

# RESOLVENT TRACE FORMULAS OF HECKE OPERATORS AND OPTIMAL ESTIMATES OF THE HURWITZ CLASS NUMBERS (HECKE 作用素のレゾルベント跡公式と HURWITZ 類数の最適評価)

杉山真吾 (金沢大学 理工研究域数物科学系)

(講演時の所属は日本大学 理工学部数学科)

SHINGO SUGIYAMA

FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS,  
INSTITUTE OF SCIENCE AND ENGINEERING,  
KANAZAWA UNIVERSITY

ABSTRACT. 本記事は 2023 年 1 月 26 日に筆者が講演した内容をもとに執筆したものである. 本記事では Hecke 作用素のレゾルベント跡公式を紹介し, 応用として Kronecker-Hurwitz 類数に関する一様分布および Kronecker-Hurwitz 類数の和の最適評価を与える. 本研究は都築正男 (上智大学) との共同研究に基づく.

## 1. INTRODUCTION

重さ  $k$ , レベル  $N$ , 指標  $\chi$  の楕円カスプ形式の空間を  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  と書く. この空間上の Hecke 作用素  $T(m) \in \text{End}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$  (ただし  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\gcd(m, N) = 1$ ) は次のように定義されるのであった:

$$(T(m)f)(z) := m^{k-1} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ ad=m}} \frac{\chi(d)^{-1}}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

また整数  $D$  に対して, Kronecker-Hurwitz 類数 (the Kronecker-Hurwitz class number) と呼ばれる数  $H(D) \in \mathbb{Q}$  が定義されるのであった. 本講演では  $T(m)$  や  $H(D)$  に関する以下の 3 つの結果を紹介する.

- 素数  $p$  に対する Hecke 作用素  $T(p)$  のレゾルベントのトレースの明示公式 (レゾルベント跡公式, Theorem 3.4).
- 実数の族  $(\frac{t}{2\sqrt{p^\nu}})_{\nu \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in \mathbb{Z}, t^2 \leq 4p^\nu}$  の  $[-1, 1]$  内での  $(H(4p^\nu - t^2))_{\nu \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in \mathbb{Z}, t^2 \leq 4p^\nu}$  による重み付き一様分布 (Theorem 3.1).
- $(H(4p^\nu - t^2))_{\nu \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in \mathbb{Z}, t^2 \leq 4p^\nu}$  の和に関する最適評価 (Theorem 5.2).

Hecke 作用素  $T(m)$  は  $m$  だけでなく  $k, N, \chi$  にも依存するので, 以下では  $T(m)$  のトレースを  $\text{tr}(T(m)|S_k(\Gamma_0(N), \chi))$  と書き,  $T(m)$  が作用する空間を明記する (文脈から分かるときは略すこともある).

## 2. THE KRONECKER-HURWITZ CLASS NUMBERS

Kronecker-Hurwitz 類数 (または Hurwitz 類数) の定義を思い出しておく.  $D \equiv 0, 3 \pmod{4}$  となる  $D \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して, 整数係数 2 元 2 次形式であって正定値かつ判別式が  $-D$  のものの全体を  $\mathcal{Q}_{-D}$  とおく:

$$\mathcal{Q}_{-D} := \{Q(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y] \mid Q : \text{positive-definite quadratic form, discriminant} = -D\}.$$

この集合には  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  が以下のルールで右から作用している:

$$(Q \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})(x, y) := Q(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = Q(ax + by, cx + dy).$$

商集合  $\mathcal{Q}_{-D}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  は有限集合であることが知られている.  $Q \in \mathcal{Q}_{-D}$  の固定部分群  $\Gamma_Q$  を以下のように定める:

$$\Gamma_Q := \{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid Q \cdot \gamma = Q\}.$$

Kronecker-Hurwitz 類数とは, 本質的には  $\mathcal{Q}_{-D}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  の元の個数のことである.

**Definition 2.1** (Kronecker-Hurwitz class number (or the Hurwitz class number)).  $D \equiv 0, 3 \pmod{4}$  を満たす  $D \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して

$$H(D) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{-D}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} \frac{1}{\#\Gamma_Q}$$

とおく.

**Remark 2.2.** もし  $-D$  が基本判別式であるときは,

$$H(D) = \frac{h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-D})}}{2^{-1} \#\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-D})}^\times}$$

が成り立つ. ここで  $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-D})}$  は虚 2 次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  の類数であり,  $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-D})}^\times$  は虚 2 次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  の単数群である. つまり,  $H(D)$  は本質的に虚 2 次体の類数となる. 一般の  $D$  については  $-D = D_E f^2$  となる分解を考える. ここで  $D_E < 0$  は  $E := \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  の判別式であり,  $f \in \mathbb{Z}_{>0}$  である. このような分解は一意的に決まる. このとき類体論により,  $E$  に対応する  $D_E$  を法とする原始的 Dirichlet 指標  $\chi_{D_E}$  を用いて

$$H(D) = \frac{h_E}{2^{-1} \#\mathfrak{o}_E^\times} \sum_{0 < d|f} d \prod_{p|d} (1 - p^{-1} \chi_{D_E}(p))$$

と書くことができる.

$H(0) := -1/12$  とおく. このとき, Kronecker-Hurwitz 類数の和に関する公式がいくつか知られている.

**Theorem 2.3** (Kronecker (1860) [11], Gierster (1883) [8], Hurwitz (1885) [9]).  $p$  を素数とすると,

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 < 4p}} H(4p - t^2) = 2p$$

が成り立つ. 一般の  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対しては

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 4m}} H(4m - t^2) = 2\sigma(m) - \sum_{0 < d|m} \min\left(d, \frac{m}{d}\right)$$

が成り立つ. ここで  $\sigma$  は約数関数である.

Brown, Calkin, Flowers, James, Smith, Stout (2008) [2] により, 上記の和公式の mod  $N$  version が小さい  $N$  に対して与えられた.  $N = 2$  のときは奇素数  $l$  に対して

$$\sum_{\substack{|t| < 2\sqrt{l} \\ t \equiv a \pmod{2}}} H(4l - t^2) = \begin{cases} \frac{4l-2}{3} & (a = 0), \\ \frac{2l+2}{3} & (a = 1) \end{cases}$$

と記述される. 他にも mod  $N = 3, 4, 5, 7$  versions も与えられた. ただし 5, 7 に対しては部分的な結果である. その後 Bringmann, Kane (2019) [1] は mod 5, 7 versions を完全に与えた. 彼らは mixed mock modular form (=モックモジュラー形式とモジュラー形式の積) を用いた.

Kronecker-Hurwitz 類数がモックモジュラー形式と関係していることを最初に見出したのは Zagier (1975) [19] である.  $D \equiv 1, 2 \pmod{4}$  のとき  $H(D) := 0$  と値を定めて  $H$  の定義域を  $H: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Q}$  に拡張することができる<sup>1</sup>. このとき,  $(H(D))_{D \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  の  $q$  級数としての母関数  $\sum_{D=0}^{\infty} H(D)q^D$  は,  $q = e^{2\pi iz}$  を代入するとき, 重さ  $\frac{3}{2}$  の  $\Gamma_0(4)$  に関するモックモジュラー形式になる.

