

モジュラス付きモチーフ理論を用いた Hodge コホモロジーの表現について

宮崎 弘安 *

概要

モチーフ理論の主目的のひとつは数論幾何の種々のコホモロジーを普遍的に捉えることである。Voevodsky による混合モチーフ理論は $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性を満たすコホモロジーをよく制御するが、裏を返せばそうでないコホモロジーの制御は困難である。たとえば構造層係数コホモロジー（より一般に Hodge コホモロジー）は $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変でない。本稿では、混合モチーフ理論から $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性という仮定を外した一般化であるモジュラス付きモチーフ理論について概説する。次に、モジュラス付きモチーフ理論を用いることで、Hodge コホモロジーの実現関手が構成できることを示した Shane Kelly 氏との共同研究の概略について述べ、証明のアイディアを説明する。

1 導入

本稿では Hodge コホモロジーをモチーフ理論で制御することについて述べる。モチーフ理論とは何か、ということについてはさまざまな見方があるが、本稿では「数論幾何に現れる様々なコホモロジーをひとつの枠組みで表現する理論」とみなすこととしたい。モチーフ理論はもともと Grothendieck により提唱され、体上 proper かつ smooth な代数多様体のコホモロジーのうち良い性質を持つもの（Weil コホモロジー）については、対応するモチーフ理論（純モチーフ理論）が Grothendieck 自身により構築された。

より一般の代数多様体に対するモチーフ理論の存在も予想されているが、決定版と呼べるものは未だ構成されていない。しかし、体上 smooth な代数多様体のモチーフ理論（混合モチーフ理論）が、花村, Levine, Voevodsky により独立に構成されている。より正確には、彼らは次のような関手を構成した：

$$\mathcal{M}(-) : \mathbf{Sm}_k \longrightarrow (\text{triangulated cat. of mixed motives} / k).$$

*NTT コミュニケーション科学基礎研究所 メディア情報研究部 基礎数学研究センタ
E-mail address: hiroyasu.miyazaki@ntt.com

ここで $\mathbf{Sm}_k$ は k 上の smooth な代数多様体の圏を表し、右辺は混合モチーフの三角圏を表す（なお、花村、Levine、Voevodsky による混合モチーフの圏の構成はそれぞれ異なるものの、互いに圏同値であることが知られている）。Betti コホモロジー、de Rham コホモロジー、 ℓ -進エタールコホモロジーといった数論幾何の重要なコホモロジーのいくつかは、上記の関手を通して混合モチーフの圏を経由することが知られており、またコホモロジーの基本的性質（Künneth 公式、Mayer-Vietoris 系列、射影束公式、blow-up 公式、Poincaré 双対性）は、混合モチーフの圏のレベルで証明することができる。このことから、混合モチーフ理論は smooth な代数多様体のモチーフ理論として受け入れられ、各所で広く応用されている。

一方、混合モチーフ理論では制御できないコホモロジーも多数存在する。実際、上記の関手 $\mathcal{M}(-)$ は $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性 という性質を満たす。すなわち、任意の $X \in \mathbf{Sm}_k$ に対し、射影 $X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$ は同型 $\mathcal{M}(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X)$ を引き起こす（ここで $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}_k^1$ はアフィン直線を表す）。 $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性は非常に強力で有用な性質ではあるが、これは裏を返せば $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性を満たさないコホモロジーは関手 $\mathcal{M}(-)$ を経由せず、したがって混合モチーフ理論では制御できないことを意味する。

例えば、代数幾何を勉強し始めてすぐに会う構造層 $\mathcal{O}$ のコホモロジー $H^*(-, \mathcal{O})$ は、もちろん $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変ではない。実際、

$$H^0(\mathbb{A}_k^1, \mathcal{O}) = k[t] \neq k = H^0(\mathrm{Spec} k, \mathcal{O}).$$

同様に、Kähler 微分層 Ω も $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変ではない。また本稿では扱わないが、各種 p -進コホモロジーも $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性を満たさない。

こうした混合モチーフ理論の弱点を補い克服するための理論として、筆者は Kahn-齋藤-山崎らとともに モジュラス付きモチーフ理論 を構築した。本稿では、モジュラス付きモチーフ理論を用いることで Hodge コホモロジー $H^*(-, \Omega^n)$ を制御できることを述べ、構造層のコホモロジーの場合（すなわち $n = 0$ の場合）に証明のアイディアを説明する。本稿に述べられていない詳細については [6], [7] を参照されたい。

謝辞

「代数的整数論とその周辺 2022」での講演の機会と、本稿の執筆の機会を与えていただいたプログラム委員の皆様へ感謝いたします。また、本研究は JSPS 科研費 (21K13783) の助成を受けて実施されました。

記号

以下, 体 k を固定する. $\mathbf{Sch} = \mathbf{Sch}_k$ で k 上有限型かつ分離的なスキームの圏を表す. また $\mathbf{Sm} = \mathbf{Sm}_k$ で k 上有限型かつ分離的で smooth なスキームの圏を表す.

