

Parity of conjugate self-dual representations of inner forms of GL_n over p -adic fields

高梨 悠吾

Yugo Takanashi

東京大学大学院 数理科学研究科

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

1 導入

F を p 進体とする. このとき $GL_n(F)$ の離散系列表現の同型類の集合には 2 つのパラメータ付がある. 1 つは局所 Jacquet–Langlands 対応であり, もう 1 つは局所 Langlands 対応である. $GL_n(F)$ の内部形式 $GL_m(D)$ を固定したとき, 前者は $GL_n(F)$ の離散系列表現に内部形式の離散系列表現をある指標関係式を満たすように対応させるものである ([DKV84], [Rog83]). 一方で後者は $GL_n(F)$ の離散系列表現に離散的な Langlands パラメータと呼ばれる, Weil–Deligne 群 $W_F \times SL_2(\mathbb{C})$ のある n 次元既約表現の同型類を対応させるものである. ここで W_F は F の Weil 群である.

これら 2 つの対応は既約表現 π に対して反傾表現 $\pi^\vee$ をとる操作を保つので, 自己双対表現を自己双対表現に移す. 既約な自己双対表現 π は直交表現か斜交表現かのどちらかであり, π の偶奇性 $c(\pi)$ を直交表現のときに 1, そうでない場合に -1 として定義することができる. このように定義される Langlands パラメータの偶奇性は SO_n , SO_{n+1} および Sp_n に関するエンドスコピー持ち上げと関係している.

以上の事実から上記 2 つの対応の合成が自己双対表現の偶奇性を保つのかという問題を自然に考えることができる. Prasad と Ramakrishnan [PR12] はこの問題に関して, p 進群の表現を保型表現に大域化する方法を用いて次の結果を証明した.

Theorem 1.1 ([PR12, Theorem A]). D を F 上階数 d の中心的斜体として G を $GL_m(D)$ とする. また π を G の離散系列表現とし, σ をその Langlands パラメータとする. このとき π と σ の偶奇性は次の関係式を満たす:

$$(-1)^n c(\pi) = (-1)^m c(\sigma)^m.$$

特にこの定理から G が F 上偶数階数の斜体の単数群の場合に偶奇性の反転が起きることがわかる. 本稿では筆者が証明したこの定理の共役自己双対類似についての概説を行う.

2 [Mie20] の結果

E/F を p 進体の 2 次拡大とし, $G = \mathrm{GL}_m(D)$ を $\mathrm{GL}_n(E)$ のある内部形式とする. このとき E の離散的な Langlands パラメータの集合には W_F の W_E への共役作用により, $\mathrm{Gal}(E/F)$ の作用が自然に入る. これと同変な作用を $\mathrm{GL}_m(D)$ の離散系列表現の同型類の集合にも定めることにより, 導入で紹介した Prasad–Ramakrishnan による定理の共役自己双対を考えることができる.

$\mathrm{Gal}(E/F)$ の $\mathrm{GL}_m(D)$ への作用に関しては三枝 [Mie20] で E/F を高々順分岐な拡大とし, さらに $m = 1$ で D の Hasse 不変量 $\mathrm{inv}_E(D)$ が $1/n$ である場合にまず定義されたのでこれについて解説する. 簡単のために E/F が不分岐な 2 次拡大に場合に限って解説する. この状況で D は E の n 次不分岐拡大 E_n を含み, E_n 上で素元 Π であって Π^n が F の素元であるもので生成される. このとき D の自己同型 τ を, Π を固定し $E_n = F_{2n}$ 上で F 上の Frobenius 写像であるようなものとして定義することができる. ここで τ^2 は Π による共役作用に一致する.

$G = D^\times$ の (スムーズな) 既約表現 π について新しい既約表現 π^τ を $\pi^\tau(g) = \pi(\tau(g))$ で定義する.

Definition 2.1. G の既約表現 π が $\pi^\tau \cong \pi^\vee$ を満たすとき, π は共役自己双対であるという.

共役自己双対な既約表現 (π, V) に対しても自己双対表現の場合と同様に次の方法でその偶奇性 $c(\pi)$ を定義することができる. V 上の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ であって, $\langle \pi(\tau(g))x, \pi(g)y \rangle = \langle x, y \rangle$ を満たすものを固定する.