さて, Theorem 2.3 の和公式に触発されて, 以下のような  $[-1, 1]$  上の測度を考えてみる:

$$\mu_m := \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 4m}} H(4m - t^2) \delta_{\frac{t}{2\sqrt{m}}} \quad \text{on } [-1, 1].$$

ここで  $a \in [-1, 1]$  に対して,  $\delta_a$  は  $a$  をサポートに持つ Dirac デルタ超関数である.  $H(0) = -\frac{1}{12} < 0$  なのでこの測度は正值ではないが, ほとんど正值である<sup>2</sup>. 上の和公式により,

$$\langle \mu_m, 1 \rangle = 2\sigma(m) - \sum_{0 < d|m} \min\left(d, \frac{m}{d}\right)$$

が成り立つ.

本記事では, 確率論的観点に立って以下の 2 つの問題を考える:

**Problem (1)** 各  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して,  $\mu_m$  の  $n$  次モーメント  $\langle \mu_m, x^n \rangle$  の明示公式はあるか?

**Problem (2)** 極限  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m$  は存在するか? 存在する場合はどのような測度に収束するか?

Problem (1) は Eichler-Selberg 跡公式により説明できる. この跡公式は Eichler [7], Selberg [15] により独立に与えられた. この公式をフルレベルの場合に思い出しておく. 数学的な条件  $P$  に対し,  $\delta(P)$  を一般 Kronecker デルタ記号とする. つまり, もし  $P$  が成り立つなら  $\delta(P) = 1$  とし,  $P$  が成り立たないなら  $\delta(P) = 0$  とする.

**Theorem 2.4** (Eichler-Selberg trace formula (Eichler (1957) [7]), (Selberg (1956) [15])). 重さ  $k$ , レベル  $N = 1$  の楕円カスプ形式を考察する. 偶数  $k \geq 4$  と  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して, 以下の公式が成り立つ:

$$\text{tr}(T(m)|S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))) = J_i + J_u + J_h + J_e.$$

ここで, 右辺の 4 つの項は以下のように定義される:

$$J_i = \delta(\sqrt{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \frac{k-1}{12} m^{(k-2)/2}, \quad J_u = -\delta(\sqrt{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \frac{m^{(k-1)/2}}{2},$$

$$J_h = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{d, d' > 0, \\ m = dd', \, d \neq d'}} \min(d, d')^{k-1},$$

$$\begin{aligned} J_e &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}, \\ t^2 - 4m < 0}} H(4m - t^2) m^{(k-2)/2} U_{k-2}\left(\frac{t}{2\sqrt{m}}\right) \\ &= -m^{(k-2)/2} \langle \mu_m, U_{k-2} \rangle - \delta(\sqrt{m} \in \mathbb{Z}_{>0}) \frac{k-1}{12} m^{(k-2)/2}. \end{aligned}$$

ここで  $J_e$  の中に出てくる  $U_n$  は次数  $n$  の第 2 種 Chebyshev 多項式である.

$J$  の添え字の  $i, u, h, e$  はそれぞれ identity, unipotent, hyperbolic, elliptic の頭文字である.  $J_e$  は本質的に  $\mu_m$  の  $k-2$  次モーメントとみなせて,  $\langle \mu_m, x^n \rangle$  の公式を導出することは可能なので, Problem (1) に解答を与えることができた.

<sup>1</sup>  $H$  の定義域は  $\mathbb{Z}$  上にも拡張可能で,  $D < 0$  では  $H(D) = 0$  とする.

<sup>2</sup> 正值でないものも測度と呼ぶ流儀を採用している. 線型汎関数と呼んだほうが誤解がないかもしれない.

後述するが,  $k = 2$  のときも Eichler-Selberg 跡公式はある ([13, pp. 32–33] に導出方法の概略が書いてある. [14] も参照されたし).  $k = 2$  に対する Eichler-Selberg 跡公式の左辺は,  $\dim S_2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = 0$  なので 0 である. よって,  $m = 1$  とすれば以下のような Kronecker-Hurwitz 類数の間の関係式を得る:

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 4m}} H(4m - t^2) = 2\sigma(m) - \sum_{0 < d|m} \min\left(d, \frac{m}{d}\right).$$

この式は Theorem 2.3 のものと同じである. 任意の  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して  $\mathrm{tr}(T(m)|S_2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))) = 0$  なので,  $m = 2, 3, 4, \dots$  と増やしていけば, 上述の関係式以外にも  $(H(D))_D$  の関係式を得ることができる. したがって  $H(D)$  の値は帰納的に求めることができる.

### 3. WEIGHTED EQUIDISTRIBUTIONS

それでは前の章で述べた Problem (2) について考察しよう.  $m$  を素数べきに限定することで, 以下のような重み付き一様分布定理が得られる.

**Theorem 3.1** (Weighted equidistribution [18]).  $p$  を素数とする. 任意の部分区間  $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) に対して,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\mu_{p^\nu}([\alpha, \beta])}{\mu_{p^\nu}([-1, 1])} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1 - p^{-1}}{2p^\nu} \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ \alpha \leq \frac{t}{2p^{\nu/2}} \leq \beta}} H(4p^\nu - t^2) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} dx$$

が成り立つ.

つまり,  $(\frac{t}{2p^{\nu/2}})_{t \in \mathbb{Z}, t^2 \leq 4p^\nu, \nu \in \mathbb{Z}_{>0}}$  の  $[-1, 1]$  内での分布は Kronecker-Hurwitz 類数の重みを付けると Wigner の半円則 (semicircle law) に収束する.

重み付き一様分布定理はレゾルベント跡公式を使って証明できる. レゾルベント跡公式を紹介する前にまずは Eichler-Selberg 跡公式の歴史について触れておく. 筆者が調べた限り, Eichler [7], Selberg [15] の独立した研究の後, 一般の  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  に関する記述が初めてなされたのが Cohen (1976–1977) [4] である. しかし彼の証明は未出版である. 後に  $N = 1$  の場合に Zagier (1977) による証明 [20] が世に出た (cf. [21], [22] も参照されたし). その後, Oesterlé (1977) の学位論文 [13] で一般の  $k, N, \chi$  の場合に証明がなされた. 今の時代では Eichler-Selberg 跡公式は既知のものとして扱われているが,  $N = 1$  の場合ですら証明しようとするとは容易ではない. 一般の設定で扱っているテキストとしては三宅の本 [12] が有名であろう. 彼の本では一般の第 1 種 Fuchs 群  $\Gamma$  に関する楕円カスプ形式の空間  $S_k(\Gamma, \chi)$  の Hecke 作用素に対する Eichler-Selberg 跡公式を証明している (ただし  $k > 2$  は課している).  $\mathrm{GL}_2$  のアデール群に関する Selberg 跡公式を使って Eichler-Selberg 跡公式を証明することも可能で, それは Knightly, Li (2006) の本 [10] で解説されている.

