# 2 重フーリエ級数を用いた順圧モデル

野村鈴音 (京大理)　　　榎本剛 (京大防災研/JAMSTEC APL)

## 概要

異常気象は偏西風の蛇行や持続する渦のような循環異常によって引き起こされることが一般に知られている．また，その循環異常の発生発達，減衰は本質的に非線形であるためシミュレーションの際には高い精度が求められる．本研究では，高精度な微分が計算可能であるために波動の伝播特性や非線形項の取り扱いに優れた 2 次元フーリエ変換を用いたモデルを作り，循環異常のメカニズムを調べる．

## 1　はじめに

移流項をはじめとして気象力学で扱う方程式には非線形項が含まれている．スペクトル法における非線形項の計算方法には，スペクトル変換法（Orszag 1970) や相互作用係数法が知られている．本研究では，物理空間で計算を行うスペクトル変換法と高速フーリエ変換（FFT, Cooley and Tukey 1965）と組み合わせると効率的であることから，スペクトル変換法を採用している．

また，球面上の 2 次元フーリエ変換（Orszag 1974）も考案されており，周期境界の領域モデル以外にも利用可能である．実際に，領域スペクトルモデル（Tatsumi 1986; Juang and Kanamitsu 1994）や大気大循環モデル（Cheong 2006; Yoshimura et al. 2020）で利用されている．

近年では AI 予報（Pathak et al. 2022; Bonev et al. 2023）にも適用されている．以上のように，フーリエ変換は高速に計算可能であることからさらなる利用価値を検討することは重要であると考える．

## 2　非線形移流モデル

### 2.1　支配方程式

一次元非線形移流を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$u = u(x,t) \quad u(x+2n\pi) = u(x,t) \quad n : \text{integer} \tag{1}$$

近似解として最大波数 $M$ の有限フーリエ級数を用いる．

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{m=-M}^{+M} u_m(t) e^{imx} \tag{2}$$

これを用いれば (1) の左辺は，

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \sum_{m=-M}^{+M} \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} e^{imx} + \sum_{m_1=-M}^{+M} u_{m_1} e^{im_1 x} \cdot \sum_{m_2=-M}^{+M} i m_2 u_{m_2} e^{im_2 x} \tag{3}$$

となる．非線形項は (3) のように，波数空間で微分を計算したのち物理空間で計算を行う．こ

れをスペクトル変換法（Orszag 1970 ）と呼ぶ．したがって，切断スペクトル方程式は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} + F_m = 0 && -M \leq m \leq M \\
&F_m(t) = \frac{1}{3M+1}\sum_{j=1}^{3M} \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} e^{-imx} && 0 \leq m \leq M
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となる．

### 2.2　計算結果

初期値を $u(x,0) = \sin(x)$ とした場合の結果を図 1 に示す．物理空間での格子点数は 256，時間積分法は 4 次のルンゲクッタ法である．

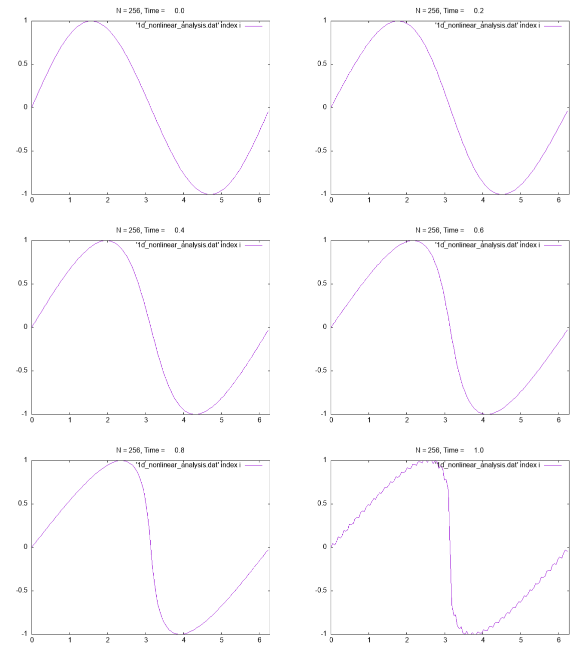


図 1:　流線関数 $\psi$ の時間発展（$t = 0.0$ から $t = 1.0$ まで 0.2 刻み）

時間と共に初期値として与えた $\sin(x)$ の波頭が立つ様子が確認できる．また，1 次元の流れを考えているため $t = 1.0$，$x = \pi$ で不連続となりこれ以降は計算できない．