2 モジュラス付きモチーフ理論の概略

この節では, 主定理を主張するために最低限必要な, モジュラス付きモチーフ理論の定義や事実をまとめる.

2.1 Voevodsky の混合モチーフの圏

はじめに Voevodsky の流儀に沿って混合モチーフの圏の構成を復習する. 混合モチーフの圏の構成には下記の 3 つの材料が必要である.

- (1) 有限対応の圏 $\mathbf{Cor}$
- (2) Nisnevich 位相
- (3) $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性

Definition 2.1 (有限対応). 任意の $X, Y \in \mathbf{Sm}$ に対し, X から Y への基本有限対応 (elementary correspondence) とは, $X \times Y$ の整な閉部分スキーム $V \subset X \times Y$ であって, 合成 $V \rightarrow X \times Y \rightarrow X$ が X のある連結成分への有限全射を引き起こすもののことである. また, X から Y への有限対応とは, X から Y への基本有限対応の整数係数形式有限和のことである.

Example 2.2. 圏 $\mathbf{Sm}$ における射 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとし, $X = \sqcup_i X_i$ を連結成分への分解とする. $f_i: X_i \rightarrow X \rightarrow Y$ を f の X_i への制限とし, $\Gamma_i \subset X_i \times Y$ を f_i のグラフとする. この時, 各 i に対し Γ_i は X から Y への基本有限対応であり, $\Gamma_f := \sum_i \Gamma_i$ は X から Y への有限対応である.

Definition 2.3 (有限対応の圏). k 上の有限対応の圏 $\mathbf{Cor} = \mathbf{Cor}_k$ を以下で定義する. 対象は $\mathbf{Sm}$ と同じものとする. 任意の $X, Y \in \mathbf{Cor}$ に対し, 射集合 $\mathbf{Cor}(X, Y)$ は次で定義される:

$$\mathbf{Cor}(X, Y) := \{X \text{ から } Y \text{ への有限対応}\}.$$

射の合成は下記で定義する: $X, Y, Z \in \mathbf{Cor}$ とし, $V \in \mathbf{Cor}(X, Y)$, $W \in \mathbf{Cor}(Y, Z)$ を基本有限対応とする. $p_{XY}: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$ を自然な射

影とする (p_{YZ}, p_{XZ} も同様に定義する). この時, 合成 $W \circ V \in \mathbf{Cor}(X, Z)$ は下記の式で与えられる:

$$W \circ V := (p_{XZ})_*(p_{XY}^*V \cap p_{YZ}^*W).$$

ここで $(-)_*$, $(-)^*$, $\cap$ はそれぞれ, 代数的サイクルの押し出し, 引き戻し, 交叉積を表す. 一般の有限対応の合成は, 上記の構成を線形に拡張して定義する. 詳細は [8, Part I, Lecture 1] 等を参照.

Remark 2.4. 自然な関手 $\mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{Cor}$ が存在する. この関手は $X \in \mathbf{Sm}$ を $X \in \mathbf{Cor}$ に写し, 任意の射 $f \in \mathbf{Sm}(X, Y)$ をグラフ $\Gamma_f \in \mathbf{Cor}(X, Y)$ に写す (Γ_f の構成は Example 2.2 を参照).

Definition 2.5 (Nisnevich 位相). スキーム X の **Nisnevich 被覆** (Nisnevich covering) とは, エタール被覆 $\{f_i: U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ であって, 下記の性質を満たすもの: 任意の $x \in X$ に対し, ある $i \in I$ と $u \in f_i^{-1}(x) \subset U_i$ が存在して, 剰余体の間に f が誘導する射 $k(x) \rightarrow k(y)$ が同型である. Nisnevich 被覆が $\mathbf{Sm}$ 上に生成する位相を Nisnevich 位相と呼ぶ.

Remark 2.6. Nisnevich 位相は, Zariski 位相とエタール位相の中間の位相である. Nisnevich 位相の定義にはいくつか同値なものが存在し, 特に elementary Nisnevich square を用いた定義は技術的に重要である. しかし本稿では紙幅の都合から最も単純な上記の定義を用いる.

