

## 作用素分割法とその応用 \*

秋田県立大学・システム科学技術学部 知能メカトロニクス学科 †松下 慎也

Shin-ya Matsushita

Department of Intelligent Mechatronics  
Faculty of Systems Science and Technology  
Akita Prefectural University

### 1 はじめに

次の問題を考える:

$$\text{find } u \in \mathcal{H} \text{ s.t. } 0 \in (A + B + C)(u), \quad (1.1)$$

ただし,  $\mathcal{H}$  を実ヒルベルト空間,  $A, B: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  を極大単調作用素,  $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  を  $\beta$ -cocoercive とする (2 章参照)。問題 (1.1) を単調作用素  $A, B, C$  の零点問題と呼ぶ。 $A$  と  $B$  を下半連続な真凸関数の劣微分,  $C$  を微分可能凸関数の勾配に置き換えることで, 問題 (1.1) は三つの凸関数の和を最小にする解を見つける問題となる。このような関数の和を最小化する問題は, 工学分野で現れる複数の制約条件を持つ問題 (例えば, 正則化項を含む凸最小化問題 [15], 画像復元問題 [4], スパース最適制御問題 [13]) を含む数理モデルとなる。即ち, 問題 (1.1) の解を求める解法を開発できれば, これまで個々で検討されていた問題を見通し良く解決できるようになる。

本論文では, 零点問題 (1.1) の解を近似する解法である Three-operator splitting algorithm [7] を考える。Three-operator splitting algorithm は以下のように定義される:

**アルゴリズム 1.1.** (*Three-operator splitting algorithm*)  $k \geq 1, z_1 \in \mathcal{H}, \lambda, \gamma \in (0, \infty)$  とする。以下の点列を考える。

$$\begin{cases} u_k = J_{\gamma A}(z_k) \\ v_k = J_{\gamma B}(2u_k - z_k - \gamma C(u_k)) \\ z_{k+1} = z_k + \lambda(v_k - u_k) \end{cases}$$

ただし,  $I$  は  $\mathcal{H}$  の恒等写像,  $J_A$  は  $A$  に対するリゾルベントと呼ばれ,  $J_A(x) = \{u \in \mathcal{H} : x \in$

---

\* This work was supported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology [19K03639] and the Research Institute for Mathematical Sciences

† 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4  
<https://researchmap.jp/read0132329>

$(I+A)(u)$ と定義される。 $A$ が極大単調作用素の時、 $J_A$ は一価写像、つまり $J_A(x) = (I+A)^{-1}(x)$ となる ([2, 16] 参照)。アルゴリズム 1.1 のように、作用素ごとのリゾルベントや作用素自体を用いて和の零点を見つける解法を作用素分割法と呼ぶ。本論文を通して、 $A$ と $B$ のリゾルベント $J_A$ と $J_B$ は容易に計算できると仮定する。

$\lambda$ と $\gamma$ が適切な条件を満たす時、点列 $\{u_k\}$ と $\{v_k\}$ は問題 (1.1) の解に弱収束することが知られている ([7, Theorem 2.1] 参照)。最近、Bot等 [3] による不動点アルゴリズムの加速化法のアイディアを利用したアルゴリズム 1.1 の改良について研究が行われている [5]。また、アルゴリズム 1.1 の係数 $\gamma$ の条件を緩和する研究などが行われている [1]。

本論文では、先行研究 [5, 1] に動機付けられてアルゴリズム 1.1 の改良を検討する。提案手法によって生成された近似列が、問題 (1.1) の解に弱収束することを示す。また、関連する応用についても言及する。

## 2 準備

本論文を通して $\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と $\|\cdot\|$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ の内積とノルムとする。作用素 $A: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ のグラフを $\text{Gr}(A) = \{(x, x^*) | x^* \in A(x)\}$ と定義する。 $A: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ が

(1) 単調とは、

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad ((x, x^*), (y, y^*) \in \text{Gr}(A)); \quad (2.1)$$

