で，T が擬非拡大ならば，$\mathrm{F}(T)$ は閉凸であることが知られている [10, Theorem 1]．写像 T が *generalized hybrid* であるとは，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\alpha \|Tx - Ty\|^2 + (1-\alpha)\|x - Ty\|^2 \le \beta \|Tx - y\|^2 + (1-\beta)\|x - y\|^2 \tag{2.3}$$

が成り立つときをいう [14]．

註 2. 定義より，以下が成り立つことがわかる．

(1) T が吸引点をもつならば，T は $\mathrm{A}(T)$ に関して擬非拡大である;
(2) T が generalized hybrid ならば，$\mathrm{F}(T) \subset \mathrm{A}(T)$.

(1) は, 定義より明らかである. (2) については, (2.3) で $x \in \mathrm{F}(T)$ とすると,

$$\begin{aligned}\|x - Ty\|^2 = \alpha \|x - Ty\|^2 + (1-\alpha) \|x - Ty\|^2 \\ \leq \beta \|x - y\|^2 + (1-\beta) \|x - y\|^2 = \|x - y\|^2\end{aligned}$$

だから, $x \in \mathrm{A}(T)$ である.

註 3. 上記の generalized hybrid 写像は, 文献 [3] で導入された λ-hybrid 写像の一般化である. λ-hybrid 写像については, 文献 [5,6] も参照されたい.

後の第 4 節で次の補助定理を使う.

補助定理 2.1 ([21, Lemma 3.1]). C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $T\colon C \to H$ を generalized hybrid 写像, $\{x_n\}$ を C の点列とする. このとき, $x_n - Tx_n \to 0$ および $x_n \rightharpoonup z$ ならば, $z \in \mathrm{A}(T)$. つまり, $\hat{\mathrm{F}}(T) \subset \mathrm{A}(T)$.

D を H の空でない閉凸部分集合とする. このとき, H から D の上への**距離射影** (*metric projection*) を P_D で表す. つまり, $x \in H$ のとき, $P_D(x) \in D$ であり,

$$\|x - P_D(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in D\}$$

である. 距離射影について詳しくは, [18] を参照されたい.

次の定理は, [4, Theorem 5.5] から直接得られる. 関連する結果として, [16, Theorem 3.4] も参照されたい.

定理 2.2. $T\colon H \to H$ を擬非拡大写像, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\beta_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $u, x_1 \in H$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)[\beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n]$$

で定義する. さらに, $\hat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_n \alpha_n = \infty$ および $\liminf_n \beta_n(1-\beta_n) > 0$ を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ に強収束する.

定理 2.2 の仮定 $\liminf_n \beta_n(1-\beta_n) > 0$ は, $\liminf_n \beta_n > 0$ かつ $\limsup_n \beta_n < 1$ と同値である.

次の定理は, [15, Theorem 3.2] から直接得られる. 関連する結果として, 文献 [8] も参照されたい.

定理 2.3. $T\colon H \to H$ を擬非拡大写像, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 \in H$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n$$

で定義する. さらに, $\hat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$ および $\liminf_n \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は T のある不動点に弱収束する.

3 擬非拡大拡張

本節では, ある条件のもとで, 吸引点をもつ写像 T の擬非拡大拡張 $\tilde{T}$ が存在して, $\mathrm{A}(T) = \mathrm{F}(\tilde{T})$ となることを示す (補助定理 3.3). これにより, T の吸引点問題を, $\tilde{T}$ の不動点問題へ書き換えることが可能となる.

まず, 次の補助定理から始める.

補助定理 3.1 ([2, Lemma 3.1])**.** C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $T\colon C \to H$ を吸引点をもつ写像とし, 写像 $\tilde{T}\colon H \to H$ を次式で定義する.

$$\tilde{T}x = \begin{cases} Tx, & x \in C; \\ P_{\mathrm{A}(T)}(x), & x \notin C. \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき, $\tilde{T}$ は T の拡張で, $\mathrm{A}(T)$ に関して擬非拡大であり, さらに, $\mathrm{A}(T) \subset \mathrm{F}(\tilde{T})$ である.