Definition 2.7. 有限対応の圏上のアーベル群に値を持つ加法的な前層 $F: \mathbf{Cor}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ のなす圏を **PST** と書く. 圏 **PST** の対象を移送射付き前層 (presheaf with transfers) と呼ぶ.¹ 移送射付き前層 F に対し, 合成関手

$$\mathbf{Sm}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Cor}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}$$

が Nisnevich 位相について層である時, F を移送射付き **Nisnevich 層** (Nisnevich sheaf with transfers) と呼ぶ. 移送射付き Nisnevich 層からなる **PST** の充満部分圏を **NST** で表す.

移送射付き Nisnevich 層の定義は, グラフ関手 $\mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{Cor}$ を経由して行われているため, 以下の定理は自明でない (位相の一般論からは従わない). 証明は [8, Theorem 13.1] を参照.

Theorem 2.8 (層化関手の存在). 包含関手 $\mathbf{NST} \subset \mathbf{PST}$ は完全な左随伴を持つ. したがって **NST** は *Grothendieck* アーベル圏である. 特に **NST** は十分な入射対象を持つ.

¹ここで $\mathbf{Ab}$ はアーベル群の圏を表す. F が加法的 (additive) とは, 任意の $X, Y \in \mathbf{Sm}$ に対して $F(X \sqcup Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$ が成り立つことを言う.

上記の事実により, 導来圏の理論を扱うことができる. $D(\mathbf{NST})$ を $\mathbf{NST}$ の導来圏とする. 一般に, 三角圏 $\mathcal{T}$ の対象のクラス S が与えられた時, S を含み直和因子と無限直和で閉じる最小の $\mathcal{T}$ の部分三角圏 (localizing subcategory) を $\langle S \rangle$ で表す. またそれによる Verdier 商を $\mathcal{T} / \langle S \rangle$ または $\frac{\mathcal{T}}{\langle S \rangle}$ で表す.

Definition 2.9 (混合モチーフの圏). 体 k 上の混合モチーフの圏 $\mathbf{DM}^{\text{eff}} = \mathbf{DM}_k^{\text{eff}}$ を以下で定義する:

$$\mathbf{DM}^{\text{eff}} := \frac{D(\mathbf{NST})}{\langle \text{pr}_1 : X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X; X \in \mathbf{Cor} \rangle}.$$

またモチーフ関手 $\mathcal{M}(-) : \mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}$ を以下の合成として定義する:

$$\mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{Cor} \xrightarrow{\text{米田埋込}} \mathbf{PST} \xrightarrow{\text{層化}} \mathbf{NST} \rightarrow D(\mathbf{NST}) \rightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}.$$

任意の $X \in \mathbf{Sm}$ に対し, $\mathcal{M}(X)$ を X のモチーフという.

このように, 混合モチーフの圏の定義そのものは比較的単純であるが, 驚くべきことにこのような単純な定義から, モチーフ $\mathcal{M}(X)$ のさまざまな性質が導かれる. 特に重要なのは下記の2つの性質である:

- (1) ($\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性) $\mathcal{M}(X \times \mathbb{A}^1) \cong \mathcal{M}(X)$
- (2) (Mayer-Vietoris 系列) $X = U \cup V$ が開被覆²ならば次の distinguished 三角形が存在する

$$\mathcal{M}(U \cap V) \rightarrow \mathcal{M}(U) \oplus \mathcal{M}(V) \rightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{+1}.$$

これら2つの性質は, 上記の $\mathbf{DM}^{\text{eff}}$ の定義から (ほぼ) ただちに従うが, これら2つの性質を縦横無尽に駆使することにより, モチーフのさまざまな深い性質が導かれる. 詳細は [1], [2], [3] 等を参照.

2.2 モジュラス付きモチーフの圏

モジュラス付きモチーフの圏は, Voevodsky の混合モチーフの圏をある意味でアップデートした理論である [1], [2], [3]. ここではその骨子を述べる. Voevodsky の混合モチーフの圏の構成に用いた材料を, それぞれアップデートするというのが基本的な方針である:

²より一般に, 基本 Nisnevich 被覆 $U \sqcup V \rightarrow X$ に対し同様の三角形が存在する. 基本 Nisnevich 被覆については [10] などを参照.

- (1) Smooth スキーム $\rightarrow$ モジュラスペア
- (2) 有限対応の圏 $\mathbf{Cor} \rightarrow$ モジュラス付き有限対応の圏 $\mathbf{MCor}$
- (3) Nisnevich 位相 $\rightarrow$ モジュラス付き Nisnevich 位相
- (4) $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変性 $\rightarrow (\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変性

以下, 前節同様, 体 k を固定する.