ここで一般の  $k, N, \chi$  に対する  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  上の Hecke 作用素に対する Eichler-Selberg 跡公式を思い出しておく. なお, 記述方式は Schoof, van der Vlugt [14] を参照した.

**Theorem 3.2** (Eichler-Selberg trace formula for  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ ).  $k, N \in \mathbb{Z}_{>0}$  とし,  $\chi$  は mod  $N$  の Dirichlet 指標とする.  $k \geq 2$  と  $\chi(-1) = (-1)^k$  を仮定する. このとき,  $\mathrm{gcd}(m, N) = 1$  を満たす任意の  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して,

$$\mathrm{tr}(T(m)|S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = A_1(m) + A_2(m) + A_3(m) + A_4(m)$$

が成り立つ. ここで,  $A_1(m)$  は以下のように定義される:

$$A_1(m) := \delta(\sqrt{m} \in \mathbb{Z}_{>0}) m^{\frac{k-2}{2}} \chi(\sqrt{m}) \frac{k-1}{12} \psi(N),$$

$$\psi(N) := N \prod_{p|N} (1 + p^{-1}).$$

$A_2(m)$  は以下のように定義される:

$$A_2(m) := -\frac{1}{2} \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 < 4m}} m^{\frac{k-2}{2}} U_{k-2} \left( \frac{t}{2\sqrt{m}} \right) H_{N,\chi}(4m - t^2),$$

$$H_{N,\chi}(4m - t^2) := \sum_{\substack{f \in \mathbb{Z}_{>0} \\ f^2 | t^2 - 4m \\ \frac{t^2 - 4m}{f^2} \equiv 0, 1 \pmod{4}}} h_w \left( \frac{t^2 - 4m}{f^2} \right) \mu(t, f, m),$$

$$h_w(-D) := \frac{h_E}{2^{-1} \# \mathfrak{o}_E^\times} d \prod_{p|d} (1 - p^{-1} \chi_{D_E}(p)),$$

$$\mu(t, f, m) := \frac{\psi(N)}{\psi\left(\frac{N}{\gcd(N, f)}\right)} \sum_{\substack{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \\ x^2 - tx + m \equiv 0 \pmod{N \gcd(N, f)}}} \chi(x).$$

ここで  $h_w(-D)$  の定義にでてくる  $d$ ,  $D_E$  はそれぞれ正の整数と基本判別式であり,  $-D = D_E d^2$  を満たすものとする.  $D_E$  の添え字は  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  のことであり,  $E/\mathbb{Q}$  の判別式は  $D_E$  と一致する.  $A_3(m)$  は以下の通り定義される:

$$A_3(m) := - \sum'_{\substack{d|m \\ 0 < d \leq \sqrt{m}}} d^{k-1} \sum_{\substack{0 < c|N \\ \gcd(c, \frac{N}{c}) | \gcd(\frac{N}{d}, \frac{m}{d} - d)}} \varphi(\gcd(c, \frac{N}{c})) \chi(y).$$

ここで関数  $F: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して,

$$\sum'_{\substack{d|m \\ 0 < d \leq \sqrt{m}}} F(d) := \sum_{\substack{d|m \\ 0 < d < \sqrt{m}}} F(d) + \delta(\sqrt{m} \in \mathbb{Z}_{>0}) \frac{1}{2} F(\sqrt{m})$$

とした.  $y$  は  $y = y_{m, N, c, d} \in \mathbb{Z} / \frac{N}{\gcd(c, \frac{N}{c})} \mathbb{Z}$  であって  $y \equiv d \pmod{c}$  かつ  $y \equiv \frac{m}{d} \pmod{\frac{N}{c}}$  を満たすようにとる. 最後に,  $A_4(m)$  は以下のように定義される:

$$A_4(m) := \delta(k = 2 \wedge \chi = 1) \sum_{0 < t|m} t.$$

では次にレゾルベント跡公式について説明する.  $k, N \in \mathbb{Z}_{>0}$  とし,  $\chi$  は  $\text{mod } N$  の Dirichlet 指標とする. そして  $k \geq 2$  と  $\chi(-1) = (-1)^k$  を仮定する.  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  を  $\gcd(m, N) = 1$  なるものとする. Hecke 作用素  $T(m)$  を正規化しておく:

$$T'(m) := \chi(m)^{-1/2} m^{\frac{1-k}{2}} T(m) \in \text{End}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)).$$

**Definition 3.3** (Resolvent).  $\lambda \in \mathbb{C}$  とし, これは  $T'(m)$  の固有値ではないと仮定する. このとき,

$$(T'(m) - \lambda \text{id})^{-1} \in \text{End}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$$

を  $T'(m)$  のレゾルベントと呼ぶ.

ここから先は  $\lambda = X + X^{-1}$  かつ  $0 \neq |X| \ll 1$  となる複素数  $X$  が取れる場合を考える.  $B_k(N, \chi) \subset S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  を Hecke 固有形式からなる直交基底とする. ここで直交基底は, Petersson 内積に関するものである. レベルを割らない素数  $p \nmid N$  に対して,  $f$  の  $p$  における佐武パラメーターを  $(\alpha_f(p), \alpha_f(p)^{-1})$  とする. このとき,

$$T'(p)f = (\alpha_f(p) + \alpha_f(p)^{-1})f, \quad f \in B_k(N, \chi)$$

である. また, the Deligne bound (Ramanujan-Petersson 予想の解決 [5], [6]) により  $|\alpha_f(p) + \alpha_f(p)^{-1}| \leq 2$  が成り立つ. これは  $|\alpha_f(p)| = 1$  と同値である. Dirichlet 指標  $\psi$  に対して  $\psi$  の導手を  $f_\psi$  と書くことにする.

**Theorem 3.4** (Resolvent trace formula [18]).  $p$  は素数であり,  $p \nmid N$ ,  $\chi(-1) = (-1)^k$  とする. このとき以下の公式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tr}((T'(p) - (X + X^{-1}) \operatorname{id})^{-1} | S_k(\Gamma_0(N), \chi)) \\
 &= \sum_{f \in B_k(N, \chi)} \frac{1}{\alpha_f(p) + \alpha_f(p)^{-1} - (X + X^{-1})} \\
 &= -\frac{k-1}{12} \psi(N) \frac{X}{1 - p^{-1} X^2} - \frac{1}{2} \frac{X}{1 - X^2} \sum_{\substack{0 < c | N \\ \gcd(c, \frac{N}{c}) | \frac{N}{f_X}}} \varphi(\gcd(c, \frac{N}{c})) \\
 &+ \sum_{0 < l | \frac{N}{f_X}} \varphi(l) \sum_{\substack{0 < c | N \\ l = \gcd(c, \frac{N}{c})}} \frac{X}{(1 - X^2)(1 - \{\chi'_c(p) \chi(p)^{-1/2} p^{(1-k)/2} X\}^{m_{p,l}})} \\
 &- \frac{\delta(k=2 \wedge \chi=1) X}{(1 - p^{1/2} X)(1 - p^{-1/2} X)} + \frac{X}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{k,p}(\nu) (\chi(p)^{-1/2} p^{-1/2} X)^{\nu}.
 \end{aligned}$$