(2) 極大単調とは、 $A$ が単調で $A$ のグラフを含む任意の単調作用素 $D: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ に対して $A = D$

を満たす時をいう。 $0 \in A(u)$ を満たす $u$ を $A$ の零点という。また、 $A$ の零点全体の集合を $A^{-1}(0)$ と表す。一価写像 $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が

(1) 非拡大とは、任意の $x, y$ に対して

$$\|C(x) - C(y)\| \leq \|x - y\|;$$

(2)  $\alpha$ -averaged とは、 $\alpha \in (0, 1)$ で、ある非拡大写像 $R: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が存在して $C = (1-\alpha)I + \alpha R$ ;

(3)  $\beta$ -cocoercive とは、 $\beta > 0$ で、任意の $x, y$ に対して

$$\langle x - y, C(x) - C(y) \rangle \geq \beta \|C(x) - C(y)\|^2;$$

となる時をいう。 $C$ が $\alpha$ -averagedの時、以下の不等式が成り立つ：

$$\|C(x) - C(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|(I-C)x - (I-C)y\|^2 \quad (\forall x, y \in \mathcal{H}) \quad (2.2)$$

([2, Proposition 4.35] 参照)。点 $v \in \mathcal{H}$ に対して、 $C(v) = v$ が成り立つとき、 $v$ を写像 $C$ の不動点という。 $C$ の不動点全体の集合を $\text{Fix}(C)$ と表す。

$f: \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする。 $f$ に対する劣微分を以下のように定義する。

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathcal{H} : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \quad (\forall y \in \mathcal{H})\}.$$

このとき,  $\partial f: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  は極大単調になることが知られている ([16, 2] 参照)。また, 劣微分  $\partial f$  に対するリゾルベント  $J_{\partial f}$  には次の関係が成り立つ。

$$J_{\partial f}(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{2} \|y - x\|^2 + f(y) \right\}.$$

このとき, リゾルベントを近接写像といい,  $\operatorname{prox}_f$  とあらわす。つまり,  $\operatorname{prox}_f = J_{\partial f}$ 。  $C$  を  $\mathcal{H}$  の空でない閉凸集合とする。集合  $C$  の指示関数  $i_C$  を

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & (x \in C) \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義する。

主定理を得るため, 次の結果は重要である。

**命題 2.1.** ([11])  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  を  $\alpha$ -averaged で  $\operatorname{Fix}(T) \neq \emptyset$ ,  $\delta \in [0, \infty)$ ,  $z_0 = z_1 \in \mathcal{H}$  とする。点列  $\{z_k\}$  を以下のように生成する。

$$\begin{cases} w_k = \begin{cases} z_k & (k: \text{偶数}) \\ z_k + \delta(z_k - z_{k-1}) & (k: \text{奇数}) \end{cases} \\ z_{k+1} = T(w_k) \end{cases} \quad (2.3)$$

このとき, 次が成り立つ。

(1)  $u \in \operatorname{Fix}(T)$  とする。この時以下の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|z_{2(k+1)} - u\|^2 &\leq \|z_{2k} - u\|^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|z_{2k+1} - T(z_{2k+1})\|^2 \\ &\quad - (1+\delta) \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} - \delta \right) \|z_{2k} - T(z_{2k})\|^2; \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2) 点列  $\{z_k\}$  は  $\operatorname{Fix}(T)$  のある点に弱収束する。

**命題 2.2.** ([6])  $A, B: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  を極大単調作用素,  $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  を  $\beta$ -cocoercive とする。写像  $T_{A,B,C}$  を次のように定義する。

$$T_{A,B,C} := I - \lambda J_{\gamma A} + \lambda J_{\gamma B} \circ (2J_{\gamma A} - I - \gamma C \circ J_{\gamma A}). \quad (2.5)$$

ここで,  $\gamma \in (0, 4\beta)$  and  $\lambda \in (0, 2 - \gamma/(2\beta))$  とすると,  $T_{A,B,C}$  は  $(2\lambda\beta)/(4\beta - \gamma)$ -averaged となり,  $J_{\gamma A}(\operatorname{Fix}(T_{A,B,C})) = (A + B + C)^{-1}(0)$  が成り立つ。