Definition 2.10 (モジュラスペア). 体 k 上のモジュラスペアとは下記を満たす組 $\mathcal{X} = (X, D_X)$ のことである:

- (1) $X \in \mathbf{Sch}$.
- (2) $D_X \subset X$ は X 上の有効カルティエ因子である.
- (3) $\mathcal{X}^\circ := X \setminus D_X$ は $\mathbf{Sm}$ に属する ($\mathcal{X}^\circ$ を $\mathcal{X}$ の内部と呼ぶ).

Definition 2.11 (モジュラス付き有限対応). 任意の k -上のモジュラスペア $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に対し, $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ へのモジュラス付き基本有限対応 (**modulus elementary correspondence**) とは, $\mathcal{X}^\circ$ から $\mathcal{Y}^\circ$ への基本有限対応 $V \subset \mathcal{X}^\circ \times \mathcal{Y}^\circ$ であって次の性質を満たすものをいう: $\bar{V} \subset X \times Y$ を V の $X \times Y$ における閉包とし, $\bar{V}^N \rightarrow \bar{V}$ をその正規化とする. 合成 $p_X: \bar{V}^N \rightarrow \bar{V} \rightarrow X \times Y \rightarrow X$ を考える ($p_Y: \bar{V}^N \rightarrow Y$ も同様に定義する). この時, p_X は proper であり, 因子の不等式 $p_X^* D_X \geq p_Y^* D_Y$ が成り立つ. $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ へのモジュラス付き有限対応 (**modulus correspondence**) とは, $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ へのモジュラス付き基本有限対応の整数係数形式有限和のことである.

Remark 2.12. 任意のモジュラスペア $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ に対し, 定義から $\mathbf{MCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathbf{Cor}(\mathcal{X}^\circ, \mathcal{Y}^\circ)$ 等が成り立つことがわかる. また有限対応の合成

$$\mathbf{Cor}(\mathcal{X}^\circ, \mathcal{Y}^\circ) \times \mathbf{Cor}(\mathcal{Y}^\circ, \mathcal{Z}^\circ) \rightarrow \mathbf{Cor}(\mathcal{X}^\circ, \mathcal{Z}^\circ)$$

は, モジュラス付き有限対応の合成

$$\mathbf{MCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \times \mathbf{MCor}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \rightarrow \mathbf{MCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$$

を誘導する [1, §1.2].

Definition 2.13 (モジュラス付き有限対応の圏). k 上のモジュラス付き有限対応の圏 $\mathbf{MCor} = \mathbf{MCor}_k$ を, 対象は (k 上の) モジュラスペア, 射はモジュラス付き有限対応として定義する.

Definition 2.14 (モジュラス付き移送射付き前層). モジュラス付き有限対応の圏上のアーベル群に値を持つ加法的な前層のなす圏を $\underline{\mathbf{MPST}}$ と書く. 圏 $\underline{\mathbf{MPST}}$ の対象をモジュラス付き移送射付き前層 (modulus presheaf with transfers) と呼ぶ.

層の概念を定義するため以下の記法を導入する: $F \in \underline{\mathbf{MPST}}$, $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}$ とする. この時, X 上のエタールサイト $X_{\text{ét}}$ 上の前層 $F_{\mathcal{X}}$ を

$$(f : U \xrightarrow{\text{エタール射}} X) \mapsto F(U, f^* D_X) \quad (2.15)$$

で定義する.

Definition 2.16 (モジュラス付き移送射付き層). モジュラス付き移送射付き前層 F がモジュラス付き移送射付き Nisnevich 層であるとは, 任意の $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}$ に対し $F_{\mathcal{X}}$ が ($X_{\text{ét}}$ 上の) Nisnevich 位相について層であることである. モジュラス付き移送射付き Nisnevich 層からなる $\underline{\mathbf{MPST}}$ の充満部分圏を $\underline{\mathbf{MNST}}$ と書く.

Remark 2.17. 上記の層の定義はかなり ad hoc である. 実は, $\mathbf{Sm}$ の拡張にあたる「モジュラスペアの圏」 $\underline{\mathbf{MSm}}$ を定義することができ, またその上に「モジュラス付き Nisnevich 位相」を定めることができる [1],[9]. この設定のもとでは Definition 2.7 と同様の方法で層の概念を定めることができ, それは Definition 2.16 の定義と同値になることが証明できる.

Theorem 2.8 と同様, 下記の定理も非自明であり, 証明には幾何学的な議論が用いられる.

Theorem 2.18 (層化関手の存在 [1], [2]). 包含関手 $\underline{\mathbf{MNST}} \subset \underline{\mathbf{MPST}}$ の完全な左随伴関手が存在する. したがって $\underline{\mathbf{MNST}}$ は Grothendieck アーベル圏である. 特に $\underline{\mathbf{MNST}}$ は十分な入射対象を持つ.