ここで

$$A_{k,p}(\nu) := \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 < 4p^{\nu}}} H_{N,\chi}(4p^{\nu} - t^2) U_{k-2} \left( \frac{t}{2p^{\nu/2}} \right)$$

であり,  $\gcd(c, \frac{N}{c}) | \frac{N}{f_X}$  となる任意の  $N$  の正の約数  $c | N$  に対して,  $\chi$  の分解に現れる  $N$  を法とする 2 つの Dirichlet 指標  $\chi_c, \chi_{c'}$  は以下のように定義される:

$$\chi = \chi_c \times \chi'_{c'}, \quad f_{\chi_c} = c_1 := \prod_{p|c} p^{\operatorname{ord}_p(f_{\chi})}, \quad f_{\chi_{c'}} = \frac{f_{\chi}}{c_1}.$$

また, 正の約数  $l | \frac{N}{f_X}$  に対して,  $p \bmod l$  の  $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\times}$  の元としての位数を  $m_{p,l}$  とする:

$$m_{p,l} := \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p^n \equiv 1 \pmod{l}\}.$$

左辺は  $X^{-1}$  が出てくるが, 式の形を見れば分かるように特異点  $X = 0$  は除去可能である. 特に上の Theorem 3.4 で  $N = 1$  とすると右辺はシンプルになる.

**Corollary 3.5.**

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tr}((T'(p) - (X + X^{-1}) \operatorname{id})^{-1} | S_k(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}))) \\
 &= \sum_{f \in B_k(1)} \frac{1}{\alpha_f(p) + \alpha_f(p)^{-1} - (X + X^{-1})} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{X}{1 - X^2} + \frac{X}{(1 - X^2)(1 - p^{\frac{1-k}{2}} X)} + \frac{X}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle \mu_{p^{\nu}}, U_{k-2} \rangle (p^{-1/2} X)^{\nu}.
 \end{aligned}$$

#### 4. PROOF OF RESOLVENT TRACE FORMULAS

Hecke 作用素のトレースに関する以下のような母関数を考える:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{tr}(T(p^{\nu}) | S_k(\Gamma_0(N), \chi)) \zeta^{\nu+1}, \quad X = \chi(p)^{1/2} p^{(k-1)/2} \zeta.$$

三角関数の性質により以下の関係式が成り立つ.

**Lemma 4.1.**  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  とする. このとき  $|X| < \min(|\alpha|, |\alpha|^{-1})$  なる全ての  $X \in \mathbb{C} - \{0\}$  に対して,

$$\frac{1}{\alpha + \alpha^{-1} - (X + X^{-1})} = - \sum_{n=0}^{\infty} U_n \left( \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} \right) X^{n+1}.$$

よって Hecke 作用素  $T(p^\nu)$  の漸化式を用いることで

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \text{tr}(T(p^\nu) | S_k(\Gamma_0(N), \chi)) \zeta^{\nu+1} = -\chi(p)^{-1/2} p^{\frac{1-k}{2}} \times \text{tr}((T'(p) - (X + X^{-1}) \text{id})^{-1})$$

という表示が得られる. つまり,  $(\text{tr}(T(p^\nu)))_\nu$  の母関数は本質的に  $T(p)$  のレゾルベントのトレースに等しい.

それではレゾルベントのトレースの“幾何サイド”の計算に移ろう. 先程の考察と Eichler-Selberg 跡公式により,  $(A_1(p^\nu))_\nu, (A_2(p^\nu))_\nu, (A_3(p^\nu))_\nu, (A_4(p^\nu))_\nu$  の母関数を考えればよい:

$$J_j := \sum_{\nu=0}^{\infty} A_j(p^\nu) \zeta^{\nu+1}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

まず,  $J_1, J_4$  は等比級数の簡単な計算により以下のように表現できる:

$$J_1 = \frac{k-1}{12} \psi(N) \frac{\chi(p)^{-1/2} p^{(1-k)/2} X}{1 - p^{-1} X^2},$$

$$J_4 = \delta(k=2 \wedge \chi=1) \frac{p^{-1/2} X}{(1 - p^{1/2} X)(1 - p^{-1/2} X)}.$$

次に

$$A_2(p^\nu) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 < 4p^\nu}} (p^\nu)^{\frac{k-2}{2}} U_{k-2} \left( \frac{t}{2\sqrt{p^\nu}} \right) H_{N,\chi}(4p^\nu - t^2)$$

に注意すると

$$J_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_2(p^\nu) \zeta^{\nu+1} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{k,p}(\nu) (\chi(p)^{-1/2} p^{-1/2} X)^\nu \times \chi(p)^{-1/2} p^{(1-k)/2} X$$

となる. この級数は, 以下の “trivial bound” を使うと  $|X| < p^{-1/2}$  で広義一様絶対収束することが分かる.

**Remark 4.2** (trivial bound). 類数公式と  $L(1, \chi_{DE}) \ll \log |D_E|$  により, 任意の  $\epsilon > 0$  に対する評価

$$|A_{k,p}(\nu)| \ll_{k,N,\epsilon} (p^\nu)^{1+\epsilon}, \quad \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が直ちに分かる. 難なく得られるこの評価を trivial bound と呼ぶことにする.

残すは  $J_3$  の計算のみである.

$$A_3(p^\nu) := - \sum_{\substack{d|p^\nu \\ 0 < d \leq \sqrt{p^\nu}}} d^{k-1} \sum_{\substack{0 < c|N \\ \gcd(c, \frac{N}{c}) | \gcd(\frac{N}{d}, \frac{p^\nu}{d} - d)}} \varphi(\gcd(c, \frac{N}{c})) \chi(y),$$

$$J_3 := \sum_{\nu=0}^{\infty} A_3(p^\nu) \zeta^{\nu+1}$$

であったことを思い出す.  $F(X) := \sum_{\nu=0}^{\infty} A_3(p^\nu) \zeta^\nu$  を考えればよく, この公式は以下で与えられる.