**命題 2.3.** ([1])  $A, B: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  を極大単調作用素,  $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  とする。  $x, \hat{x} \in \mathcal{H}$ ,  $\gamma > 0$  とし,  $u := J_{\gamma A}(x)$  (resp.  $\hat{u} := J_{\gamma A}(\hat{x})$ ) と  $v := J_{\gamma B}(2u - x - \gamma C(u))$  (resp.  $\hat{v} := J_{\gamma B}(2\hat{u} - \hat{x} - \gamma C(\hat{u}))$ ) とおく。この時, 以下の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \langle x - \hat{x}, (u - v) - (\hat{u} - \hat{v}) \rangle - \|(u - v) - (\hat{u} - \hat{v})\|^2 - \gamma \langle C(u) - C(\hat{u}), v - \hat{v} \rangle. \quad (2.6)$$

**補助定理 2.1.** ([2, Corollary 26.8])  $I := \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $i \in I$ ,  $A_i: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  を極大単調作用素とし,  $\{(x_{i,k}, u_{i,k})\} \subset \text{Gr}(A_i)$  とする。  $\sum_{i=1}^m u_{i,k} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) が成り立ち, 任意の  $i \in I$  に対して  $x_{i,k} \rightarrow x_i$ ,  $u_{i,k} \rightarrow u_i$ ,  $mx_{i,k} - \sum_{j \in I} x_{j,k} \rightarrow 0$  が成り立つとする。このとき, ある  $d \in (\sum_{i=1}^m A_i)^{-1}(0)$  が存在して,  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = d$ ,  $\sum_{i=1}^m u_i = 0$ , 任意の  $i \in I$  に対して  $(d, u_i) \in \text{Gr}(A_i)$  が成り立つ。

### 3 主結果

以下のアルゴリズム 1.1 の改良を紹介する。

**アルゴリズム 3.1.** (提案手法)  $k \geq 1$ ,  $z_0 = z_1 \in \mathcal{H}$ ,  $\delta \in [0, \infty]$ ,  $\lambda, \gamma \in (0, \infty)$  とする。

$$\begin{cases} w_k = \begin{cases} z_k & (k: \text{偶数}) \\ z_k + \delta(z_k - z_{k-1}) & (k: \text{奇数}) \end{cases} \\ u_k = J_{\gamma A}(w_k) \\ v_k = J_{\gamma B}(2u_k - w_k - \gamma C(u_k)) \\ z_{k+1} = w_k + \lambda(v_k - u_k) \end{cases}$$

**注意 3.1.**

- $\delta = 0$  の時, アルゴリズム 3.1 はアルゴリズム 1.1 となる。
- 任意の  $k$  に対して  $w_k = z_k + \delta(z_k - z_{k-1})$  の時は [5] で研究されている。

アルゴリズム 3.1 によって生成された点列の収束性について, 次の結果が成り立つ。

**定理 3.1.**  $A, B: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  を極大単調作用素,  $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  を  $\beta$ -cocoercive とし, (1.1) の解が存在すると仮定する。アルゴリズム 3.1 で生成される点列を考える。ただし,  $\gamma, \lambda, \delta$  は以下の条件を満たすとする。

- (A1)  $\gamma \in (0, 4\beta)$ ;  
 (A2)  $\lambda \in (0, 2 - \gamma/(2\beta))$ ;  
 (A3)  $\delta \in [0, (2 - \gamma/(2\beta) - \lambda)/\lambda]$ .