モジュラス付きモチーフの圏の構成には, もう一つだけ準備が必要である.

Definition 2.19. モジュラスペア $\mathcal{X} = (X, D_X), \mathcal{Y} = (Y, D_Y)$ のテンソル積 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ を下記で定義する:

$$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} := (X \times Y, D_X \times Y + X \times D_Y).$$

Remark 2.20. 圏 $\underline{\mathbf{MCor}}$ には圏論的な積³ $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ も存在するが, 普遍性から誘導される射 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ は一般に同型でない. この事実がモジュラス付きモチーフ理論を繊細なものにしている.

³Remark 2.17 で言及した圏 $\underline{\mathbf{MSm}}$ には, より一般に, 射 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ と $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ のファイバー積 $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ も存在する (ただし, $\mathcal{X}^{\circ} \times_{\mathcal{Z}^{\circ}} \mathcal{Y}^{\circ} \in \mathbf{Sm}$ は仮定する). さらに一般に $\mathbf{Sch}$ の拡張として圏 $\underline{\mathbf{MSch}}$ を定義することもでき, そこでは任意の有限極限が存在することが確かめられる [5].

Definition 2.21 (モジュラス付きモチーフの圏). 体 k 上のモジュラス付きモチーフの圏 $\underline{\mathbf{MDM}}^{\text{eff}} = \underline{\mathbf{MDM}}_k^{\text{eff}}$ を以下で定義する:

$$\underline{\mathbf{MDM}}^{\text{eff}} := \frac{D(\underline{\mathbf{MNST}})}{\langle \text{pr}_1 : \mathcal{X} \otimes (\mathbb{P}^1, \infty) \rightarrow \mathcal{X}; \mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}} \rangle}.$$

またモチーフ関手 $\mathcal{M}(-) : \underline{\mathbf{MCor}} \rightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}$ を以下の合成として定義する:

$$\underline{\mathbf{MCor}} \xrightarrow{\text{米田埋込}} \underline{\mathbf{MPST}} \xrightarrow{\text{層化}} \underline{\mathbf{MNST}} \rightarrow D(\underline{\mathbf{MNST}}) \rightarrow \underline{\mathbf{MDM}}^{\text{eff}}.$$

任意の $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}$ に対し, $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ のモチーフという.

混合モチーフの場合と同様に, (ほぼ) 構成から下記の2つの性質が従う.

- (1) $((\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変性) $\mathcal{M}(\mathcal{X} \otimes (\mathbb{P}^1, \infty)) \cong \mathcal{M}(\mathcal{X})$
- (2) (Mayer-Vietoris 系列) $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}$ とする. $X = U \sqcup V$ が開被覆⁴ならば次の distinguished 三角が存在する

$$\mathcal{M}(U \cap V, D_{U \cap V}) \rightarrow \mathcal{M}(U, D_U) \oplus \mathcal{M}(V, D_V) \rightarrow \mathcal{M}(X, D_X) \xrightarrow{+1}.$$

ここで, $\star = U \cap V, U, V$ に対し, $D_\star := D_X \cap \star$ と定義する.

2.3 動機付け: 相互層の理論

ここでは $(\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変性に注目する理由を手短に述べたい.

Definition 2.22. 前層 $F \in \underline{\mathbf{MPST}}$ が $(\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変であるとは, 任意の $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}$ に対し $\text{pr}_1^* : F(\mathcal{X}) \rightarrow F(\mathcal{X} \otimes (\mathbb{P}^1, \infty))$ が同型であることである.

Nisnevich 層 $F \in \underline{\mathbf{MNST}}$ に対し, 以下の構成で得られる $F' \in \mathbf{NST}$ を考える: 任意の $U \in \mathbf{Sm}$ に対し, コンパクト化 $U \subset X$ であって, ある有効カルティエ因子 $D_X \subset X$ が存在し $|D_X| = X \setminus U$ が成り立つものをとる. この時

$$F'(U) := \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} F(X, nD_X).$$

ここで移行射は, $\text{Id}_{X \setminus |D_X|}$ が定める $\underline{\mathbf{MCor}}$ の射 $(X, (n+1)D_X) \rightarrow (X, nD_X)$ が誘導する制限写像である. この構成で $F'(U)$ がコンパクト化や因子の取り方によらないこと, 及び F' が層になることが証明できる [1], [2].

⁴混合モチーフの場合と同様に, より一般に基本 Nisnevich 被覆 $U \sqcup V \rightarrow X$ に対して同様の三角形が存在する.