**Proposition 4.3.**  $|X| < 1$  のとき,

$$F(X) = - \sum_{0 < l | \frac{N}{f_X}} \varphi(l) \sum_{\substack{0 < c | N \\ l = \gcd(c, N/c)}} \frac{1}{(1 - X^2)(1 - \{\chi'_c(p)\chi(p)^{-1/2}p^{(1-k)/2}X\}^{m_{p,l}})} \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - X^2} \sum_{\substack{0 < c | N \\ \gcd(c, \frac{N}{c}) | \frac{N}{f_X}}} \varphi(\gcd(c, \frac{N}{c})).$$

*Proof.* この計算が一番込み入っているが, 計算自体は等比級数の簡単な計算に帰着される.

$$F(X) = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\nu} p^{(k-1)j} \sum_{\substack{c | N \\ \gcd(c, N/c) | \gcd(N/f_X, (p^{2\nu+1-2j}-1)p^j)}} \varphi(\gcd(c, N/c)) \chi(y) \zeta^{2\nu+1} \\ - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\nu} p^{(k-1)j} \sum_{\substack{c | N \\ \gcd(c, N/c) | \gcd(N/f_X, (p^{2\nu-2j}-1)p^j)}} \varphi(\gcd(c, N/c)) \chi(y) \zeta^{2\nu} \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2} p^{(k-1)\nu} \sum_{\substack{c | N \\ \gcd(c, N/c) | \gcd(N/f_X, 0)}} \varphi(\gcd(c, N/c)) \chi(y) \zeta^{2\nu}$$

と分解しておく. 3 番目の和は簡単に計算できて,

$$[\text{3rd term}] = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{k-1}\zeta^2} \sum_{\substack{c | N \\ \gcd(c, N/c) | (N/f_X)}} \varphi(\gcd(c, N/c))$$

となる. 次に 1 番目の和について調べる.  $c \in \mathbb{Z}_{>0}$  を

$$c | N, \quad \gcd(c, N/c) | \gcd(N/f_X, p^{2\nu+1-2j} - 1)$$

を満たすものとし,  $c_1 := \prod_{p|c} p^{\text{ord}_p(f_X)}$  とおく.  $y \equiv p^j \pmod{c_1}$  と  $y \equiv p^{2\nu+1-j} \pmod{f_X/c_1}$  を使うと

$$\chi(y) = \chi_c(p^j) \chi'_c(p^{2\nu+1-j}) = \chi_c(p)^j \chi'_c(p)^{2\nu+1-j}$$

となるので

$$[\text{1st term}] = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\nu} p^{(k-1)j} \sum_{\substack{c | N \\ \gcd(c, N/c) | \gcd(N/f_X, p^{2\nu+1-2j}-1)}} \varphi(\gcd(c, N/c)) \chi_c(p)^j \chi'_c(p)^{2\nu+1-j} \zeta^{2\nu+1}$$

となる.  $\sum$  の順序を交換して, 項の周期性に関する  $m_{p,l}$  の寄与に注意しながら等比級数の計算をすることで, [1st term] は以下のように変形される:

$$- \sum_{l | (N/f_X)} \varphi(l) \sum_{\substack{c | N \\ l = \gcd(c, N/c)}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \{\chi'_c(p)\zeta\}^{2\nu+1} \sum_{\substack{0 \leq j \leq \nu \\ 2\nu+1-2j \equiv 0 \pmod{m_{p,l}}}} \{p^{k-1}\chi(p)\chi'_c(p^{-2})\}^j \\ = - \sum_{\substack{l | (N/f_X) \\ m_{p,l} : \text{odd}}} \varphi(l) \\ \times \sum_{\substack{c | N \\ l = \gcd(c, N/c)}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\nu=m_{p,l}t + \frac{m_{p,l}-1}{2}}^{\frac{m_{p,l}(t+1) + \frac{m_{p,l}-1}{2} - 1}{2}} \{\chi'_c(p)\zeta\}^{2\nu+1} \sum_{s=0}^t \{p^{k-1}\chi(p)\chi'_c(p^{-2})\}^{\nu - \frac{m_{p,l}-1}{2} - m_{p,l}s}$$

$$= - \sum_{\substack{l|(N/f_X) \\ m_{p,l}:\text{odd}}} \varphi(l) \sum_{\substack{c|N \\ l=\gcd(c,N/c)}} \frac{\{\chi'_c(p)\zeta\}^{m_{p,l}}}{(1-\chi(p)p^{k-1}\zeta^2)(1-\{\chi'_c(p^2)\zeta^2\}^{m_{p,l}})}.$$

$F(X)$  の分解に出てくる 2 番目の和は同様の考察により

$$\begin{aligned} [\text{2nd term}] = & - \sum_{\substack{l|(N/f_X) \\ m_{p,l}:\text{even}}} \varphi(l) \sum_{\substack{c|N \\ l=\gcd(c,N/c)}} \frac{1}{(1-p^{k-1}\chi(p)\zeta^2)(1-\{\chi'_c(p)\zeta\}^{m_{p,l}})} \\ & - \sum_{\substack{l|(N/f_X) \\ m_{p,l}:\text{odd}}} \varphi(l) \sum_{\substack{c|N \\ l=\gcd(c,N/c)}} \frac{1}{(1-p^{k-1}\chi(p)\zeta^2)(1-\{\chi'_c(p^2)\zeta^2\}^{m_{p,l}})} \end{aligned}$$

となる. 以上の計算により,  $T'(p)$  のレゾルベント跡公式が得られる.  $\square$

## 5. 最適評価

素数  $p$  を固定する.  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\alpha > 0$  に対して, 以下のような条件  $(E_{n,\alpha})$  を考える.

**Definition 5.1.** 以下の条件を  $(E_{n,\alpha})$  と書く:

$$\forall \epsilon > 0, \exists C > 0, \forall \nu \in \mathbb{Z}_{>0}, \left| \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 4p^\nu}} H(4p^\nu - t^2) \left( \frac{t}{2\sqrt{p^\nu}} \right)^n \right| < C(p^\nu)^{\alpha+\epsilon}.$$

条件  $(E_{n,\alpha})$  に登場する定数  $C$  は  $p, n, \alpha, \epsilon$  に依存するかもしれないが  $\nu$  に依らないことに注意してほしい. trivial bound により  $\alpha = 1$  のときには, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  で  $(E_{n,1})$  が成り立つことが分かる. また,

$$\langle \mu_{p^\nu}, x^n \rangle = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t^2 \leq 4p^\nu}} H(4p^\nu - t^2) \left( \frac{t}{2\sqrt{p^\nu}} \right)^n$$

により条件  $(E_{n,\alpha})$  は  $\mu_{p^\nu}$  と関係している. ここで, 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して  $(E_{n,\alpha})$  が成り立つような  $\alpha > 0$  の値はいくつだろうか, という自然な疑問が沸き起こる<sup>3</sup>.  $\alpha = 1$  で OK なので 1 より大きい  $\alpha$  でももちろん  $(E_{n,\alpha})$  は成立するが,  $\alpha > 0$  はどこまで小さくできるだろうか. 先に答えを言っておくと, 以下の通り, optimal な  $\alpha$  はちょうど  $1/2$  である.

**Theorem 5.2** (Optimal estimate [18]). 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して  $(E_{n,1/2})$  が成り立つ. さらにもし  $0 < \alpha < 1/2$  ならば, ある  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  が存在して  $(E_{n,\alpha})$  は成り立たない.

それでは Theorem 3.1 と Theorem 5.2 の証明を述べよう. まずは証明の鍵となる以下の Key Lemma に注目する.

**Theorem 5.3** (Key Lemma). 任意の  $\epsilon > 0$  と任意の偶数  $k \geq 4$  に対して,

$$|A_{k,p}(\nu)| \ll_{p,k,N,\chi,\epsilon} (p^\nu)^{1/2+\epsilon}, \quad \nu \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

無視している定数は  $\nu$  に依らない.