## 3　KdV 方程式のソリトン解の再現

### 3.1　支配方程式

次に KdV 方程式のソリトン解の再現 (Zabusky and Kruskal 1965) を行った．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \\
&u(x,0) = \cos(x) \\
&u(x+2n\pi) = u(x,t) \quad n : \text{integer}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

第 2 節と同様に，近似解として最大波数 $M$ の有限フーリエ級数を用いると，(5) の左辺は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \delta^2\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} = \\
&\qquad \sum_{m=-M}^{+M} \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} e^{imx} \\
&\quad + \sum_{m_1=-M}^{+M} u_{m_1} e^{im_1 x} \cdot \sum_{m_2=-M}^{+M} i m_2 u_{m_2} e^{i m_2 x} \\
&-i\delta^2 \sum_{m=-M}^{+M} m^3 u_m e^{imx}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

となる．したがって，切断スペクトル方程式は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} + F_m - i m^3 \delta^2 u_m = 0 && -M \leq m \leq M \\
&F_m(t) = \frac{1}{3M+1}\sum_{j=1}^{3M} \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} e^{-imx} && 0 \leq m \leq M
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる．

### 3.2　計算結果

$\delta = 0.022$ の結果を図 2 に示す．

$t = T_B$ で $x = 1/2$ から波が立っている様子が確認できる．

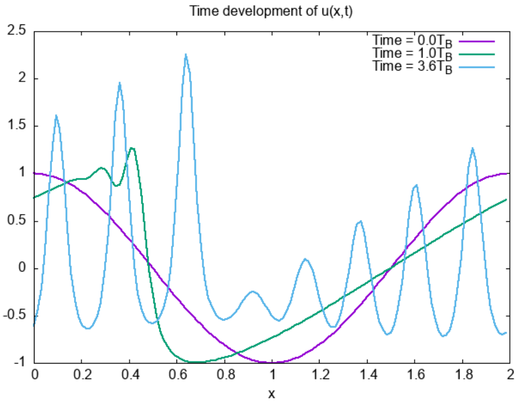


図 2: $u(x,t)$ の時間発展 (紫が初期値 $t=0$，緑が $t=T_B$，水色が $t=3.6T_B$)

## 4 等価順圧モデル

### 4.1 支配方程式

$\beta$ 効果やロスビー変形半径について無次元化した等価順圧渦度方程式を考える．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi-\gamma^2\psi)+b\frac{\partial\psi}{\partial x}+J(\psi,\nabla^2\psi)=0 \quad (8)$$

$\gamma^{-1}$，$b$ はそれぞれ無次元化したロスビー変形半径と $\beta$ である．$J(f,g)=(\partial f/\partial x\ \partial g/\partial y-\partial f/\partial y\ \partial g/\partial x)$ はヤコビアンである．予報変数は流線関数 $\psi$ であり，$x$，$y$ 方向の最大波数を $K$，$L$ の有限 2 重フーリエ級数で近似する．

$$\hat{\psi}(x,y,t)=\sum_{k=-K}^{+K}\sum_{l=-L}^{+L}\psi_{k,l}(t)e^{i(\frac{2\pi}{L_x}kx+\frac{2\pi}{L_y}ly)} \quad (9)$$