Lemma 2.2 ([Mie20, Lemma 2.1]). 上の状況で (π, V) に対して次を満たす実数 $c(\pi) \in \{\pm 1\}$ が存在する;

$$\langle \pi(\Pi)x, y \rangle = c(\pi)\langle y, x \rangle$$

が任意の $x, y \in V$ に対して成り立つ. この実数 $c(\pi)$ は固定した双線形形式に依らない.

Definition 2.3. この実数 $c(\pi)$ を共役自己双対表現 π の偶奇性と呼ぶ.

この設定のもとで三枝は [Mie20] で数論幾何を用いることで次の定理を示した.

Theorem 2.4. [Mie20, Theorem 2.12] π を G の超尖点表現とし, σ をその Langlands パラメータとする. このとき

$$c(\pi) = (-1)^{n-1}c(\sigma)$$

が成り立つ.

さらに共役自己双対な単純超尖点表現であって, 対応する Langlands パラメータの偶奇性が 1 あるいは -1 になるものの存在も証明されている ([Mie20, Corollary 4.6]).

3 共役自己双対表現の定義と主定理

筆者は [Tak22] において三枝の設定を一般の $\mathrm{GL}_n(E)$ の内部形式に対して一般化した。この節ではこの一般化について述べる。

3.1 共役対と偶奇性

Definition 3.1. 群 G とそれを含む群 G' からなる組 (G, G') が共役対であるとは, $[G' : G] = 2$ を満たすことをいう。

(G, G') を共役対を一つ固定する。さらに $\tau \in G' \setminus G$ を固定することで, τ の共役作用により前節と同様にして共役自己双対表現の概念を定義することができる (τ の取り方に依らない)。前節と同様に共役自己双対表現 (π, V) とその G 不変な双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を固定する。この状況で Lemma 2.2 の一般化として [Mie20] において次の補題が示されている。

Lemma 3.2 ([Mie20, Lemma 2.1]). 上の状況で (π, V) に対して次を満たす実数 $c(\pi) = c(\pi, G, G') \in \{\pm 1\}$ が存在する;

$$\langle \pi(\tau^2)x, y \rangle = c(\pi, G, G') \langle y, x \rangle$$

が任意の $x, y \in V$ に対して成り立つ。この $c(\pi, G, G')$ は τ の取り方に依らない。

Definition 3.3. $c(\pi, G, G')$ を共役自己双対表現 π の偶奇性と呼ぶ。

以上の事実により, $G = \mathrm{GL}_m(D)$ に対して共役対 (G, G') であって離散系列表現の同型類の集合に Langlands パラメータ側の W_F の作用と同変な作用を誘導するものを構成することで, Prasad–Ramakrishnan の問題の共役自己双対類似を考えることができることとなった。

3.2 共役対の構成

次は今回の設定に対応する共役対の構成について述べる。 $G = \mathrm{GL}_n(E)$ の場合は自明であるので, それ以外の場合を考える。 $A = M_n(D)$, $G = \mathrm{GL}_m(D)$ として, D の F 上の階数を d とする。このとき $n = md$ が成り立つ。さらに D の Hasse 不変量 $\mathrm{inv}_E(D)$ を s/d とあらわす。ここで $0 < s < d$ かつ $\gcd(s, d) = 1$ となるように s をとるものとする。

このとき, F 上の中心的単純環 B で階数が $2n$ かつ Hasse 不変量が $\mathrm{inv}_F(B) = s/2d$ を満たすものが存在し, 次が成り立つ。

Lemma 3.4 ([Tak22, Lemma 2.4]).

1. F 代数の準同型 $\phi : A \rightarrow B$ が存在する。この準同型は単射であり G による共役を除いて一意的である。以下 ϕ を 1 つ取って固定し, $\phi(A)$ を A と同一視する。
2. G' を $B^\times$ での $A^\times$ の正規化群 $\mathrm{Norm}_{B^\times}(A^\times)$ とする。このとき, (G, G') は共役対である。

Definition 3.5. Lemma 3.4 の (G, G') を G に付随する共役対と呼ぶことにする.

以下 p 進体上の GL_n の内部形式 G の共役自己双対表現の偶奇性は G に付随する共役対について考えるものとする.

3.3 主定理

上で構成した共役対による表現への作用が W_F の作用と同変な作用を誘導することおよび三枝の構成の一般化になっていることは直接確かめることができる. この設定のもとで主定理を述べる.