*Proof.* 母関数  $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{k,p}(\nu)(\chi(p)^{-1/2}p^{-1/2}X)^\nu$  は trivial bound により  $|X| < p^{-1/2}$  において広義一様絶対収束し, この範囲で正則な関数である. レゾルベント跡公式 (Theorem 3.4) により

$$J_2 = -\chi(p)^{-1/2}p^{(1-k)/2} \operatorname{tr}((T'(p) - (X + X^{-1})\operatorname{id})^{-1}) - (J_1 + J_3 + J_4)$$

<sup>3</sup> $n=0$  の場合は  $\sigma(p^\nu)$  を用いた明示公式により  $\alpha = 1$  が optimal なので, 最初から  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  のときしか考えていない.

であるので、右辺の明示的な表示により、 $J_2$  は  $\mathbb{C}$  上の有理型関数にまで解析接続できて、特に正則関数としては  $|X| < 1$  の範囲まで拡張できる。よって、Cauchy の評価により、

$$p^{-\nu/2} A_{k,p}(\nu) \asymp \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|X|=p^{-\epsilon}} \frac{F(X)}{X^{\nu+1}} dX \ll_{p,k,N,\chi,\epsilon} (p^\nu)^\epsilon$$

となる。  $\square$

直接式をいじらなくても、解析接続によって母関数の定義域を広げれば非自明な不等式が得られる。ここが面白いところである。

以上の準備のもと、Theorem 5.2 の証明に入る。  $N = 1$  とすれば  $\chi$  は自動的に自明指標になり、

$$|A_{k,p}(\nu)| \ll_{p,k,\epsilon} (p^\nu)^{1/2+\epsilon}, \quad \nu \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

なので  $(E_{n,1/2})$  が任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  で成り立つことが分かる。

次に、 $\alpha < 1/2$  に対する  $(E_{n,\alpha})$  が成り立たないことを示す。重さアスペクトに関する Serre (1997) の一様分布定理 [16] により、任意の素数  $p$  に対して十分大きいある正の偶数  $k$  と重さ  $k$ 、レベル 1 の Hecke 固形式  $f$  が存在して、 $\alpha_f(p) \neq 1$  を満たす。このような  $f$  を 1 つ固定する。するとレゾルベント跡公式 (Theorem 3.4, Corollary 3.5) により  $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{k,p}(\nu) p^{-\nu/2} X^\nu$  は  $X = \alpha_f(p)$  で極を持つことが分かる。したがってこの級数の収束半径はちょうど 1 である。ゆえに、 $n \leq k-2$  なる正の整数  $n$  が存在して、

「任意の  $\alpha \in (0, 1/2)$  に対して  $(E_{n,\alpha})$  が成立しない」

ということが分かる。  $\square$

最後に Theorem 3.1 の証明に入ろう。  $[-1, 1]$  上の測度  $\mu_\nu^{N,\chi,p}$  を以下で定義する：

$$\mu_\nu^{N,\chi,p} := 2^{-1} p^{-\nu} \sum_{t \in \mathbb{Z}, t^2 < 4p^\nu} H_{N,\chi}(4p^\nu - t^2) \delta_{\frac{t}{2\sqrt{p^\nu}}}.$$

もし  $\chi = 1$  ならば  $\mu_\nu^{N,\chi,p}$  は正值である。レゾルベント跡公式を用いることでこの測度の漸近挙動が分かる。

**Lemma 5.4.**

$$\langle \mu_\nu^{N,\chi,p}, 1 \rangle = \delta(\chi = 1) \frac{1}{1-p^{-1}} + \mathcal{O}_{N,\chi}(\nu p^{-\nu/2}).$$

*Proof.*  $k = 2$  に対する Eichler-Selberg 跡公式と the Deligne bound (Ramanujan-Petersson 予想の解決 [5], [6]) を用いると

$$\begin{aligned} \langle \mu_\nu^{N,\chi,p}, 1 \rangle &= p^{-\nu} \{A_1(p^\nu) + A_3(p^\nu) + A_4(p^\nu) - \text{tr}(T(p^\nu)|S_2(\Gamma_0(N), \chi))\} \\ &= p^{-\nu} A_4(p^\nu) + \mathcal{O}_{N,\chi}(\nu p^{-\nu/2}) \end{aligned}$$

となる。  $A_4(p^\nu) = \delta(\chi = 1) \frac{p^{\nu+1}-1}{p-1}$  であるから主張が成り立つことが分かる。  $\square$

**Theorem 5.5.**

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_\nu^{N,\chi,p} = \delta(\chi = 1) \frac{1}{1-p^{-1}} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx \quad (*\text{-weakly}).$$

*Proof.*  $\chi = 1$  の場合を考える。上の Lemma により、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \mu_\nu^{N,1,p}, 1 \rangle = \frac{1}{1-p^{-1}}$$

となる。また Key Lemma を使えば

$$|\langle \mu_\nu^{N,1,p}, U_{k-2} \rangle| \ll_{p,k,N,\epsilon} (p^\nu)^{-1/2+\epsilon}, \quad k \geq 4$$

となる。したがって、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \mu_\nu^{N,1,p}, U_n \rangle = 0, \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

となる. ここで注意として, もし trivial bound を使うと  $|\langle \mu_\nu^{N,1,p}, U_{k-2} \rangle| \ll_{p,k,N,\epsilon} (p^\nu)^\epsilon$  しかいえず, 0 に収束することは証明できない. trivial bound を少しでも改良したものがあれば, 上記の証明方法でうまくいく.

さて以上の議論により, 多項式関数  $f$  に対しては

$$\langle \mu_\nu^{N,1,p}, f \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{1-p^{-1}} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx \quad (*\text{-weakly})$$

となることが分かった. 測度  $\mu_\nu^{N,1,p}$  は正值なので Weierstrass の多項式近似定理を用いると, テスト関数  $f$  の範囲は  $[-1, 1]$  上の連続関数のなす空間  $C([-1, 1])$  上に拡張可能である. そして Riemann 積分可能な関数にまで拡張できる.

$\chi$  が非自明な場合は, 多項式関数に対しては上と同様にして証明できる. しかし  $\chi$  が非自明だと測度が正值ではないので, Weierstrass の多項式近似定理が適用できない. ここではその代わりに, 任意の  $f \in C([-1, 1])$  に対して  $|\langle \mu_\nu^{N,\chi,p}, f \rangle| \leq \mu_\nu^{N,1,p}(1) \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$  であることを使う. そうすればテスト関数の範囲を連続関数全体まで拡張できる.  $\square$

ここまで, レベルを割らない素数  $p$  に対する  $T(p)$  のレゾルベント跡公式を用いて Kronecker-Hurwitz 類数に関する結果を導出してきた. 実はレベルを割らない素数  $p$  のみならず, レベルと互いに素な一般の  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対しても同様の考察が可能である. 素数からなる空でない有限集合  $S = \{p_1, \dots, p_r\}$  に対して,  $S$  が乗法的に生成するモノイドを  $\mathbb{N}(S)$  とおく.  $\mathbb{N}(S) = \{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \forall p \notin S, \text{ord}_p(n) = 0\}$  である.