これを用いれば，ラプラシアンは次のように簡単に数値解を求めることができる．

$$\begin{aligned}\nabla^2\hat{\psi}&=-\left[4\pi^2\left(\frac{k^2}{L_x^2}+\frac{l^2}{L_y^2}\right)+\gamma^2\right]\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\hat{\psi}}{\mathrm{d}t}&=\sum_{k=-K}^{+K}\sum_{l=-L}^{+L}\frac{\mathrm{d}\psi_{k,l}}{\mathrm{d}t}e^{i(\frac{2\pi}{L_x}kx+\frac{2\pi}{L_y}ly)}\end{aligned} \quad (10)$$

ヤコビアンは，

$$\begin{aligned}J(\hat{\psi},\nabla^2\hat{\psi})&=\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\frac{\partial(\nabla^2\hat{\psi})}{\partial y}-\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\frac{\partial(\nabla^2\hat{\psi})}{\partial x}\\ \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}&=\sum_{k=-K}^{+K}\sum_{l=-L}^{+L}ik\frac{2\pi}{L_x}\psi_{k,l}e^{i(\frac{2\pi}{L_x}kx+\frac{2\pi}{L_y}ly)}\\ \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}&=\sum_{k=-K}^{+K}\sum_{l=-L}^{+L}il\frac{2\pi}{L_y}\psi_{k,l}e^{i(\frac{2\pi}{L_x}kx+\frac{2\pi}{L_y}ly)}\\ \frac{\partial(\nabla^2\hat{\psi})}{\partial x}&=\sum_{k=-K}^{+K}\sum_{l=-L}^{+L}-ik\frac{2\pi}{L_x}\\ &\qquad 4\pi^2\left(\frac{k^2}{L_x^2}+\frac{l^2}{L_y^2}\right)\psi_{k,l}e^{i(\frac{2\pi}{L_x}kx+\frac{2\pi}{L_y}ly)}\\ \frac{\partial(\nabla^2\hat{\psi})}{\partial y}&=\sum_{k=-K}^{+K}\sum_{l=-L}^{+L}-il\frac{2\pi}{L_x}\\ &\qquad 4\pi^2\left(\frac{k^2}{L_x^2}+\frac{l^2}{L_y^2}\right)\psi_{k,l}e^{i(\frac{2\pi}{L_x}kx+\frac{2\pi}{L_y}ly)}\end{aligned} \quad (11)$$

したがって，切断スペクトル方程式は，

$$\begin{aligned}&-\left[4\pi^2\left(\frac{k^2}{L_x^2}+\frac{l^2}{L_y^2}\right)+\gamma^2\right]\frac{\mathrm{d}\psi_{k,l}}{\mathrm{d}t}\\ &\qquad +ib\frac{2\pi}{L_x}k\psi_{k,l}+J_{k,l}=0\\ &\qquad -K\le k\le L,\quad -L\le l\le L\\ J_k(y_j,t)&=\frac{1}{3K}\sum_{i=0}^{3K-1}J(x_i,y_j,t)e^{-i\frac{2\pi}{L_x}kx}\\ &\qquad j=0,1,\ldots,3L-1\\ J_{k,l}(t)&=\frac{1}{3L}\sum_{i=0}^{3K-1}J(y_j,t)e^{-i\frac{2\pi}{L_y}ly}\end{aligned} \quad (12)$$

となる．

### 4.2 等価モドン解

等価順圧渦度方程式には単色ロスビー波以外に等価モドン解を厳密解を持つ．そのため，モデルの初期値にモドンを与えるテストを行う．東西速度 $c$，モドン半径 $A$，内部波数 $k$，外部波数

$q$ のモドンは次の式で表される．

$$\psi(r,\theta) = cA\sin\theta \begin{cases} \frac{q^2}{k^2}\frac{J_1(kr/A)}{J_1(k)} - \left[1+\frac{q^2}{k^2}\right]\frac{r}{A} & r<A \\ -\frac{K_1(qr/A)}{K_1(q)} & r>A \end{cases} \tag{13}$$