註 4. 補助定理 3.1 の仮定のもとで, $\mathrm{A}(\tilde{T}) = \mathrm{A}(T)$ である. 実際, $z \in \mathrm{A}(\tilde{T})$, $x \in C$ とすると

$$\|Tx - z\| = \left\|\tilde{T}x - z\right\| \le \|x - z\|.$$

よって, $z \in \mathrm{A}(T)$. ゆえに, $\mathrm{A}(\tilde{T}) \subset \mathrm{A}(T)$. 一方, 補助定理 3.1 より, $\tilde{T}$ は $\mathrm{A}(T)$ に関して擬非拡大だから, $z \in \mathrm{A}(T)$, $x \in H$ とすると, $\left\|\tilde{T}x - z\right\| \le \|x - z\|$. よって, $z \in \mathrm{A}(\tilde{T})$. ゆえに, $\mathrm{A}(\tilde{T}) \supset \mathrm{A}(T)$.

補助定理 3.1 の仮定のもとで, 一般に $\mathrm{A}(T) \neq \mathrm{F}(\tilde{T})$ であることが, 次の例からわかる.

例 3.2 ([2, Example 3.3])**.** $H = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし, $T\colon C \to C$ を次式で定義する.

$$Tx = \begin{cases} 1, & x = 1; \\ -x, & x \in C \setminus \{1\}. \end{cases}$$

このとき, $\mathrm{F}(T)=\{1\}$, $\mathrm{A}(T)=\{0\}$. さらに, $\tilde{T}\colon H\to H$ を (3.1) で定義する. つまり,

$$\tilde{T}x=\begin{cases}Tx, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

このとき, $\mathrm{F}(\tilde{T})=\{0,1\}$. ゆえに, $\mathrm{A}(T)\neq\mathrm{F}(\tilde{T})$ である.

補助定理 3.3 ([2, Lemma 3.4])**.** C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $T\colon C\to H$ を吸引点をもつ写像とし, 写像 $\tilde{T}\colon H\to H$ を (3.1) で定義する. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $\mathrm{F}(T)\subset\mathrm{A}(T)$ ならば, $\mathrm{A}(T)=\mathrm{F}(\tilde{T})$ であり, $\tilde{T}$ は擬非拡大である;
(2) $\hat{\mathrm{F}}(T)\subset\mathrm{A}(T)$ ならば, $\hat{\mathrm{F}}(\tilde{T})=\mathrm{F}(\tilde{T})$.

4　吸引点に関する収束定理

ここでは, 前節の結果 (補助定理 3.1 および補助定理 3.3) と擬非拡大写像の不動点に関する収束定理 (定理 2.2 および定理 2.3) を使って, 吸引点に関する収束定理を証明する. そして, それらの系として, 吸引点をもつ generalized hybrid 写像の収束定理などを導く.

定理 4.1. [2, Theorem 4.1] C を Hilbert 空間 H の空でない凸集合, $T\colon C\to C$ を吸引点をもつ写像, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\beta_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $u, x_1\in C$ および任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)[\beta_n x_n+(1-\beta_n)Tx_n] \tag{4.1}$$

で定義する. さらに, $\sum_n\alpha_n=\infty$, $\lim_n\alpha_n=0$ および $\liminf_n\beta_n(1-\beta_n)>0$ を仮定する. このとき, $\hat{\mathrm{F}}(T)\subset\mathrm{A}(T)$ ならば, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{A}(T)}(u)$ に強収束する.

証明. $\tilde{T}\colon H\to H$ を (3.1) で定義する. 仮定 $\hat{\mathrm{F}}(T)\subset\mathrm{A}(T)$ より, $\mathrm{F}(T)\subset\hat{\mathrm{F}}(T)\subset\mathrm{A}(T)$ である. よって, 補助定理 3.3 より, $\hat{\mathrm{F}}(\tilde{T})=\mathrm{F}(\tilde{T})=\mathrm{A}(T)$ であり, $\tilde{T}$ は擬非拡大であることがわかる. さらに, C が凸で, 補助定理 3.1 より $\tilde{T}$ は T の拡張であるから, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)[\beta_n x_n+(1-\beta_n)\tilde{T}x_n]$$

である. したがって, 定理 2.2 より, $x_n\to P_{\mathrm{F}(\tilde{T})}(u)=P_{\mathrm{A}(T)}(u)$ が得られる. □

定理 4.1 と補助定理 2.1 より, 次の系が得られる. この系は, [21, Theorem 3.2] とほぼ同じである.

系 4.2 ([2, Corollary 4.2])**.** H, C, $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を定理 4.1 と同じとし, $T\colon C \to C$ を吸引点をもつ generalized hybrid 写像, C の点列 $\{x_n\}$ を $u, x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.1) で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{A}(T)}(u)$ に強収束する.

