

## 2つの時間遅れをもつ線形微分方程式の漸近安定性

大阪府立大学・理学系研究科 畑 裕貴

大阪公立大学・理学研究科 松永秀章

Yuki Hata

Department of Mathematical Sciences, Osaka Prefecture University

Hideaki Matsunaga

Department of Mathematics, Osaka Metropolitan University

### 1 序文

2つの時間遅れをもつスカラー線形微分方程式

$$x'(t) = -ax(t) - bx(t - \tau) - cx(t - \sigma), \quad t \geq 0 \quad (E_0)$$

の漸近安定性を考える。ただし,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $\tau, \sigma > 0$  である。まず, 先行研究を紹介する。 $c = 0$  の場合, 方程式  $(E_0)$  は

$$x'(t) = -ax(t) - bx(t - \tau), \quad t \geq 0 \quad (E_1)$$

となる。方程式  $(E_1)$  の零解が漸近安定であるための必要十分条件は

$$a + b > 0 \quad \text{かつ} \quad a - b \geq 0$$

または

$$a + b > 0, \quad a - b < 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$$

が成り立つことである ([1, 3] を参照)。

$a = 0$  かつ  $b = c$  の場合, 方程式  $(E_0)$  は

$$x'(t) = -bx(t - \tau) - bx(t - \sigma), \quad t \geq 0 \quad (E_2)$$

となる。方程式  $(E_2)$  の零解が漸近安定であるための必要十分条件は

$$0 < b(\tau + \sigma) \cos\left(\frac{\tau - \sigma \pi}{\tau + \sigma 2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことである ([4, 6] を参照)。

$abc \neq 0$  の場合, 方程式  $(E_0)$  の漸近安定性は多くの研究者によって考察されているが, 方程式  $(E_0)$  の零解が漸近安定であるための具体的な必要十分条件は得られていない。

本研究では、方程式  $(E_0)$  で  $\sigma = 2\tau$  の場合、すなわち、2つの時間遅れをもつスカラー線形微分方程式

$$x'(t) = -ax(t) - bx(t - \tau) - cx(t - 2\tau), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

を考える。ただし、 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$  である。本研究の目的は、方程式 (1) の零解の漸近安定性における時間遅れの影響を解明することである。よく知られているように、方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は、特性方程式

$$\lambda + a + be^{-\lambda\tau} + ce^{-2\lambda\tau} = 0 \quad (2)$$

のすべての根が負の実部をもつことである。

線形微分方程式の時間遅れ  $\tau$  に依存した漸近安定性は、次の3つのタイプに分けられる：

- (i) すべての  $\tau \geq 0$  に対して漸近安定である。
- (ii)  $0 \leq \tau < \tau_0$  に対して漸近安定であり、 $\tau > \tau_0$  に対して不安定である。
- (iii)  $\tau$  を増加させると、零解が漸近安定から不安定、さらに漸近安定へと有限回変化し、最終的に不安定になる。この性質は安定スイッチ (stability switches) と呼ばれている。

(iii) の安定スイッチが生じる状況の一例を紹介しよう。時間遅れ  $\tau$  を含む特性方程式において、 $\tau = 0$  のときに特性方程式のすべての根は複素平面の左半平面に存在し、かつ  $\tau$  の閾値  $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) が存在し、

$$0 < \tau_0^{(1)} < \tau_0^{(2)} < \tau_1^{(1)} < \tau_1^{(2)} < \dots < \tau_{j_0-1}^{(1)} < \tau_{j_0-1}^{(2)} < \tau_{j_0}^{(1)} < \tau_{j_0+1}^{(1)} < \tau_{j_0}^{(2)} < \dots$$

および次の条件を満たすとする：

$\tau$  を増加させるとき、各  $\tau = \tau_j^{(1)}$  で特性方程式の1組の共役複素数根が虚軸を横切って複素平面の右半平面に移動し、各  $\tau = \tau_j^{(2)}$  で特性方程式の1組の共役複素数根が虚軸を横切って複素平面の左半平面に移動する。