層 F が $(\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変である時、上記の構成から得られる F' は相互層と呼ばれる⁵。相互層は以下の全てを例として含む層のクラスであり、 $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変層の広範な一般化となっている。

- (1) $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変層,
- (2) k 上局所有限型 smooth 可換群スキーム (e.g. 加法群 $\mathbb{G}_a$, Witt 環 W_n),
- (3) 微分形式の層 (Hodge 層) Ω^n , Hodge-Witt 層 $W_m\Omega^n$.

上記の説明では陽に現れていないものの、Voevodsky の混合モチーフ理論においては $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変層とそのコホモロジーの解析が技術的な核となっている。本稿の冒頭で述べたように、 $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変という性質を緩めることによってより広いコホモロジーを捉えられるようにすることがモジュラス付きモチーフ理論の目標であるが、そのためには $\mathbb{A}^1$ -ホモトピー不変層の理論を相互層の理論に置き換えればよさそうに思える。しかし、相互層はそのままでは技術的に取り扱いが難しいという問題を持つ。そこで一旦モジュラスペアのレベルで理論を展開し、 $(\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変層の理論を経由して相互層を捉える方が筋が良い、というのが本理論の基本的なアイディアである。

3 モジュラス付き Hodge コホモロジー

本節では Hodge コホモロジー $H^i(-, \Omega^n)$ がモジュラス付きモチーフの圏で表現できることを述べる。§2.3 で述べたように、 Ω^n は相互層の一種であるから、なんらかの $(\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変層 $F \in \mathbf{MNST}$ が存在して、 $F' = \Omega^n$ と表せるはずである⁶。以下ではまず F の具体的な構成を与える。以下、 k は標数 0 の体とする。

3.1 モジュラス付き Hodge 層

以下では次の非常に素性の良いモジュラスペアのみに注目する。

Definition 3.1. モジュラスペア $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \mathbf{MCor}$ が **log smooth** であるとは、 X が k 上 smooth かつ D_X の台 $|D_X|$ が単純正規交叉因子であることをいう。Log smooth なモジュラスペアからなる $\mathbf{MCor}$ の充満部分圏を $\mathbf{MCor}^{ls}$ と書く。

⁵相互層の定義には同値なものがいくつかある。詳細は [4] 参照。

⁶ただし、そのような F の取り方は一意でない。

体 k の仮定から、任意のモジュラスペア $\mathcal{X} = (X, D_X)$ に対し、特異点解消 $p: X' \rightarrow X$ であって $\mathcal{X}^0 = X \setminus |D_X|$ 上同型であり、かつ $p^{-1}(|D_X|) = |p^*D_X|$ が単純正規交叉因子であるものが存在する。したがって次の事実が成り立つ：

Lemma 3.2. 包含関手 $\underline{\mathbf{MCor}}^{ls} \subset \underline{\mathbf{MCor}}$ は圏同値である。

上記の補題から、 $\underline{\mathbf{MPST}}$ の対象を定義するためには、 $\underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ 上の（加法的）前層を定義すれば良いことがわかる。この観察に基づき、次の定義を考える。

Definition 3.3. 任意の log smooth モジュラスペア $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ と自然数 n に対し、アーベル群 $\Omega^n(\mathcal{X})$ を以下で定義する：

$$\Omega^n(\mathcal{X}) = \Omega^n(X, D_X) := \Gamma(X, \Omega_X^n(\log |D_X|) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_X - |D_X|)).$$

ここで $\Omega_X^n(\log |D_X|)$ は $|D_X|$ に沿った対数的極を許す微分形式の層を表す。

Remark 3.4. $D_X = \emptyset$ の場合、

$$\Omega^n(X, \emptyset) = \Gamma(X, \Omega^n).$$

$D_X = |D_X|$ （すなわち、 D_X が被約）の場合、

$$\Omega^n(X, D_X) = \Gamma(X, \Omega_X^n(\log D_X)).$$

次の事実は重要だが、証明は紙幅の都合で割愛する。

Proposition 3.5. 圏 $\underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ での任意の射 $\alpha: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ に対し、下記の図式を可換にする点線の写像が一意的に存在する：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\exists!} & \Omega^n(\mathcal{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^n(\mathcal{Y}^0) & \longrightarrow & \Omega^n(\mathcal{X}^0). \end{array}$$

ここで、縦の2つの射は自然な包含写像（特に単射）であり、下の水平の射は Ω^n の $\mathbf{PST}$ としての構造から誘導される（ $\mathcal{X}^0, \mathcal{Y}^0 \in \mathbf{Sm}$ に注意）。