Theorem 3.6. π を共役自己双対な G の離散系列表現とし, σ をその *Langlands* パラメータとする. π の偶奇性を $c(\pi)$, σ の偶奇性を $c(\sigma)$ とあらわすとき,

$$(-1)^{n_s} c(\pi) = (-1)^{m_s} c(\sigma)^{m_s}$$

が成り立つ.

ここでは三枝の結果とは異なり全ての共役自己双対な離散系列表現で偶奇性の関係式が示せていることに注意されたい.

4 大域化による議論

この節では主定理の証明の鍵となる大域化の議論について説明する. これは簡単に説明すると次のような議論である;

1. まず p 進体上の設定 (今回の場合は E/F , (G, G') , π など) を全て数体上の設定 (L/K , (G, G') , Π など) の局所成分として実現する. このとき, 実現する局所成分の他にいくつか局所成分を選んでおきそこでは不変量がすでに計算できている設定 (今回の場合では三枝による設定) になっており, かつ他の局所成分ではある意味で ‘不分岐’ な設定になっているように数体上の設定を構成する.
2. 次に数体上の設定では考えている不変量 (今回の場合は偶奇性) が自明になることを示し, さらに局所成分がある意味で ‘不分岐’ な場合に不変量が自明になることを示しておく.
3. 最後に数体上の設定での不変量が局所成分の不変量の積に分かれることを用いることで, 計算したい局所成分の不変量をすでに不変量が計算できている局所成分の不変量の積で書くことができ, 任意の場合で不変量の計算を行うことができる.

これらの議論に対応する具体的な主張を述べる.

4.1 数体および大域的な共役対の構成

Krasner の補題を用いることで次は容易に示すことができる.

Lemma 4.1 ([Tak22, Lemma 3.1]). E/F を p 進体の 2 次拡大とする. このとき数体の 2 次拡大 L/K であり, K が総実かつ L が総虚であってある K の有限素点 v で L/K の v での完備化が E/F と同型になっているものが存在する.

以下上のような L/K および有限素点 v を固定しておく. (G, G') を次のように数体上の共役対 $(\mathbb{G}, \mathbb{G}')$ の局所成分として実現する.

Lemma 4.2 ([Tak22, Construction 2.10 - 2.12]). K の有限素点であって L 上で分解せずかつ不分岐であるもの $v_1, \dots, v_{ms}$ を固定する. ここで m および s は Subsection 3.2 で定義された正の整数である. このとき, L 上の中心的単純環 $\mathbb{D}$ および K 上の中心的単純環 $\mathbb{E}$ であって次を満たすものが存在する;

1. v において $\mathbb{D}, \mathbb{E}$ はそれぞれ Subsection 3.2 で構成された A, B と同型である.
2. 各 v_i において $\mathbb{D} \otimes_L L_{v_i}, \mathbb{E} \otimes_K K_{v_i}$ の Hasse 不変量はそれぞれ $-1/n, -1/2n$ である.
3. その他の素点で $\mathbb{D}, \mathbb{E}$ は分解している. つまりそれぞれ L_v 上および K_v 上の行列環と同型である.

このとき, 各有限素点 v_i において現れる設定は三枝の設定の反対環をとったものであることに注意されたい. 以下このような L 上の中心的単純環 $\mathbb{D}$ および K 上の中心的単純環 $\mathbb{E}$ を 1 つ取って固定する.

このとき 3.2 の場合と同様の補題によって K 代数の準同型 $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}$ を 1 つ固定して, $\mathbb{G} = \mathbb{D}^\times(\mathbb{A}_L)$ および $\mathbb{G}' = \text{Norm}_{\mathbb{E}^\times}(\mathbb{D}^\times)\mathbb{G}$ とおくと $(\mathbb{G}, \mathbb{G}')$ は共役対になることが示せる ([Tak22, Section 2]). この共役対を大域的な共役対と呼ぶこととする.

ここで L/K で分解する素点 v に対応する局所成分では $G = \text{GL}_n(K_v) \times \text{GL}_n(K_v)$ および $G' = G \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自明な共役対が現れる. ここで作用は 2 つの成分の置換により定まっている.

4.2 不分岐な素点での偶奇性の自明性

このもとで選んだ素点 $v, v_1, \dots, v_{ms}$ 以外の素点で偶奇性が自明になることを示すことができる.

Lemma 4.3 ([Tak22, Lemma 4.1 - 4.3]). $v, v_1, \dots, v_{ms}$ 以外の素点での共役対 (G, G') を考える. このとき任意の G の共役自己双対表現 π の偶奇性 $c(\pi)$ は自明である.