このとき、 $\tau$  を0から増加させると、零解の漸近安定性は  $\tau = \tau_j^{(1)}$  で失われ、 $\tau = \tau_j^{(2)}$  で回復され、 $\tau > \tau_{j_0}^{(1)}$  に対して零解の漸近安定性は失われ続けて不安定になることがわかる。ここで、特性方程式の根は  $\tau$  に関して連続であることと、 $\tau$  の変化によって右半平面に存在する特性方程式の根の個数の和が変化するのは、根が虚軸上に現れる、または根が虚軸を横切るときに限ることを用いている ([4, 5] を参照)。

上記の例で安定スイッチが生じる時間遅れの閾値  $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$  や安定スイッチが生じる回数に関する数  $j_0$  を明示的に与えることは重要であるが、先行研究ではそれらが定義され

ていなかったり、時間遅れを 1 に変換したため、時間遅れに依存する安定スイッチ自体が見落とされていたりすることがあることを注意しておく。

2017年に Yan & Shi [7] は 2つの時間遅れをもつロジスティック方程式

$$u'(t) = u(t)(1 - \alpha u(t) - \beta u(t - \tau) - \gamma u(t - 2\tau)), \quad t \geq 0$$

を考察し、正の平衡点の局所漸近安定性および安定スイッチに関する結果を報告した。ただし、 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  である。本研究は、方程式 (1) の係数が正の数の下で考察された Yan & Shi [7] の結果を拡張し、実数係数における零解の漸近安定性に関する具体的な必要十分条件を与えた共著論文 [2] の結果を紹介する。証明は [2] の 2節を参照してほしい。

## 2 主結果

以下では、簡単のため

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{-2(a^2 - c^2) + b^2 + \sqrt{b^2(b^2 + 8c(c - a))}}{2}},$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{-2(a^2 - c^2) + b^2 - \sqrt{b^2(b^2 + 8c(c - a))}}{2}}$$

と置く。ここで、 $\omega_+, \omega_-$  は 4 次方程式

$$\omega^4 + (2(a^2 - c^2) - b^2)\omega^2 + (a + b + c)(a - b + c)(a - c)^2 = 0$$

の根である。また、非負の整数  $n$  に対して

$$\tau_n^+ = \frac{1}{\omega_+} \left( \arccos \left( \frac{b(c - a)}{\omega_+^2 + a^2 - c^2} \right) + 2n\pi \right),$$

$$\tau_n^- = \frac{1}{\omega_-} \left( \arccos \left( \frac{b(c - a)}{\omega_-^2 + a^2 - c^2} \right) + 2n\pi \right),$$

$$\sigma_n^+ = \frac{1}{\omega_+} \left( -\arccos \left( \frac{b(c - a)}{\omega_+^2 + a^2 - c^2} \right) + 2(n + 1)\pi \right),$$

$$\sigma_n^- = \frac{1}{\omega_-} \left( -\arccos \left( \frac{b(c - a)}{\omega_-^2 + a^2 - c^2} \right) + 2(n + 1)\pi \right)$$

と定める。加えて、 $\tau_{-1}^- = \sigma_{-1}^- = 0$  とする。 $\omega_+, \omega_-, \tau_n^+, \tau_n^-, \sigma_n^+, \sigma_n^-$  がそれぞれ正の値をとるための条件は [2] の 2節を参照せよ。さらに、条件  $(A_0), (A_1)$  を次のように定める：

$$2(a^2 - c^2) - b^2 < 0 \quad \text{のとき} \quad b^2 + 8c(c - a) \neq 0, \quad (A_0)$$

$$a - b + c > 0, \quad 2(a^2 - c^2) - b^2 < 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 + 8c(c - a) > 0. \quad (A_1)$$

本研究の主結果は、次の通りである。

定理 1. ([2, Theorem 1.1])  $b > 0$  かつ  $(A_0)$  を仮定する. このとき, 方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は,  $a + b + c > 0$  かつ次の条件のいずれかが成り立つことである:

$$b^2 + 8c(c - a) < 0 \quad \text{または} \quad "a - b + c \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 2(a^2 - c^2) - b^2 \geq 0", \quad (3)$$

$$a - b + c < 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \tau_0^+, \quad (4)$$

$$a - b + c = 0, \quad 2(a^2 - c^2) - b^2 < 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \tau_0^+, \quad (5)$$

$$a - b + c > 0, \quad c - a \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \tau_0^+, \quad (6)$$

$$(A_1), \quad c - a < 0 \quad \text{かつ} \quad \tau \in (0, \tau_0^+) \cup (\tau_0^-, \tau_1^+) \cup \dots \cup (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+). \quad (7)$$

ただし,  $k$  は非負の整数で

$$k = \left\lceil \frac{\omega_+ \omega_- (\tau_1^+ - \tau_0^-)}{2(\omega_+ - \omega_-)\pi} \right\rceil \quad (8)$$

で与えられる. ここで,  $\lceil \cdot \rceil$  は天井関数を表す, すなわち  $\lceil x \rceil = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid x \leq r\}$ .