このとき, 次が成り立つ。

- (1)  $\{z_k\}$  は  $\text{Fix}(T_{A,B,C})$  のある点に弱収束する。
- (2)  $\{u_k\}$  と  $\{v_k\}$  は問題 (1.1) の解に弱収束する。

**証明.** (2.5) と  $\{z_k\}$  の定義から  $z_{k+1} = T_{A,B,C}(z_k)$  と表現できる。  $u \in \text{Fix}(T_{A,B,C})$  とする。(2.4)

より,

$$\begin{aligned} \|z_{2k+2} - u\|^2 &\leq \|z_{2k} - u\|^2 - \frac{1+\delta}{\lambda} \left(2 - \frac{\gamma}{2\beta} - \lambda - \lambda\delta\right) \|w_{2k} - T_{A,B,C}(w_{2k})\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \left(2 - \frac{\gamma}{2\beta} - \lambda\right) \|w_{2k+1} - T_{A,B,C}(w_{2k+1})\|^2 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

が成り立つ。(3.1) と (A1)~(A3) より, 以下の性質が得られる。

- $\{z_{2k}\}$  は有界;
- $\{\|z_{2k} - u\|\}$  の極限が存在する;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - T_{A,B,C}(w_k)\| = 0$ .

$z_{2k} = w_{2k}$  と上記の性質より,  $\{z_{2k}\}$  と  $\{w_{2k}\}$  は  $\text{Fix}(T_{A,B,C})$  のある点に弱収束する ([16, 2] 参照)。また,

$$\|w_{2k} - z_{2k+1}\| = \|w_{2k} - T_{A,B,C}(w_{2k})\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

より,  $\{z_k\}$  はある  $\bar{z} \in \text{Fix}(T_{A,B,C})$  に弱収束する。

次に, 補助定理 2.1 より

$$J_{\gamma A}(\bar{z}) \in (A + B + C)^{-1}(0). \quad (3.2)$$

一方,  $J_{\gamma A}$  の非拡大性から  $\{u_k\}$  は有界となる。また,

$$\lambda(v_k - u_k) = z_{k+1} - w_k = T_{A,B,C}(w_k) - w_k$$

より,  $\{v_k\}$  も有界となり  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v_k\| = 0$  が成り立つ。従って,  $\{u_k\}$  の弱収束性を示せば  $\{v_k\}$  の弱収束性も示せる。

命題 2.3 において,  $x := \bar{z}$ ,  $\hat{x} := w_k$  とおくと,

$$0 \leq \langle \bar{z} - w_k, v_k - u_k \rangle - \|u_k - v_k\|^2 - \gamma \langle C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k), J_{\gamma A}(\bar{z}) - v_k \rangle. \quad (3.3)$$

一方,  $C$  は  $\beta$ -cocoercive であるので,

$$\begin{aligned} &-\gamma \langle C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k), J_{\gamma A}(\bar{z}) - v_k \rangle \\ &= -\gamma \langle C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k), J_{\gamma A}(\bar{z}) - u_k \rangle + \gamma \langle C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k), v_k - u_k \rangle \\ &\leq -\gamma\beta \|C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k)\|^2 + \gamma \langle C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k), v_k - u_k \rangle. \end{aligned}$$

これと (3.3) より

$$\begin{aligned} \gamma\beta \|C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k)\|^2 &\leq \langle \bar{z} - w_k, v_k - u_k \rangle - \|u_k - v_k\|^2 \\ &\quad + \gamma \langle C(J_{\gamma A}(\bar{z})) - C(u_k), v_k - u_k \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

が成り立つ。これより

$$C(u_k) \rightarrow C(J_{\gamma A}(\bar{z})) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.5)$$

$\{u_k\}$  の有界性より, ある  $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$  と  $\bar{u} \in \mathcal{H}$  が存在して  $u_{k_j} \rightharpoonup \bar{u}$  ( $j \rightarrow \infty$ ) となる。また,  $v_{k_j} \rightharpoonup \bar{u}$  ( $j \rightarrow \infty$ ) も成り立つ。