この命題の証明には π をある G のコンパクト部分群に制限したときの重複度 1 定理を用いる ([Vog86, Theorem 4.9], [AKY21, Theorem 1.1]).

4.3 大域的な偶奇性の自明性

大域的な共役対に関しては偶奇性が自明になることを示すことができる. この定理と $v, v_1, \dots, v_{ms}$ 以外の素点での偶奇性の自明性およびテンソル積に関する偶奇性の乗法性から次の命題を示すことができる.

Proposition 4.4 ([Tak22, Proposition 5.1]). $(\mathbb{G}, \mathbb{G}')$ を大域的な共役対とする. さらに Π を G の共役自己双対かつ 2 乗可積分な保型表現とする. このとき

$$c(\Pi_v) \prod_{i=1, \dots, m_s} c(\Pi_{v_i}) = 1$$

が成り立つ.

この命題は Badulescu による大域的な重複度 1 定理 [Bad08, Theorem 5.1] を用いて, 直接保型形式の空間の $\mathbb{G}$ 不変な双線形式を構成することで証明することができる.

4.4 保型表現の構成

結局, Proposition 4.4, Badulescu–Jacquet–Langlands 対応 [Bad08, Theorem 1.2] および Aubert–Zelevinsky 対応に関する議論 [Tak22, Subsection 4.3] を用いることで主定理は次の保型表現の構成に関する定理に帰着される.

Theorem 4.5 ([Tak22, Theorem 3.17]). L/K を数体の 2 次拡大とし, $v_1, \dots, v_m$ を K の有限素点で L/K で分解しないものとする. さらに $\pi_1, \dots, \pi_m$ を $\mathrm{GL}_n(L_{v_i})$ の共役自己双対な離散系列表現で対応する Langlands パラメータの偶奇性が全て等しいとする. このとき $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の共役自己双対な尖点保型表現 Π が存在して, 各 $i = 1, 2, \dots, m$ で Π_{v_i} は π_i と同型になる.

論文 [Tak22] では Mok による準分裂ユニタリ群の保型表現の分類 [Mok15] を用いてこの定理を証明した. 証明は概説すると次のような手順で行われる.

1. 数体の拡大 L/K に対応する準分裂ユニタリ群 $U_{L/K}(n)$ の L 群の $\mathrm{Res}_{L/K}(\mathrm{GL}_n)$ の L 群への埋め込み方には標準的底変換 L 埋め込みと捻られた底変換 L 埋め込みの 2 つがある ([Mok15, p.7]). これらの L 埋め込みを経由する GL_n の Langlands パラメータはそれぞれ偶奇性が $(-1)^{n-1}$, $(-1)^n$ の共役自己双対な Langlands パラメータである. 今回はまず π_i たちの中心指標を大域化し, 偶奇性に対応する数体上の準分裂ユニタリ群の L 埋め込みを 1 つ固定する ([Tak22, Lemma 3.7, Definition 3.8]).
2. 共役自己双対な離散系列表現 π_i に対応する $\mathrm{GL}_n(L_{v_i})$ の共役自己双対な Langlands パラメータを ϕ_i とする. 上の議論により ϕ_i は準分裂ユニタリ群の L 埋め込みを経由し, 準分裂ユニタリ群の離散的な Langlands パラメータを定める. Mok による Langlands 対応 ([Mok15, Theorem 2.5.1]) により, この Langlands パラメータに対応して離散的 L パケットと呼ばれる準分裂ユニタリ群の離散系列表現からなる有限集合 Π_{ϕ_i} が定まる. この中から元 σ_i を 1 つずつ取って固定する.
3. Shin による大域化定理 [Shi12, Corollary 4.5] を用いて, 各 v_i で σ_i たちと同型な局所成分をもつ $U_{L/K}(n)$ の保型表現 Σ を構成する. このとき L/K で分裂する有限素点を 1 つ選んでそこでの局所成分が超尖点表現になるように Σ を構成する.
4. 最後に Mok による準分裂ユニタリ群の保型表現の分類 [Mok15, Theorem 2.5.2] を用いて, Σ に対応する $\mathrm{Res}_{L/K}(\mathrm{GL}_n)$ の保型表現 Π で共役自己双対であり各局所成分が π_i と

同型なものを得る ([Tak22, Theorem 3.17]).