定理 1 における  $a, b, c$  の条件が表す領域を  $ca$  平面に図示すると, 以下のようなになる.

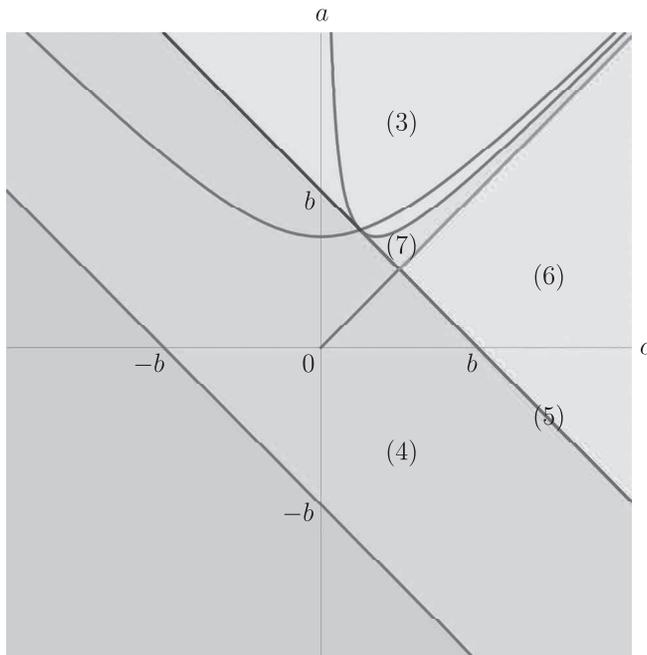


図 1: 方程式 (1) の漸近安定条件が表す  $ca$  平面における領域 ( $b > 0$ )

定理 2. ([2, Theorem 1.2])  $b < 0$  かつ  $(A_0)$  を仮定する. このとき, 方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は,  $a + b + c > 0$  かつ次の条件のいずれかが成り立つことである:

$$b^2 + 8c(c - a) < 0 \quad \text{または} \quad "a - b + c \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 2(a^2 - c^2) - b^2 \geq 0", \quad (9)$$

$$c - a = 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \sigma_0^+, \quad (10)$$

$$c - a > 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \min\{\sigma_0^+, \tau_0^-\}, \quad (11)$$

$$(A_1), \quad c - a < 0 \quad \text{かつ} \quad \tau \in (0, \sigma_0^+) \cup (\sigma_0^-, \sigma_1^+) \cup \dots \cup (\sigma_{\ell-1}^-, \sigma_\ell^+). \quad (12)$$

ただし,  $\ell$  は非負の整数で

$$\ell = \left\lceil \frac{\omega_+ \omega_- (\sigma_1^+ - \sigma_0^-)}{2(\omega_+ - \omega_-)\pi} \right\rceil \quad (13)$$

で与えられる.

定理 2 における  $a, b, c$  の条件が表す領域を  $ca$  平面に図示すると, 以下のようなになる.