Proposition 3.5 から $\Omega^n \in \underline{\mathbf{MPST}}$ が定まる。また層であること、すなわち $\Omega^n \in \underline{\mathbf{MNST}}$ が容易に確かめられる。さらに、任意の $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ に対し、 $\Omega_{\mathcal{X}}^n$ は局所自由準連接 $\mathcal{O}_X$ -加群の構造を（エタール層として）持つことが証明できる⁷。特に以下の同型が成立する：

$$H_{\mathrm{Zar}}^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n) \cong H_{\mathrm{Nis}}^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n) \cong H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n).$$

⁷ $\Omega_{\mathcal{X}}^n$ の定義は (2.15) を参照。

以下、 $\Omega_{\mathcal{X}}^n$ のコホモロジーは位相を明示せず、単に $H^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n)$ で表す（これをモジュラス付き Hodge コホモロジーと呼ぶ）。モジュラス付き Hodge コホモロジーはある意味で Hodge コホモロジーのフィルトレーションを与えるものとみなすことができる：

Proposition 3.6. 任意の $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ に対し、次の自然な射は同型である（ただし $U := X \setminus |D_X|$ と置く）：

$$\varinjlim_{n \geq 1} H^i(X, \Omega_{(X, nD_X)}) \xrightarrow{\sim} H^i(U, \Omega_U).$$

3.2 主定理の主張

以上の準備のもとに本稿の主定理の主張を述べる。

Theorem 3.7. 任意の $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \in \mathbb{Z}$ に対し、次の標準的な同型が存在する：

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}}(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \Omega^n[i]) \cong H^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n).$$

ここで $\Omega^n[i] \in D(\underline{\mathbf{MNST}})$ は、自然な関手 $D(\underline{\mathbf{MNST}}) \rightarrow \underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}$ を通して $\underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}$ の対象とみなしている。

$D_X = \emptyset$, $D_X = |D_X|$ ととることで、直ちに以下の系を得る。

Corollary 3.8. 任意の $X \in \mathbf{Sm}$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \in \mathbb{Z}$ に対し、次の標準的な同型が存在する：

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}}(\mathcal{M}(X, \emptyset), \Omega^n[i]) \cong H^i(X, \Omega_X^n).$$

また、 $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ であって $D_X = |D_X|$ であるものに対し、

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}}(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \Omega^n[i]) \cong H^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n(\log D_X)).$$

Corollary 3.8 は、モジュラス付きモチーフの圏 $\underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}$ において Hodge コホモロジーおよび対数的 Hodge コホモロジーが表現可能であることを意味する。Theorem 3.7 は、さらに Hodge コホモロジーの「フィルトレーション」も $\underline{\mathbf{MDM}}^{\mathrm{eff}}$ で表現できることを意味する（cf. Proposition 3.6）。

3.3 証明の概略

Theorem 3.7 は、比較的形式的な議論により、下記の 2 つの主張に帰着される：

Theorem 3.9 (コホモロジーの $(\mathbb{P}^1, \infty)$ -不変性). 任意の $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ に対し,

$$H^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n) \cong H^i(X \times \mathbb{P}^1, \Omega_{\mathcal{X} \otimes (\mathbb{P}^1, \infty)}^n).$$

Theorem 3.10 (コホモロジーのブローアップ不変性). 任意の $\mathcal{X} = (X, D_X)$, $\mathcal{X}' = (X', D_{X'}) \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ と, *proper* な全射 $p : X' \rightarrow X$ であって $U := X \setminus |D_X| \subset X$ 上同型であり, かつ $D_{X'} = p^*D_X$ を満たすものに対し,

$$H^i(X, \Omega_{\mathcal{X}}^n) \cong H^i(X', \Omega_{\mathcal{X}'}^n).$$

Remark 3.11. Theorem 3.9, 3.10 は, Theorem 3.7 が成り立つための必要条件であることに注意されたい. 実際, Theorem 3.9 は Theorem 3.7 と $\mathcal{M}(\mathcal{X}) \cong \mathcal{M}(\mathcal{X} \otimes (\mathbb{P}^1, \infty))$ からただちに従う. また Theorem 3.9 は Theorem 3.7 と同型 $\mathcal{M}(p) : \mathcal{M}(\mathcal{X}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{X})$ から従う⁸.