**Theorem 5.6.** 任意の部分区間  $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) に対して

$$\lim_{\substack{\nu(p) \rightarrow \infty (\forall p \in S) \\ m = \prod_{p \in S} p^{\nu(p)} \in \mathbb{N}(S)}} \frac{\mu_m([\alpha, \beta])}{\mu_m([-1, -1])} = \frac{2}{\pi} \int_\alpha^\beta \sqrt{1-x^2} dx$$

が成り立つ. また任意の整数  $k > 2$  に対して

$$\langle \mu_m, U_{k-2} \rangle \ll_{S,k,\epsilon} m^{1/2+\epsilon}, \quad m \in \mathbb{N}(S)$$

が成り立つ. 無視している定数は任意の  $p \in S$  における  $m$  の指数  $\text{ord}_p(m)$  には依存しない.

*Proof.* レゾルベント跡公式の multivariable analogue を使うことで示することができる (注:  $T'(m)$  のレゾルベントの跡ではない). ここで使う公式は

$$\sum_{f \in B_k(1)} \prod_{j=1}^r \frac{-p_j^{(1-k)/2}}{\alpha_f(p_j) + \alpha_f(p_j)^{-1} - (X_j + X_j^{-1})} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3$$

と記述される. ここで

$$\tilde{J}_1 := \frac{k-1}{12} \prod_{j=1}^r \frac{p_j^{\frac{1-k}{2}} X_j}{1 - p_j^{-1} X_j^2},$$

$$\tilde{J}_2 := \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} A_3(p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}) \prod_{j=1}^r (p_j^{(1-k)/2} X_j)^{\nu_j+1},$$

$$\tilde{J}_3 := -\frac{1}{2} \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \left\{ \langle \mu_{p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}}, U_{k-2} \rangle - 2\delta(\sqrt{m} \in \mathbb{Z}_{>0}) \frac{-(k-1)}{12} \right\} \prod_{j=1}^r (p_j^{-1/2} X_j)^{\nu_j} p_j^{(1-k)/2} X_j$$

である.  $\tilde{J}_2$  は多重円盤  $\Delta := \{(X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{C}^r \mid \max_{1 \leq j \leq r} |X_j| < 1\}$  上で広義一様絶対収束する. したがってレゾルベント跡公式の multivariable analogue を使うことで,  $\tilde{J}_3$  は  $\Delta$  上に解析接続される.  $\tilde{J}_3$  の定義域が広がったのでとは Cauchy の評価を使えばよい.  $\square$

## 6. CONCLUDING REMARKS

本研究の証明の流れをまとめると以下の通りである:

- (1) Eichler-Selberg 跡公式  $\Rightarrow T(p)$  のレゾルベント跡公式 (Theorem 3.4).
- (2) Theorem 3.4  $\Rightarrow$  Key Lemma (Theorem 5.3):

$$\langle \mu_{p^\nu}, U_{k-2} \rangle \ll_{p,k,\epsilon} (p^\nu)^{1/2+\epsilon}, \quad (k \geq 4).$$

- (a) Key Lemma  $\Rightarrow$  最適評価 (Theorem 5.2):

$$\langle \mu_{p^\nu}, x^n \rangle \ll_{n,\epsilon} p^{\alpha+\epsilon}, \quad (\alpha = 1/2, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

- (b) Key Lemma  $\Rightarrow$  重み付き一様分布 (Theorem 3.1):

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\mu_{p^\nu}([\alpha, \beta])}{\mu_{p^\nu}([-1, 1])} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx.$$

余談だが, 本研究は都築と筆者の Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型跡公式 [17] の計算をした際に偶然気づいたものである. [17, Theorem 1.1] にテスト関数を掛けて複素線積分をすることで [17, Corollary 1.2] が得られるのであった. では逆に [17, Corollary 1.2] から [17, Theorem 1.1] を導出するにはどうすればよいのだろうか. 特に  $F = \mathbb{Q}$ ,  $\mathfrak{n} = \mathbb{Z}$  の場合に [17, Corollary 1.2] と同等な Zagier の公式 [23, Theorem 1] を仮定して [17, Theorem 1.1] を得るにはどうすればよいだろうか. 答えは以下のように母関数を計算すればよいのである.

重さ  $k$ , レベル 1 の正規化された Hecke 固有形式  $f$  を 1 つ固定すると,  $f$  はすべての  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して  $T'(n)$  の固有関数である.  $f$  に  $T'(n)$  を作用させたときに生じる固有値を  $\lambda_f(n)$  とする. 素数  $p$  をとり,  $\lambda_f(p) = p^{\nu/2} + p^{-\nu/2}$  となるように純虚数  $\nu$  をとる. このとき  $\text{Re}(s) > 0$  となる複素数  $s$  に対して

$$\frac{1}{p^{\nu/2} + p^{-\nu/2} - (p^{s/2} + p^{-s/2})} = -p^{-s/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n p^{\nu(2m-n)/2} \right) p^{-ns/2}$$

が成り立ち, これは  $\zeta := p^{-s/2}$  を変数とする Taylor 級数とみなせる. 右辺の係数は佐武パラメーター  $(p^{\nu/2}, p^{-\nu/2})$  の対称式で書けて, これは  $a_f(p^n)$  の定数倍になる (cf. Lemma 4.1). したがって, Zagier の公式 [23, Theorem 1] の  $m = p^n$  の場合のものの両辺に  $\zeta^n$  を掛けて  $n$  を動かして和をとってみる (Zagier の公式の  $s$  はここで用いている  $s$  とは異なることに注意せよ). このとき, 都築と筆者の Jacquet-Zagier 型跡公式 [17, Theorem 1.1] の  $F = \mathbb{Q}$ ,  $\mathfrak{n} = \mathbb{Z}$ ,  $S = \{p\}$  の場合が復元されるべきである<sup>4</sup>. このような考察により, Kronecker-Hurwitz 類数の研究に至ったのである.

本記事では Kronecker-Hurwitz 類数について考察してきたが, 2 次指標に付随する Dirichlet  $L$  関数の 0 での値 (関数等式を使えば 1 での値) を考察していることと等価である. したがって 2 次指標に付随する Dirichlet  $L$  関数の他の整数点での値についても, 値分布を調べてみるのは一興かもしれない. Zagier の論文 [23, p.114] で引用されているように Cohen の結果 [3, Theorem 6.2] があるので, 重さが半整数の保型形式に関連する何かが得られるかもしれない.

## 7. APPENDIX : CORRIGENDUM

本記事の内容は [18] として出版されているが, この論文にはいくつか誤植や不正確な箇所があるので, 修正箇所を以下の通りまとめておく. ページ番号と行番号は [18] に基づく.