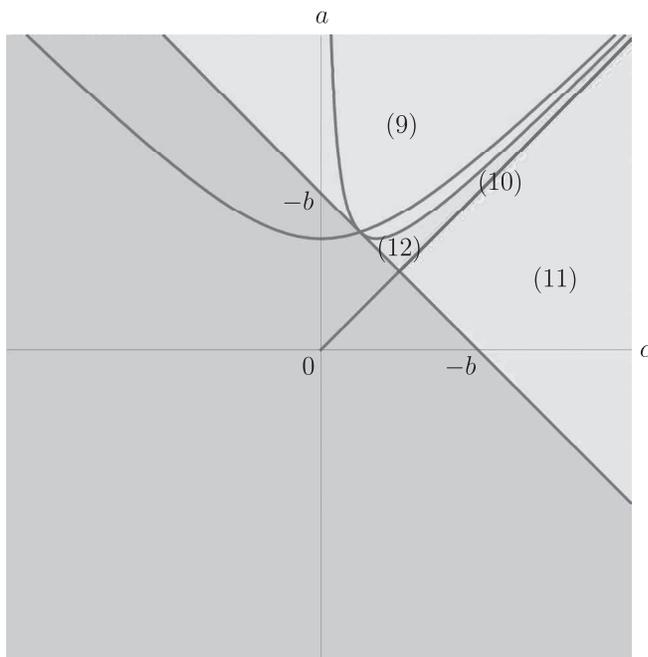


図 2: 方程式 (1) の漸近安定条件が表す  $ca$  平面における領域 ( $b < 0$ )

定理 1 と定理 2 により, 直ちに次の結果が得られる.

系 1. 方程式 (1) で安定スイッチが生じるための必要条件は

$$a + b + c > 0, \quad (A_1) \quad \text{かつ} \quad c - a < 0$$

すなわち

$$c - a < 0 \quad \text{かつ} \quad \sqrt{-8c(c-a)} < |b| < a + c \quad (14)$$

が成り立つことである.

### 3 安定スイッチの例

例 1.  $a = 1, c = 0.8$  のときを考える. 条件 (14) は

$$1.131 \approx \sqrt{1.28} < |b| < 1.8 \quad (15)$$

となるので, 条件 (15) の下で方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \sqrt{1.28} < b < 1.8 \quad \text{のとき,} \quad \tau \in (0, \tau_0^+) \cup (\tau_0^-, \tau_1^+) \cup \cdots \cup (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+), \\ -1.8 < b < -\sqrt{1.28} \quad \text{のとき,} \quad \tau \in (0, \sigma_0^+) \cup (\sigma_0^-, \sigma_1^+) \cup \cdots \cup (\sigma_{\ell-1}^-, \sigma_\ell^+) \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つことである. ただし,  $k, \ell$  はそれぞれ (8) と (13) で与えられた非負の整数である.

特に,  $b = -1.15$  のとき, (13) より  $\ell = \lceil 1.07 \dots \rceil = 2$  であるから, 条件 (16) は

$$\tau \in (0, \sigma_0^+) \cup (\sigma_0^-, \sigma_1^+) \cup (\sigma_1^-, \sigma_2^+)$$

となる.  $\sigma_n^+, \sigma_n^-$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) は, 数値的に次のように表される:

$\sigma_0^+$	$\sigma_0^-$	$\sigma_1^+$	$\sigma_1^-$	$\sigma_2^+$	$\sigma_3^+$	$\sigma_2^-$
7.73	12.04	17.43	26.74	27.13	36.82	41.44

また,  $b = -1.133$  のとき, (13) より  $\ell = \lceil 6.80 \dots \rceil = 7$  であるから, 条件 (16) は

$$\tau \in (0, \sigma_0^+) \cup (\sigma_0^-, \sigma_1^+) \cup (\sigma_1^-, \sigma_2^+) \cup (\sigma_2^-, \sigma_3^+) \cup (\sigma_3^-, \sigma_4^+) \cup (\sigma_4^-, \sigma_5^+) \cup (\sigma_5^-, \sigma_6^+) \cup (\sigma_6^-, \sigma_7^+)$$

となる.  $\sigma_n^+, \sigma_n^-$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 8$ ) は, 数値的に次のように表される:

$\sigma_0^+$	$\sigma_0^-$	$\sigma_1^+$	$\sigma_1^-$	$\sigma_2^+$	$\sigma_2^-$	$\sigma_3^+$	$\sigma_3^-$	$\sigma_4^+$
8.98	10.24	20.16	22.87	31.33	35.50	42.50	48.13	53.67
$\sigma_4^-$	$\sigma_5^+$	$\sigma_5^-$	$\sigma_6^+$	$\sigma_6^-$	$\sigma_7^+$	$\sigma_8^+$	$\sigma_7^-$	
60.76	64.85	73.39	76.02	86.02	87.19	98.36	98.66	