$$\begin{aligned} u_{k_j} \rightharpoonup \bar{u}, \quad v_{k_j} \rightharpoonup \bar{u}, \quad C(u_{k_j}) \rightarrow C(J_{\gamma A}(\bar{z})), \quad \frac{1}{\gamma}(w_{k_j} - u_{k_j}) \rightarrow \frac{1}{\gamma}(\bar{z} - \bar{u}), \\ \text{かつ} \quad \frac{1}{\gamma}(2u_{k_j} - w_{k_j} - \gamma C(u_{k_j}) - v_{k_j}) \rightarrow \frac{1}{\gamma}(\bar{u} - \bar{z} - \gamma C(J_{\gamma A}(\bar{z}))) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで補助定理 2.1 より

$$\bar{u} = J_{\gamma A}(\bar{z}) \in (A + B + C)^{-1}(0). \quad (3.6)$$

$\bar{u}$  は  $\{u_k\}$  の任意の弱収束先だったので,  $u_k \rightharpoonup J_{\gamma A}(\bar{z}) \in (A + B + C)^{-1}(0)$  となる。□

## 4 応用

3章で得られた結果の応用を与える。

### 4.1 正則化項を含む凸最小化問題

次の問題を考える:

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (4.1)$$

ここで,  $\|\cdot\|_2$  は  $l^2$  ノルム,  $\|\cdot\|_1$  は  $l^1$  ノルム,  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ ,  $\lambda > 0$  とする。問題 (4.1) は  $l^1$  正則化付き最小二乗法 (または LASSO (Least absolute shrinkage and selection operator)) と呼ばれる。目的関数の第 1 項は観測値と予測値の差の 2 乗を表し, 第 2 項は正則化項と呼ばれ, スパースな (0 を多く含む) 解を見つけない場合に利用される。

ここで,  $A := \partial(\lambda \|\cdot\|_1)$ ,  $C := \Phi^T \Phi(\cdot) - \mathbf{b}$  とおけば  $A$  は極大単調,  $C$  は  $1/\|\Phi^T \Phi\|$ -cocoercive となる。また,  $A$  と  $C$  の和の零点は問題 (4.1) の解となる。この場合, アルゴリズム 3.1 は文献 [8] で研究された交互近接勾配法となる。交互近接勾配法に関する数値実験の結果は [8, 14] にまとめられている。

### 4.2 最適制御問題

次に, 以下の線形時不変システムを考える。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

ここで,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  とし,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  とする。 $\mathbf{x}(t)$  は時刻  $t$  での状態,  $u(t)$  は制御, (4.2) は状態方程式と呼ばれる。状態方程式 (4.2) は工学, 物理学や生物学, 経済学や社会学における時間を変数を持つ制御対象を表現できる。

例 4.1. ロケットの状態方程式 [13, Example 7.2] 宇宙空間にあるロケットを状態方程式 (4.2) で表現すると以下ようになる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u(t) \quad (4.3)$$

ただし,

$x_1(t)$ : 時刻  $t$  における位置

$x_2(t)$ : 時刻  $t$  における速度

$u(t)$ : ロケットに働く力

$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} = (\xi_1 \ \xi_2)^T$ : 初期状態.

状態方程式 (4.2) が可制御であるとは, 任意の初期状態  $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$  に対して, ある終端時刻  $T > 0$  と制御  $u(t) (0 \leq t \leq T)$  が存在して, この  $u(t)$  によって状態  $\mathbf{x}(t)$  が  $t = T$  で  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  となるときをいう。状態方程式 (4.3) は可制御となることが知られている [13, Example 7.5]。

例 4.1 の状態方程式 (4.3) において, 終端時刻を  $T = 5$ , 初期状態を  $\mathbf{x}(0) = (1, 1)^T$  とし, その時の制御と対応する状態の軌跡  $\{(x_1(t) \ x_2(t))^T : 0 \leq t \leq 5\}$  の具体例を図 1 に示す。