- (1) In line 11, p.95:  $\chi(q^n)^{1/2} = \chi(q)^{n/2}$  は  $\chi(q^n)^{1/2} = \{\chi(q)^{1/2}\}^n$  とし, この値を  $\chi(q)^{n/2}$  とおくべきである (しかしながら, 論文の中で明示的にこの記法を気にする箇所はない). ちなみに p.96 の下から 4 行目に出てくる  $\chi(q^\nu)^{-1/2}$  は  $(\chi(q^\nu)^{1/2})^{-1}$  のことである.

<sup>4</sup>この観点で, 跡公式のテスト関数としては Green 関数と  $T(n)$  に対応する特性関数のどちらを採用しても, 代数的には実質同じである. Green 関数で計算をおこなう利点は一様分布の極限精度が扱いやすい点にある.

- (2) p.95:  $\chi_c$  と  $\chi'_c$  の導入のところで,  $c_1$  の定義が正しくない.  $c_1 := \gcd(c, f_\chi)$  ではなく,  $c_1$  は以下のように定義すべきである:

$$c_1 := \prod_{p|c} p^{\text{ord}_p(f_\chi)}.$$

このとき  $\gcd(c_1, f_\chi/c_1) = 1$  であり,  $\chi$  を  $\chi_c \times \chi'_c$  (ただし  $f_{\chi_c} = c_1$ ,  $f_{\chi'_c} = f_\chi/c_1$ ) と分解することができる. したがってこの後の論文内の議論は修正不要である. 実際  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  と正の約数  $d|m$  に対して

$$c|N, \quad \gcd(c, N/c) | \gcd(N/f_\chi, m/d - d)$$

であれば, このとき  $c_1|f_\chi$  かつ  $N/c = f_\chi/c_1 \times N/(c_2 f_\chi)$  である. ここで  $c_2 := c/c_1$  とした.  $\gcd(c_2, f_\chi) = 1$  であることから  $N/(c_2 f_\chi) \in \mathbb{Z}_{>0}$  もいえる. ゆえに「 $y \equiv d \pmod{c}$  and  $y \equiv m/d \pmod{N/c}$ 」という条件から「 $y \equiv d \pmod{c_1}$  and  $y \equiv m/d \pmod{f_\chi/c_1}$ 」が分かる. したがって, [18, Lemma 7] は修正不要である.

- (3) In line 6, p.97:  $|X| \ll q^{-1-\epsilon}$  という条件でも正しいが<sup>s</sup>,  $|X| < q^{-1/2}$  という条件で十分である.  
 (4) In line 8, p.97:  $h_w(D)$  の定義の分子の 2 倍が欠落している. 正しくは以下の通りである:

$$h_w(D) = \frac{2h_{D_0}}{\#\mathfrak{o}_{D_0}^\times} f \prod_{p|f} \left( 1 - p^{-1} \left( \frac{D_0}{p} \right) \right), \quad (D = D_0 f^2).$$

- (5) In line 10, p.97:  $L(1, (\frac{D_0}{p}))$  は正しくは  $L(1, (\frac{D_0}{p}))$  である.  
 (6) In line 2 from below, p.102: 左辺の  $\langle \mu_\nu^{N, \chi, q}, f \rangle$  には絶対値をつけるべきである.  
 (7) In line 3, p.103:  $\mu_{q^\nu}$  と  $\mu_\nu^{1, 1, q}$  の関係式は  $\mu_{q^\nu} = 2q^\nu \mu_\nu^{1, 1, q} - \frac{1}{12} \delta_{q^\nu, \square} (\delta_1 + \delta_{-1})$  とするべきである.  
 (8) p.103: (4.3) の  $\ll_{l, \epsilon}$  は  $\ll_{S, l, \epsilon}$  とすべきである. ここで無視している定数は  $m$  の素因子  $p$  には依存するが<sup>s</sup>,  $\text{ord}_p(m)$  には依存しないということである.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

講演および本記事の執筆の機会を与えてくださった世話人の宮崎直氏 (北里大学), 青木宏樹氏 (東京理科大学) にはこの場を借りて感謝いたします.

#### REFERENCES

- [1] K. Bringmann, B. Kane, *Sums of class numbers and mixed mock modular forms*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **167** (2019), no. 2, 321–333.
- [2] B. Brown, N. Calkin, T. Flowers, K. James, E. Smith, A. Stout, *Elliptic curves, modular forms, and sums of Hurwitz class numbers*, J. Number Theory **128** (2008), 1847–1863.
- [3] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975) 271–285.
- [4] H. Cohen, *Trace des opérateurs de Hecke sur  $\Gamma_0(N)$* , Séminaire de Théorie des Nombres (1976–1977), Exp. No. 4, 9 pp. CNRS, Talence, 1977.
- [5] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaire N. Bourbaki, (Vol. 1968/69), Exp. No. 355, 139–172 Lecture Notes in Math., 175 Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [6] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974), 273–307.
- [7] M. Eichler, *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale*, Math. Z. **67** (1957), 267–298.
- [8] J. Gierster, *Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*, Math. Ann. **21** (1883), no. 1, 1–50.
- [9] A. Hurwitz, *Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*, Math. Ann. **25** (1885), 157–196.
- [10] A. Knightly, C. Li, *Traces of Hecke operators*, Mathematical Surveys and Monographs, 133. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. x+378 pp.
- [11] L. Kronecker, *Über die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante*, J. Reine Angew. Math. **57** (1860), 248–255.

- [12] T. Miyake, *Modular forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Reprint of the first 1989 English edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+335 pp.
- [13] J. Oesterlé, *Sur la trace des opérateurs de Hecke*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Orsey, 1977.
- [14] R. Schoof, M. van der Vlugt, *Hecke operators and weight distribution of certain codes*, J. Combinatorial Theory, series A, **57** (1991), 163–186.
- [15] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.
- [16] J. P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke  $T_p$* , J. Amer. Math. Soc., **10**, No.1, 75–102, 1997.
- [17] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Func. Anal. **275**, Issue 11, (2018), 2978–3064.
- [18] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *Optimal estimates for an average of Hurwitz class numbers*, Ramanujan J., **52** (2020), no. 1, 91–104.
- [19] D. Zagier, *Nombres de classes et formes modulaires de poids  $3/2$* , C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **281** (1975), no. 21, A883–A886.
- [20] D. Zagier, *Traces des opérateurs de Hecke*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: 1975/76, Théorie des nombres: Fasc. 2, Exp. No. 23, 12 pp. Secrétariat Math., Paris, 1977.
- [21] D. Zagier, *The Eichler-Selberg trace formula on  $SL_2(\mathbb{Z})$* , Appendix to S. Lang, Introduction to Modular Forms, Grundlehren d. math. Wiss. 222, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976), 44–54.
- [22] D. Zagier, *Correction to: "The Eichler-Selberg trace formula on  $SL_2(\mathbb{Z})$ " (Introduction to modular forms, Appendix, pp. 44–54, Springer, Berlin, 1976) by S. Lang*. Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), pp. 171–173. Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977.
- [23] D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), pp. 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977.