（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	服部 真史
論文題目	Minimizing CM degree and specially K-stable varieties (CM次数最小化と特殊K安定多様体について)		

（論文内容の要旨）

まず主論文の背景を述べる．複素微分幾何学と高次元代数幾何学にまたがるK安定（K-stability）の理論は、本来の研究の動機は微分幾何学であったが、代数幾何学のアプローチが発展して純代数幾何学的な応用が見出されてきたという経緯がある．当該分野のこの10数年間の発展は、正に曲がる傾向のあるFano多様体（あるいはそれを含むKahler-Einstein計量の幾何学に相当する場合）に主に集中していた．一方でS.K.Donaldsonの導入した形のK安定性が一般的に対象とするcscK 計量は Constant Scalar Curvature Kahler metric （一定スカラー曲率Kahler計量）の略であり，はるかに広範な代数多様体を対象とする．これに対応するK安定性とcscK計量の存在の同値性の予想はしばしばYau-Tian-Donaldson 予想という．対応する Kahler ポテンシャルの偏微分方程式は，K ¨ahler- Einstein 計量は 2 階の非線形な複素 Monge-Amp`ere 方程式に対応した一方，cscK 計量は 4 階のより複雑な非線形性をもつ.定義により，K ¨ahler-Einstein 計量は cscK 計量であるが， 更に上記の設定ではそれから従う c1(L) と c1(X) = −c1(KX) が比例するという条件のもと， 逆も従う.その比例条件は代数多様体の双有理幾何に根ざした分類論・構造論における三つ の基本的なピースである Fano 多様体，(広義の意味での)Calabi-Yau 多様体，標準モデルの特徴づけも与えることに注意されたい.

その中で，服部氏は，Fano多様体やKahler-Einstein幾何学に限定されない広範なクラスの代数多様体を標的として、K安定性の理論の先駆的な研究をしてきた．Fano多様体の幾何学やKahler-Einstein幾何学の場合には，藤田健人氏とChi Li氏の付値判定法や藤田-尾高のデルタ不変量など，K安定性の有効な判定法が開発されてきたが，その一方で（服部氏が研究を始めた時点において）それらに含まれない一般の代数多様体ではK安定性の判定法の発展はほとんどの場合に見つかっておらず，未開の荒野といって過言ではない状況であった．K安定性理論はモジュライ空間の構成への応用を持つことも2010年以降理解されて発展を遂げてきたが，Kahler-Einstein幾何学の範囲の外にはそうした発展は（80・90年代以降）ほとんどなかった．こうした中で，服部氏は，特にファイバー空間においてK安定性判定法を開発してモジュライ空間への応用ももたらしてきた.

服部真史氏の主論文は特殊K安定性理論の導入とそのCM最小化予想への応用というものである．服部氏は自身で基礎づけをしたJ安定性理論とデルタ不変量の双方を駆使し巧みに組み合わせることで，Fano多様体においてKモジュライの発展を促したFano多様体のK安定性理論の著しい性質を色濃く受け継いだ特殊K安定性（special K-stability)の理論を導入した．これはFano多様体に限らない広範なクラスの代数多様体に対して，K安定性の判定条件を実用的な形で与える著しい理論である．主論文において同氏は当該理論をより整理した形で導入することに成功している．2010年から15年ほど飛躍的な発展を遂げたK安定なFano多様体の場合、より古典的なCalabi-Yau多様体や標準モデルはもちろん、さらには（多くの）Calabi-Yauファイバー空間、極小モデル、といった重要な代数多様体のクラスは全て同氏の特殊K安定性の理論の範疇に

含まれることも証明されている．さらにはKモジュライ空間の分離性の数値的な改良である尾高氏のCM次数最小化予想への，特殊K安定の理論の応用が主論文の主定理として証明されている．CM次数最小化予想は尾高氏とR.Thomas氏の共同研究に端を発して、もとより難解なKモジュライ空間の分離性・ハウスドルフ性の予想を定量化した困難な問題である．服部氏は当該主論文において、このCM最小化予想を大変広範なクラスである特殊K安定性の設定で導かれることを証明した．CM次数最小性予想をK¥"ahler-Einstein幾何学の外において証明した初めての成果であるが，適応範囲の広さは目を見張るものがある．この証明はKモジュライスタックの上のCM線束の次数を、まずはデルタ不変量の分だけ捩れを付けたDing不変量の変形版と、同様の捩れを含めたJ不変量（J安定性の基礎的な不変量）の変形版に技巧的に分解することからスタートする．こちらは特殊K安定性理論の基本となるアイデアである．そして分解されたそれぞれ（非アルキメデス解析幾何学における多重劣調和函数の汎関数と見なすことができる）についての最小化の問題を論じるという形の証明となっている．そうした非アルキメデス汎関数それぞれの最小化への帰着の議論も、それぞれの最小化の証明の技巧も、補佐的に必要な定義の導入を要している．さらには既約でない単純正規交差因子のような可約な代数多様体の安定性も取り扱いに含めるため、それへの通常の体積理論の拡張なども準備していることも特徴的である．Blum-XuによるFano多様体のKモジュライの分離性の証明においては２種類の退化から良いフィルとレーションを構成する技術が使われたが、服部氏の証明はこれを拡張して整理する内容もある．デルタ不変量の分のねじれについては、Ding 次数の差の正値性を，基底型因子を二つの退化族で比較するという点に由来する議論をしている．

また服部氏は続けて一定スカラー曲率Kahler計量（cscK計量）が存在する場合に対しても、より微分幾何側で導入されたGabor Szekelyhidi氏のフィルトレーション安定性の理論と成果を用いることで、CM最小化予想を一般的に証明している．

なお、服部氏は参考論文において曲線上のCalabi-Yauファイバー空間について，一様断熱K安定性と呼ばれる微分幾何学における断熱極限に対応する代数幾何学的概念を検討し，このK安定性と底曲線のK安定性が同値であるという驚くべき成果を証明した．こちらも代数的ファイバー空間の全空間におけるデルタ不変量の振る舞いの連続性といった大変技巧的な問題を部分的に解決することに基づいている．橋詰健太氏との共同研究においてはそうした曲線上のCYファイブレーションのうち一様断熱K安定性なものを集めてKモジュライ理論を構成した．そこでの技巧的な一面としては、全体の豊富線束の体積を固定せずに代数多様体の有界性を示しているという驚くべき点がある．さらにはAline Zanardini氏との線形系のGIT安定性の研究とそれへのK安定性の応用も行った．

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

このように、服部氏は執筆時時点博士２年時の学生であるものの既に多くの成果を挙げている．服部氏の特殊K安定性理論の導入は、近年発達したK安定性の代数幾何学の最先端の内容をふんだんに生かした高度なものである．それは同氏のK安定性についての詳細に踏み込んだ高度な理解に基づく．また、特殊K安定性理論の設定を駆使したCM最小化予想の部分的証明十分に氏のとりわけ高次元代数幾何学を中心とした数学力の高さを示す議論ともなっている．また微分幾何学側の成果の理解も彼の研究に生かされており、そうした側面の理解も感じられる内容の学位論文である．また関連した参考論文においても、多くの共同研究を通して代数幾何学の安定性とモジュライ空間に関連した様々な問題の成果を挙げている．このように服部真史氏は，Fano多様体とは限らないK安定性の代数幾何学において，数多くの質の高い研究成果をあげており，主論文はその最たるものの一つである．

以上の理由によって、本論文は京都大学理学研究科の博士の学位論文として十分な価値があるものと認める。また、2024年3月15日、論文内容とそれに関連した事項について調査委員会で試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　2024　年　　8　月　　16　日以降