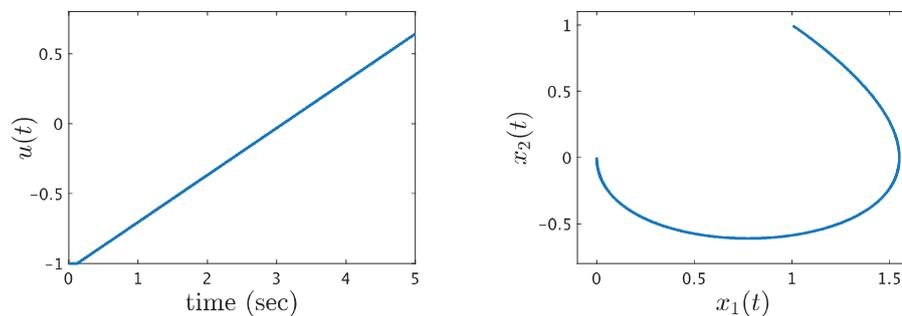


図 1 左図は制御  $u(t)$  のグラフ。右図は, 左図の制御  $u(t)$  に対応する状態  $\{\mathbf{x}(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^T \ (0 \leq t \leq 5)\}$  の軌跡。初期状態  $\mathbf{x}(0) = (1 \ 1)^T$  から  $\mathbf{x}(5) = (0 \ 0)^T$  に遷移しているのがわかる。

注意 4.1. 図 1 で制御と状態の一例を紹介した。図 1 の制御  $u(t)$  は, 時刻  $t$  が  $0 \sim 5$  と変化する間, 関数値が  $0$  となるのは一瞬で, 殆どの時刻で関数値が非零となる。即ち, 図 1 の制御はロケットに対して殆どの時刻で力を与え続けていることに相当する。

### 4.3 $L^1$ 最適制御

次の問題を考える

**問題 4.1.** ( $L^1$  最適制御問題) 状態方程式 (4.2) は可制御とする。 $\boldsymbol{\xi}$  を初期状態とし、終端時刻  $T > 0$  が与えられているとする。この時、 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$ ,  $\boldsymbol{x}(T) = \mathbf{0}$  を達成する制御  $u(t)$  で  $|u(t)| \leq 1$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) を満たし、かつ  $\|\boldsymbol{u}\|_{L^1} = \int_0^T |u(t)| dt$  を最小にするものを見つけよ。

問題 (4.1) を  $L^1$  最適制御問題といい、その解を  $L^1$  最適制御という。 $L^1$  最適制御問題は最小燃料問題とも呼ばれ、古くから研究されている (例えば [9])。

一方、 $L^1$  最適制御問題は時間軸を離散化することにより、次の有限次元の最適化問題に帰着できることが知られている ([13, Chapter 9] 参照)。

**問題 4.2.** ( $l^1$  最適制御問題)

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \{ \|\boldsymbol{u}\|_{l^1} + i_{C_1}(\boldsymbol{u}) + i_{C_2}(\Phi \boldsymbol{u}) \}, \quad (4.4)$$

ここで、 $n$  は時間軸の分割数、 $h = T/n$ ,  $C_1 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{v}\|_{l^\infty} \leq 1\}$ ,  $C_2 = \{\boldsymbol{\zeta}\}$ ,  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  は  $l^\infty$  ノルム,  $A_d = e^{Ah}$ ,  $\boldsymbol{b}_d = \int_0^h e^{A_d t} \boldsymbol{b} dt$ ,  $\Phi = (A_d^{n-1} \boldsymbol{b}_d, A_d^{n-2} \boldsymbol{b}_d, \dots, \boldsymbol{b}_d)$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = -A_d \boldsymbol{\xi}$  とする。

$l^1$  最適制御問題 (4.4) に提案したアルゴリズム 3.1 を適用して、得られた制御  $u(t)$  を図 2 の左図に示す。状態方程式 (4.2) の行列とベクトルを使用した。分割数は  $n = 1,000$  とした。

