高次元ローレンツ系の機械学習モデルの力学系解析

中井 拳吾 *

*岡山大学学術研究院 環境生命自然科学学域

本稿は小林 幹氏 (立正大学経済学部) 、斉木 吉隆氏 (一橋大学経営管理研究科) との共同研究に基づくものである。

1 はじめに

時系列データに対する機械学習手法の一つであるリザーバーコンピューティング [1, 2] が時系列予測に有効であることがわかってきた。我々はこの機械学習手法を用いることで流体変数 [3, 4] や実際の気象データ [5] の時間発展の予想等を成功させている。また 3 次元のローレンツ系の時系列データから構成した機械学習モデルが各種力学系的性質を再現することも明らかにしている [6]。本研究では、実際の現象でしばしば見られる、微小のパラメータ変化で大きな構造変化をもたらす構造不安定な力学系構造の再現性に注目する。このような不安定な構造は一見すると繊細な扱いを必要とする可能性があり機械学習によって学習可能か否かは非自明である。典型的な構造不安定なものとして、異なる不安定次元が共存するような場合の構造不安定な力学系構造 (ヘテロカオス性) の再現性を明らかにする。

2 リザーバーコンピューティング

力学系 $d\phi/dt = \mathbf{f}(\phi)$ の変数 $\mathbf{u} = \mathbf{h}(\phi) \in \mathbb{R}^M$ が観測できるとする。変数 $\mathbf{u}$ の時系列データを用いて、$\mathbf{u}(t)$ を入力したときに $\mathbf{u}(t+\Delta t)$ が出力となるように時間発展モデルをリザーバーコンピューティングにより構築する。この学習手法の特徴の一つはニューラルネットワークの各変数を学習しないことで学習にかかる計算量を減らしている点である。その分ニューラルネットワークの次元を大きくすることで高性能なモデリングを可能にしている。学習したいダイナミクスが決定論的である場合にはリザーバーコンピューティングは有効な学習手法である。学習手法の詳細は [1, 2] などを参考にされたい。

3 モデルの設定と結果

3.1 設定

次で記述される高次元ローレンツ系 [7] を考える：

$$\frac{dx_k}{dt} = x_{k-1}(x_{k+1} - x_{k-2}) - x_k + f, \qquad \text{for } k = 1, \ldots, K, \tag{1}$$

ただし、$x_{-1} = x_{K-1}$、$x_0 = x_K$、$x_1 = x_{K+1}$ とする。f は外力変数とする。本研究では $(K, f) = (8, 6)$ の場合のローレンツ系を考える。このとき高次元ローレンツ系には 1 次元不安定の周期軌道と 2 次元不安定の周期軌道が共存する。

高次元ローレンツ系の時系列データをリザーバーコンピューティングによって学習し時間発展モデルを構成する。入力変数として $\mathbf{u}(t) = (x_1(t), \ldots, x_8(t), x_1(t-\Delta\tau), \ldots, x_8(t-\Delta\tau), x_1(t-2\Delta\tau), \ldots, x_8(t-2\Delta\tau))$ を使用する。ここで $\Delta\tau$ は遅れ時間を意味する。構成した機械学習モデルによる短時間予測結果については図 1 に図示した。正解の高次元ローレンツ系の時系列とよく一致することが確認できる。

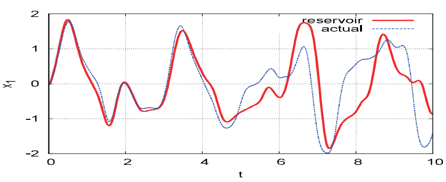

図 1: **時系列データ予測.** 機械学習モデルにより時刻 0 から予測された変数 x_1 の時系列データを赤色の実線で書いた。対応する高次元ローレンツ系の時間発展により得られた変数 x_1 の時系列データを青色の破線で書き出した。

3.2　結果

構成した機械学習モデルのリアプノフ指数を計算した。最大と 2 番目のリアプノフ指数は 1.03 と 0.09 であった。高次元ローレンツ系の最大と 2 番目のリアプノフ指数は 1.02 と 0.10 であり、およそ再現していることがわかった。ただし、機械学習モデルも高次元ローレンツ系も 3 番目のリアプノフ指数はゼロリアプノフ指数である。

次に不安定な周期軌道の再現性みる。図 2 に高次元ローレンツ系の不安定次元が 1 と 2 の周期軌道で周期が一番短いものを描いた。機械学習モデルもこれを精度良く再現している様子が見て取れる。より周期の長いものについても再現することも確認している。

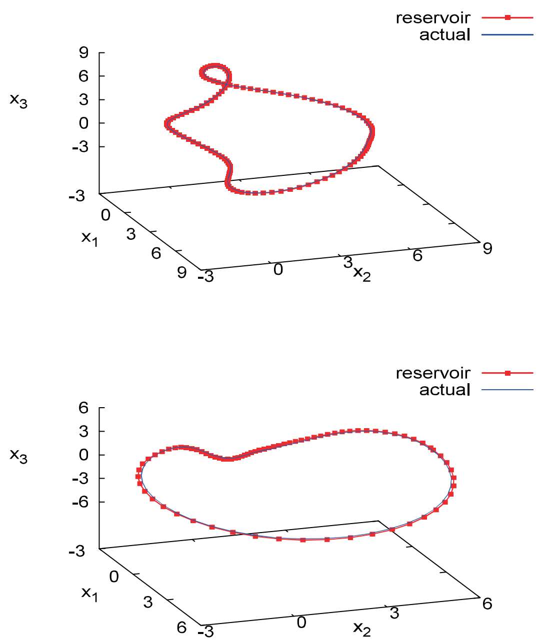

図 2: **周期軌道の再現性.** 高次元ローレンツ系の不安定次元が 1 の短い周期の周期軌道 (上図) と不安定次元が 2 の短い周期の周期軌道 (下図) を青色の実線で書いた。これに対応する構成した機械学習モデルの軌道を赤色の点線で書いた。両者はほとんど重なっていることがわかる。

4　まとめ

微小のパラメータ変化で大きな構造変化をもたらす構造不安定な力学系構造の典型的な構造をもつ高次元ローレンツ系について、その時系列データのみを用いて構成した機械学習モデルの力学系解析を行った。リアプノフ指数や異なる不安定次元の周期軌道も再現することがわかった。これらのことから異なる不安定次元が共存するような力学系構造も学習可能であることがわかる。なお本結果の一部は [8] として出版されている。

5　謝辞

本研究でおこなった計算の一部は京都大学のスーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性奨励枠) に基づく。また、中井は JSPS 科研費 22K17965 の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表す。

参考文献

[1] H. Jaeger, and H. Haas, Scince, 304, (2004), 78-80.

[2] Z. Lu, J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, R. Brockett, and E. Ott, Chaos 27, (2017), 041102.

[3] K. Nakai, and Y. Saiki, Physical Review E 98, (2018), 023111:1-6.

[4] K. Nakai, and Y. Saiki, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, (2021), 14:1079-1092.

[5] T. Suematsu, K. Nakai, T. Yoneda, D. Takasuka, T. Jinno, Y. Saiki, and H. Miura, arXiv:2301.01254 (2023).

[6] M. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki, and N. Tsutsumi, Physical Review E 104, (2021), 044215:1-7.

[7] E. Lorenz, and K. Emanuel. Journal of the Atmospheric Sciences 45, (1998), 399414.

[8] M. Kobayashi, K. Nakai, and Y. Saiki, Journal of Physics: Complexity 5, (2024), 025024.