ここで $J_1$，$K_1$ は 1 次のベッセル関数，1 次の第 2 種変形ベッセル関数である．南北に不連続点ができるため，なめらかにする必要がある．

### 4.3　計算結果

境界条件は 2 重周期境界，時間積分法は 4 次のルンゲクッタ，非線形項の計算法はスペクトル変換法を用いた．パラメータは以下の通りである．

| | |
|---|---|
| **タイムステップ** | $\mathrm{dt} = 0.001$ |
| **積分時間** | $\mathrm{timemax} = 20$ |
| **東西格子点数** | $N = 128$ |
| **南北格子点数** | $N = 128$ |
| **東西予報領域幅** | $LX = 30.0$ |
| **南北予報領域幅** | $LY = 30.0$ |
| **無次元化した** $\beta$ | $\beta = 1.0$ |
| **無次元化したロスビー変形半径** | $\gamma = 2.0$ |
| **モドン東西速度** | $c = -1.5$ |
| **モドン半径** | $A = 2,0$ |
| **モドン内部波数** | $k = 4.13$ |
| **モドン外部波数** | $q = 2.39$ |

計算結果を図 3 に示す．時間と共に等価モドンが西進する様子が確認できる．モドンは等価順圧モデルでは不安定ではなく安定である．

## 5　まとめと今後の課題

１次元非線形移流モデル，KdV 方程式でフーリエ級数を用いたスペクトル法による計算が高精度であることを確認した．また，２次元の等価順圧モデルで等価モドンの西進を再現することができた．今後の予定としては 2 重周期境界であるモデルを球面にすることや傾圧性を加えることを考えている．