上の結果を用いて Theorem 3.6 の証明を行う. π_i を Langlands パラメータ σ_i をもつ共役自己双対な単純超尖点表現で $c(\sigma) = c(\sigma_i)$ を満たすものを $g \mapsto \pi(g^{-1})$ で反対群の表現にしたものとしてとる. この操作で偶奇性が変わらないことは容易にわかる. Theorem 4.5 により π と π_i を局所成分にもつ共役自己双対な尖点保型表現 Π が取れる. このとき三枝の定理と Proposition 4.4 により

$$\begin{aligned} c(\pi) &= \prod_{i=1, \dots, ms} c(\pi_i) \\ &= \prod_{i=1, \dots, ms} (-1)^{n-1} c(\sigma_i) \\ &= \prod_{i=1, \dots, ms} (-1)^{n-1} c(\sigma) \\ &= (-1)^{(n-1)ms} c(\sigma)^{ms} \end{aligned}$$

を得る. 整理すると

$$(-1)^{ns} c(\pi) = (-1)^{ms} c(\sigma)^{ms}$$

となり, 主定理を得る.

4.5 保型表現の構成に関する別の方法

Theorem 4.5 の証明の核心となる箇所は [Mok15, Lemma 7.2.3] で行われており, これには準分裂ユニタリ群の極限重複度を Arthur の跡公式を用いて調べる議論と $\text{Res}_{L/K}(\text{GL}_n)$ のユニタリ対合で捻られた跡公式の安定化が用いられている. 鈴木美裕氏 (京都大学), 若槻聡氏 (金沢大学) との共同研究 [STW] により, $\text{Res}_{L/K}(\text{GL}_n)$ のユニタリ対合で捻られた跡公式を用いて $\text{Res}_{L/K}(\text{GL}_n)$ についてのユニタリ対合で捻られた極限重複度公式を示すことにより Theorem 4.5 の安定跡公式を用いない証明が可能となった. 同様の手法で準分裂ユニタリ群以外の準分裂古典群に対応する p 進体上の GL_n の自己双対表現の大域化も行えるため, Prasad と Ramakrishnan の証明で用いられた大域化定理 [PR12, Theorem 1.1] の別証明も得られる.

Acknowledgement.

このような講演の機会を与えてくださったことならびに運営の宮崎 直先生, 青木 宏樹先生に感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 JP23KJ0403 の助成を受けたものです.

参考文献

- [AKY21] H. Atobe, S. Kondo, and S. Yasuda, *Local newforms for the general linear groups over a non-archimedean local field*, 2021, 2110.09070. [↑5](#)
- [Bad08] A. I. Badulescu, *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*, Invent. Math., **172**, no. 2, 2008, pp.383–438. [MR2390289](#) [↑6](#)
- [DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, Representations of reductive groups over a local field, 1984, pp. 33–117. [MR771672](#) [↑1](#)

- [Mie20] Y. Mieda, *Parity of the Langlands parameters of conjugate self-dual representations of $GL(n)$ and the local Jacquet-Langlands correspondence*, J. Inst. Math. Jussieu, **19**, no. 6, 2020, pp.2017–2043. [MR4167001](#) ↑2, 3
- [Mok15] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **235**, no. 1108, 2015, pp.vi+248. [MR3338302](#) ↑6, 7
- [PR12] D. Prasad and D. Ramakrishnan, *Self-dual representations of division algebras and Weil groups: a contrast*, Amer. J. Math., **134**, no. 3, 2012, pp.749–767. [MR2931222](#) ↑1, 7
- [Rog83] J. D. Rogawski, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Math. J., **50**, no. 1, 1983, pp.161–196. [MR700135](#) ↑1
- [Shi12] S. W. Shin, *Automorphic Plancherel density theorem*, Israel J. Math., **192**, no. 1, 2012, pp.83–120. [MR3004076](#) ↑6
- [STW] M. Suzuki, Y. Takanashi, and S. Wakatsuki, *Twisted limit multiplicity formulae for GL_n , in preparation* ↑7
- [Tak22] Y. Takanashi, *Parity of conjugate self-dual representations of inner forms of GL_n over p -adic fields*, 2022, arXiv, 2204.08830. ↑3, 5, 6, 7
- [Vog86] D. A. Vogan Jr., *The unitary dual of $GL(n)$ over an Archimedean field*, Invent. Math., **83**, no. 3, 1986, pp.449–505. [MR827363](#) ↑5