証明. 補助定理 2.1 より, $\hat{\mathrm{F}}(T) \subset \mathrm{A}(T)$ だから, 定理 4.1 より結論が得られる. □

註 5. 系 4.2 の $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を $(0,1)$ の数列に限定したものが, [21, Theorem 3.2] である.

補助定理 3.1, 補助定理 3.3 および定理 2.3 を使うと, 定理 4.1 の証明と同様にして, 次の弱収束定理が得られる.

定理 4.3 ([2, Theorem 4.4])**.** C を Hilbert 空間 H の空でない凸集合, $T\colon C \to C$ を吸引点をもつ写像, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \tag{4.2}$$

で定義し, $\liminf_n \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ とする. このとき, $\hat{\mathrm{F}}(T) \subset \mathrm{A}(T)$ ならば, $\{x_n\}$ は T のある吸引点に弱収束する.

本節の最後に, 定理 4.3 の系を一つ紹介する. この系は [12, Theorem 14] とほぼ同じである. その前に一つ準備が必要である.

C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合とする. 写像 $T\colon C \to H$ が *widely more generalized hybrid* であるとは, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha\|Tx-Ty\|^2 + \beta\|x-Ty\|^2 + \gamma\|Tx-y\|^2 + \delta\|x-y\|^2 \\ + \epsilon\|x-Tx\|^2 + \zeta\|y-Ty\|^2 + \eta\|x-Tx-(y-Ty)\|^2 \le 0\end{aligned} \tag{4.3}$$

が成り立つときをいう [13]. このとき, T は $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta)$-widely more generalized hybrid 写像と呼ばれる.

系 4.4 ([2, Corollary 4.5])**.** H, C および $\{\alpha_n\}$ を定理 4.3 と同じとし, 写像 $T\colon C \to C$ を吸引点をもつ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta)$-widely more generalized hybrid 写像, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.2) で定義する. さらに

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta \ge 0,\ \alpha+\gamma > 0 \text{ および } \epsilon+\eta \ge 0 \tag{4.4}$$

を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は T のある吸引点に弱収束する.

証明. [12, Lemma 11] より, $\hat{\mathrm{F}}(T) \subset \mathrm{A}(T)$ であるから, 定理 4.3 より結論が得られる. □

註 6. 系 4.4 の仮定 (4.4) を, (4.4) または

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \geq 0,\ \alpha + \beta > 0 \text{ および } \zeta + \eta \geq 0 \tag{4.5}$$

に置き換えたものが, [12, Theorem 14] である. 写像 T が, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta)$-widely more generalized hybrid のとき, 条件 (4.4) と (4.5) は同値であることが確認できる.

参考文献

[1] S. Akashi and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for nonexpansive mappings on star-shaped sets in Hilbert spaces*, Appl. Math. Comput. **219** (2012), 2035–2040.

[2] K. Aoyama, *A quasinonexpansive extension of a mapping with an attractive point in a Hilbert space* (2022), available at `arXiv:2202.01419[math.FA]`.

[3] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[4] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[5] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ-hybrid mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim. **2** (2011), 87–95.

[6] ______, *Uniform mean convergence theorems for hybrid mappings in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2012), 2012:193, 13.

[7] ______, *Strongly quasinonexpansive mappings, III*, Linear Nonlinear Anal. **6** (2020), 1–12.

[8] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[9] K. Aoyama and M. Toyoda, *Mean convergence theorems with respect to attractive points in a Hilbert space* (2022), available at `arXiv:2205.11045[math.FA]`.

[10] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[11] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[12] S.-M. Guu and W. Takahashi, *Existence and approximation of attractive points of the widely more generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2013), Art. ID 904164, 10.

[13] T. Kawasaki and W. Takahashi, *Existence and mean approximation of fixed points of generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), 71–87.

[14] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511.

[15] S.-y. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[16] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *Strong convergence theorems by Halpern-Mann iterations for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 6577–6586.

[17] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 313–318.

[18] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[19] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.

[20] W. Takahashi, N.-C. Wong, and J.-C. Yao, *Attractive point and weak convergence theorems for new generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **13** (2012), 745–757.

[21] ———, *Attractive points and Halpern-type strong convergence theorems in Hilbert spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **17** (2015), 301–311.