3.3.1 Theorem 3.9 の証明の概略

まず, 一般に次が成り立つ:

Lemma 3.12. 任意の $\mathcal{X} = (X, D_X) \in \underline{\mathbf{MCor}}$, $F \in \underline{\mathbf{MNST}}$ を固定し, $F_{\mathcal{X}}$ が X 上の準連接層であると仮定する. さらに, 任意のアフィン開部分スキーム $U = \text{Spec } A \subset X$ であって $U \cap D_X = \text{Spec}(A/fA)$ ($f \in A^\times$) が主カルティエ因子であるものに対し, 次の系列が完全であると仮定する⁹:

$$0 \rightarrow F(A, f) \rightarrow F(A[t], f) \oplus F(A[\frac{1}{t}], f/t) \rightarrow F(A[t, \frac{1}{t}], f) \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

この時, 上で固定した $\mathcal{X}$ と任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し

$$H^i(X, F_{\mathcal{X}}) \cong H^i(X \times \mathbb{P}^1, F_{\mathcal{X} \otimes (\mathbb{P}^1, \infty)}).$$

上記の補題は比較的簡単なホモロジー代数から導かれる. 完全列 (3.13) が $F = \Omega^n$ かつ $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}^{ls}$ の場合に満たされることは, 具体的に $\Omega_{\mathcal{X}}^n$ を基底表示することにより確かめることができる. したがって Theorem 3.9 は Lemma 3.12 から従う.

⁸ 仮定より射 p は同型 $\Gamma_p : (\mathcal{X}')^\circ \cong \mathcal{X}^\circ$ を引き起こす. この同型の逆射 $(\Gamma_p)^{-1}$ が $\underline{\mathbf{MCor}}$ の射 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ を引き起こすことを定義から容易に確かめられる. 特に $p : \mathcal{M}(\mathcal{X}') \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{X})$ は同型である.

⁹ ここで, $F(\text{Spec } A, \text{Spec}(A/fA))$ を $F(A, f)$ のように略記する. また t は不定元を表す

3.3.2 Theorem 3.10 の証明の概略

簡単のため $n = 0$, すなわち $\Omega^0 = \mathcal{O}$ の場合を扱う. 局所的な議論により, $X = \mathbb{A}^r = \operatorname{Spec} k[t_1, \dots, t_r]$, $D_X = \{t_1^{r_1} \cdots t_i^{r_i} = 0\}$, $p: Y \rightarrow \mathbb{A}^r$ が原点でのブローアップである場合に帰着できる. $\mathcal{Y} := (Y, D_Y)$, $D_Y := p^*D_X$ と置く. 同型 $Rp_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ を示せば良い. ブローアップ p の例外因子を E とする時, $p^*|D_X| = |D_Y| + (i-1)E$ が成り立つことから

$$p^*\mathcal{O}(D_X - |D_X|) = \mathcal{O}(p^*D_X - p^*|D_X|) = \mathcal{O}(D_Y - |D_Y|) \otimes \mathcal{O}((1-i)E).$$

よって, $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(-1)$ に注意すれば

$$p^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{O}(i-1).$$

両辺に $\otimes \mathcal{O}(1-i)$ と Rp_* を施し, 局所自由層の射影公式を用いれば

$$Rp_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = Rp_*(p^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{O}(1-i)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes Rp_*\mathcal{O}(1-i).$$

よって, 主張は $R^q p_*\mathcal{O}(1-i) = 0$ ($\forall q > 0$) に帰着される. この高次順像の消滅は, $1-i \geq 1-r > -r-1$ であることと, 射影空間のコホモロジーの具体的な計算を用いることで証明することができる.

一般の $n \geq 0$ に対する証明はもう少し複雑であるが, 上記の高次順像の消滅に帰着させるという基本的な方針は同じである.

- [1] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, and T. Yamazaki. Motives with modulus, I: Modulus sheaves with transfers for non-proper modulus pairs. *Épjournal de Géométrie Algébrique*, Volume 5, Jan 2021.
- [2] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, and T. Yamazaki. Motives with modulus, II: Modulus sheaves with transfers for proper modulus pairs. *Épjournal de Géométrie Algébrique*, Volume 5, Jan 2021.
- [3] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, and T. Yamazaki. Motives with modulus, III: The categories of motives. *Ann. K-Theory*, 7(1):119–178, 2022.
- [4] B. Kahn, S. Saito, and T. Yamazaki. Reciprocity sheaves, II. *Homology, Homotopy and Applications*, 24(1):71–91, 2022.
- [5] S. Kelly and H. Miyazaki. Modulus sheaves with transfers. preprint, 2021.

- [6] S. Kelly and H. Miyazaki. Hodge cohomology with a ramification filtration, I. in preparation.
- [7] S. Kelly and H. Miyazaki. Hodge cohomology with a ramification filtration, II. in preparation.
- [8] C. Mazza, V. Voevodsky, and C. Weibel. *Lecture Notes on Motivic Cohomology*, volume 2 of *Clay Mathematics Monographs*. 2006.
- [9] H. Miyazaki. Nisnevich topology with modulus. *Ann. K-Theory*, 5(3):581–604, 2020.
- [10] V. Voevodsky. Unstable motivic homotopy categories in nisnevich and cdh-topologies. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 214(8):1399–1406, 2010.