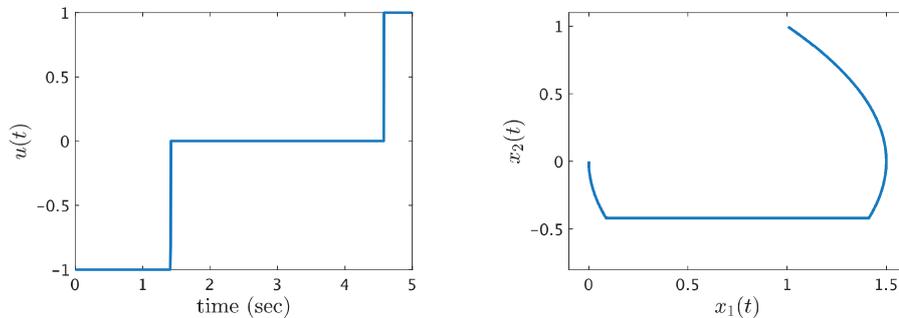


図 2 左図は提案したアルゴリズム 3.1 を適用して得られた制御  $u(t)$  のグラフ。右図は、左図の制御  $u(t)$  に対応する状態  $\{\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^T \ (0 \leq t \leq 5)\}$  の軌跡。初期状態  $\boldsymbol{x}(0) = (1 \ 1)^T$  から  $\boldsymbol{x}(5) = (0 \ 0)^T$  に遷移しているのがわかる。

**注意 4.2.** 図 1 と図 2 の制御  $u(t)$  を比較すると、図 2 の方が関数値が零の時刻が多い。即ち、図 2 の制御はその時刻ではロケットに対して力を与えておらず、その間は電力や燃料を節約できる。

**注意 4.3.** 図 2 の数値実験の詳細は [12] にまとめた。関連する作用素分割法の結果に [10] がある。

## 謝辞

発表する機会を与えていただいた大和田智義先生 (静岡大学) と松岡勝男先生 (日本大学) に深く感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] F. J. Aragón Artacho and D. Torregrosa-Belén, *A direct proof of convergence of Davis-Yin splitting algorithm allowing larger stepsizes*, Set-valued Var. Anal. **80** (2021), 549–585.
- [2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2011.
- [3] R. I. Boţ, E.R. Csetnek and C. Hendrich, *Inertial Douglas-Rachford splitting for monotone inclusion problems*, Appl. Math. Comput. **256** (2015), 472–487.
- [4] A. Chambolle and T. Pock, *A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging*. *J. Math. Imaging Vis.*, 40:120–145, 2011.
- [5] F. Cui, Y. Tang and Y. Yang, *An inertial three-operator splitting algorithm with applications to image inpainting*, Appl. Set-Valued Anal. Optim. **1** (2019), 113–134.
- [6] M. N. Dao and H. M. Phan, *An adaptive splitting algorithm for the sum of two generalized monotone operators and one cocoercive operator*, Fixed Point Theory Algorithms Sci. Eng. **16** (2021).
- [7] D. Davis and W. Yin, *A three-operator splitting scheme and its optimization applications*, Set-valued Var. Anal. **25** (2017), 829–858.
- [8] F. Iutzeler and J. M. Hendrickx, *On the proximal gradient algorithm with alternated inertia*, J. Optim. Theory Appl. **176** (2018), 688–710.
- [9] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley-Interscience, 1969.
- [10] S. Matsushita. *Alternated inertial forward-backward-forward splitting algorithm*, Numerical Algebra, Control and Optimization, doi: 10.3934/naco.2022035.
- [11] S. Matsushita, *Alternated inertial fixed point algorithms*, to appear in *Minimax Theory and its Application*.
- [12] S. Matsushita, *Convergence analysis of an alternated inertial three-operator splitting algorithm with applications to optimal control problems*, submitted.
- [13] M. Nagahara, *Sparsity Methods for Systems and Control*, now publishers, 2020.
- [14] 小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒, *交互近接勾配法とその応用*, 数理解析研究所講究録, **2214** (2021) 39-43.
- [15] N. Parikh and S. Boyd. *Proximal Algorithms*, now publishers, 2013.
- [16] 高橋涉, *非線形・凸解析学入門*, 横浜図書, 2005.