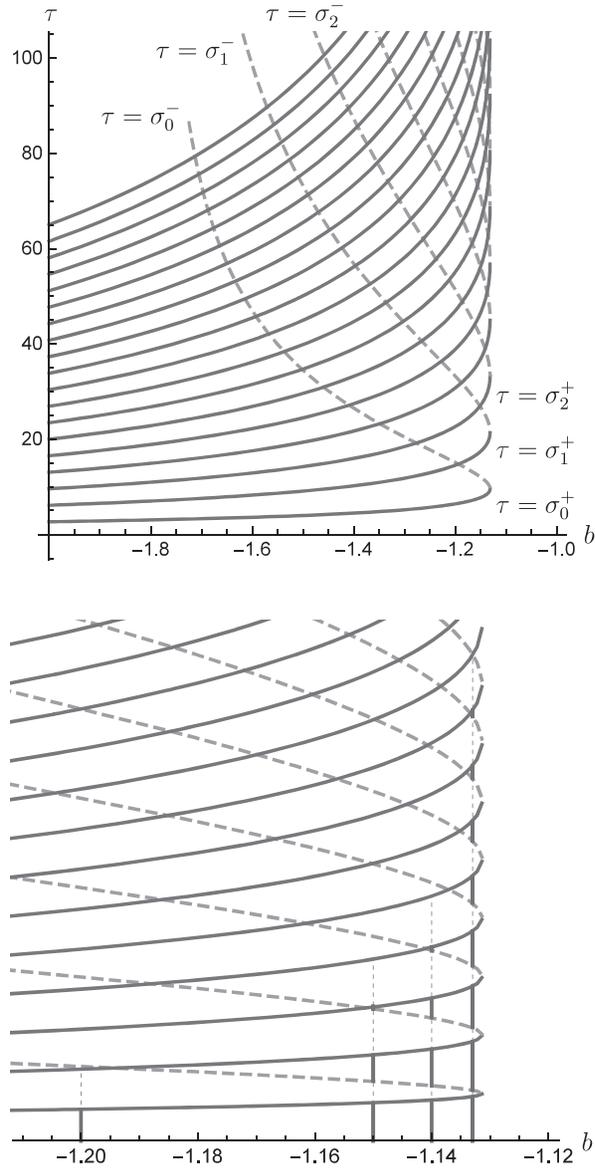


図 3:  $a = 1, c = 0.8$  のとき,  $\tau = \sigma_n^+(b)$  (実線),  $\tau = \sigma_n^-(b)$  (破線) の曲線群 ( $b < 0$ )

**注意 1.**  $b < 0$  かつ条件 (14) の下で  $\tau$  を増加させると, 各  $\tau = \sigma_n^+$  で特性方程式 (2) の根  $\pm i\omega_+$  が虚軸を横切って右半平面に移動し, 各  $\tau = \sigma_n^-$  で特性方程式 (2) の根  $\pm i\omega_-$  が虚軸を横切って左半平面に移動する ([2, Lemma 2.9] を参照).

注意 2.  $(A_0)$  が成立しない場合, すなわち

$$2(a^2 - c^2) - b^2 < 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 + 8c(c - a) = 0$$

の場合,  $\omega_+ = \omega_- > 0$ ,  $\tau_n^+ = \tau_n^-$ ,  $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) となる. この条件の下で  $\tau$  を増加させるとき, 各  $\tau = \tau_n^+$  ( $b > 0$ ) または  $\tau = \sigma_n^+$  ( $b < 0$ ) で特性方程式 (2) の根  $\pm i\omega_+$  が虚軸を横切って右半平面か左半平面かのどちらかに移動するのかが判定できていないので, 方程式 (1) の漸近安定条件は得られていない.

## 参考文献

- [1] K. L. Cooke, Z. Grossman, Discrete delay, distributed delay and stability switches, *J. Math. Anal. Appl.*, **86** (1982), 592–627.
- [2] Y. Hata, H. Matsunaga, Stability switches in a linear differential equation with two delays, *Opuscula Math.*, **42** (2022), 673–690.
- [3] N. D. Hayes, Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 226–232.
- [4] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston, 1993.
- [5] S. Ruan, J. Wei, On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, **10** (2003), 863–874.
- [6] G. Stépán, *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*, Longman Scientific & Technical, New York, 1989.
- [7] X. Yan, J. Shi, Stability switches in a logistic population model with mixed instantaneous and delayed density dependence, *J. Dynam. Differential Equations*, **29** (2017), 113–130.