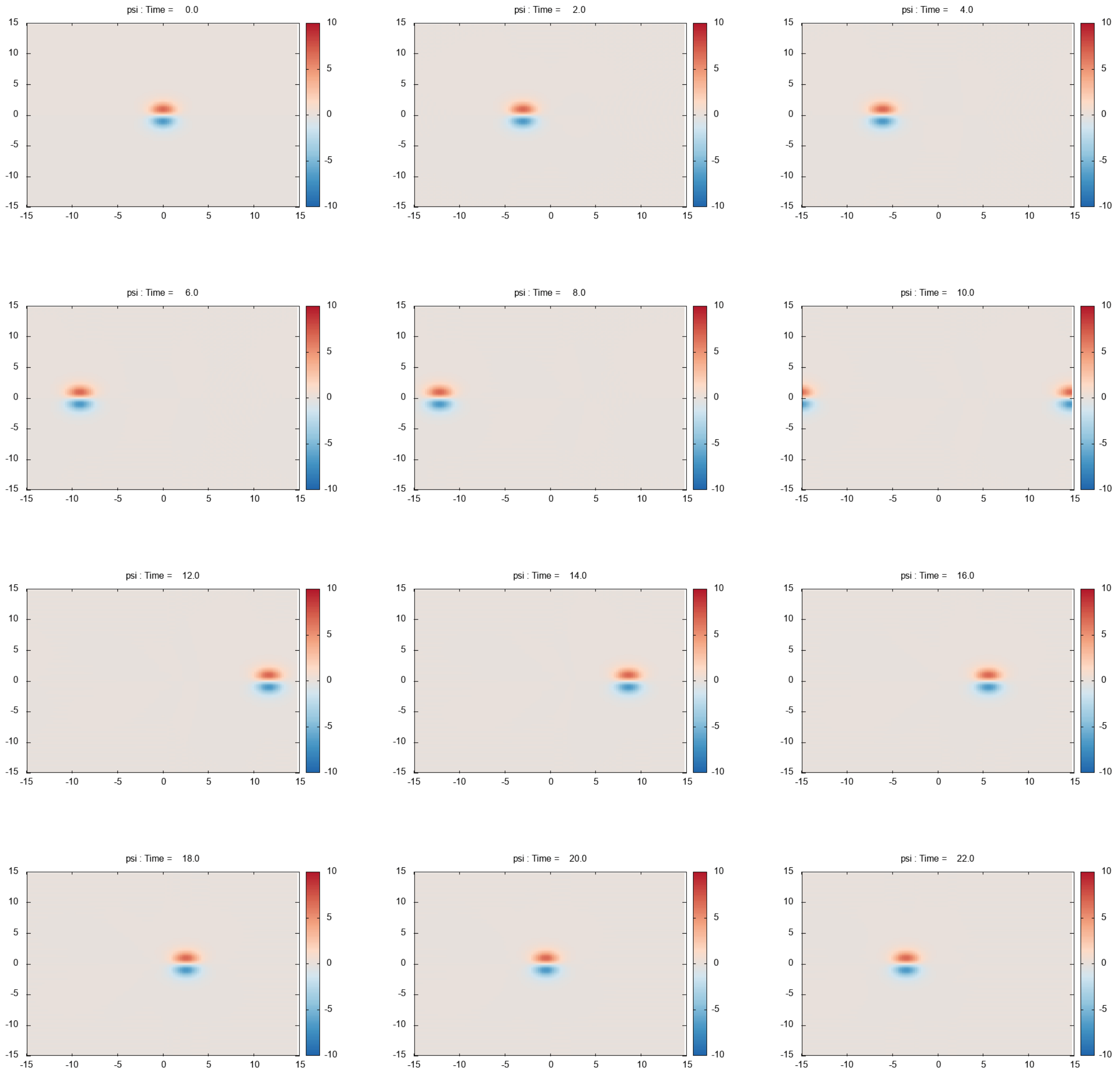


図 3: 流線関数 $\psi$ の時間発展 ($t = 0.0$ から $t = 22.0$ まで 2.0 刻み)

## 参考文献


[1] Bonev, B., T. Kurth, C. Hundt, J. Pathak, M. Baust, K. Kashinath, and A. Anandkumar, 2023: Spherical Fourier Neural Operators: Learning Stable Dynamics on the Sphere. https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.03838.

[2] Cheong, H.-B., 2006: A dynamical core with double Fourier series comparison with spherical harmonics method. Mon. Wea. Rev., 134, 1299 – 1315.

[3] Juang, H.-M. H., and M. Kanamitsu, 1994: The NMC Nested Regional Spectral Model. Mon. Wea. Rev, 122, 3 – 26.

[4] Orszag, S. A., 1970: Transform method for the calculation of vector-coupled sums: application of the spectral form of the vorticity equation. JAS, 27, 890 – 895, https://doi.org/10.1175/1520-0469(1970)027<0890:TMFTCO>2.0.CO;2.

[5] Orszag, S. A., 1974: Fourier Series on Spheres. Monthly Weather Review, 102, 56 – 75.

[6] 大関 誠, 2006: 気象研究ノート 第 211 号「スペクトルモデル入門」

[7] Pathak, J., and Coauthors, 2022: FourCastNet: A Global Data-driven High-resolution Weather Model using Adaptive Fourier Neural Operators. https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.11214.

[8] Phillips, N. A., 1951: A simple three-dimensional model for the study of larger-scale extratropical flow patterns. J. Meteor., 8, 381 – 394.

[9] Stern, M., 1975: Minimal properties of planetary eddies. J. Marine Res., 33, 1 – 13.

[10] Tatsumi, Y., 1986: A spectral limited-area model with time-dependent lateral boundary conditions and its application to a multi-level primitive equation model. J. Meteor. Soc. Japan, 64, 637 – 664.

[11] Yoshimura, H., 2022: Improved double Fourier series on a sphere and its application to a semi-implicit semi-Lagrangian shallow-water model. Geoscientific Model Development, 15, 2561 – 2597, https://doi.org/10.5194/gmd-15-2561-2022.

[12] Zabusky, N. J., and M. D. Kruskal, 1965: Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. Phys. Rev. Lett., 15, 240 – 243.