

# フルヴィッツ型多重ゼータ値の正規化と川島関係式

金子昌信 (Masanobu KANEKO)

九州大学数理学研究院 (Faculty of Mathematics, Kyushu University)

序. 2022 年 12 月の京大数理研での講演では, 多重ゼータ値の「正規化」について, 初めて聞く人も念頭に置きながらかなり時間をかけて復習し, その後, その理論をフルヴィッツ型の多重ゼータ値に拡張することで, 「川島関係式」として知られる大きな関係式族の, ある種自然な証明が得られることを説明した. 正規化については 2018 年の整数論サマースクールの報告集 [3] において (日本語で) 割に詳しく解説をしているので, 初めて勉強するという方はそちらを参照願うとして, ここでは徐策, 山本修司両氏との共同研究である, フルヴィッツ型の多重ゼータ値への一般化の話 [4] についてのみ解説する. パラメーターを特殊化すれば元の多重ゼータ値に戻る話ではあるので, そういう意味では全く省略してしまうわけでもないということでご容赦願いたい.

まず定義は省略せずに書くとして, 多重ゼータ値 (Multiple Zeta Value) とは, 与えられた自然数の組 (インデックスと呼ぶ)  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して以下のような多重級数で定まる実数のことであった.

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}.$$

もう一つ, 和をわたる自然数  $m_i$  の不等号に等号も入れた, 等号付き多重ゼータ値, あるいは多重ゼータスター値

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 \leq \dots \leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \tag{1}$$

も川島関係式について述べるところで頻繁に現れる. これらの多重級数はインデックスの最後の成分  $k_r$  が 1 だと発散し  $k_r > 1$  であれば収束する. 多重ゼータ値の正規化というのは,  $k_r = 1$  の場合にも何らかの意味で有限の値を取り出す手続きのことであり, 複数のやり方がある. そのうちの標準的な二つの間に関係をつけることで, 多重ゼータ値の間の関係式を導く, というのが [2] における一つのテーマであった. その話をフルヴィッツ型の多重ゼータ値に対して展開することで, 新たな知見を得ようというのが論文 [4] で行ったことで, 講演の後半にお話したことである.

**フルヴィッツ型多重ゼータ値の正規化.** 自然数  $k_1, \dots, k_r$ , ただし  $k_r > 1$ , およびパラメータ  $x$  に対し (本稿では常に,  $x$  は  $|x| < 1$  なる実数であるとする), フルヴィッツ型多重ゼータ値を

$$\zeta^{(x)}(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{(m_1 + x)^{k_1} \dots (m_r + x)^{k_r}}$$

で定める.  $x = 0$  とすると元の多重ゼータ値になる.  $k_r = 1$  であればやはりこれは発散するが, その発散の様子を次の二通りの有限近似によって記述する. すなわち, インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  に対し,

$$\zeta_N^{(x)}(\mathbf{k}) = \zeta_N^{(x)}(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r < N} \frac{1}{(m_1 + x)^{k_1} \dots (m_r + x)^{k_r}}$$

および

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{(x)}(t) = \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}^{(x)}(t) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{t^{m_r + x}}{(m_1 + x)^{k_1} \dots (m_r + x)^{k_r}}$$

を導入する. ここに  $N$  は一つの自然数,  $t$  は  $0 < t < 1$  であるような変数である. これらの量はインデックスが何であれ有限の値を持つが,  $k_r = 1$  のとき,  $N \rightarrow \infty$  および  $t \rightarrow 1$  とすると共に発散する. この発散の度合いが, それぞれ  $\log N - \psi(1+x)$ ,  $-\log(1-t)$  の多項式によって記述されるというのが次の命題である.

**命題 1.** 各インデックス  $\mathbf{k}$  に対し, 以下の漸近式で一意的に特徴づけられるような  $\mathbb{R}[T]$  の多項式  $Z_*^{(x)}(\mathbf{k}; T)$  および  $P^{(x)}(\mathbf{k}; T)$  が存在する:

$$\begin{aligned} \zeta_N^{(x)}(\mathbf{k}) &= Z_*^{(x)}(\mathbf{k}; \log N - \psi(1+x)) + o(1) \quad (N \rightarrow \infty), \\ \text{Li}_{\mathbf{k}}^{(x)}(t) &= P^{(x)}(\mathbf{k}; -\log(1-t)) + o(1) \quad (t \rightarrow 1). \end{aligned}$$

ここに  $\psi(1+x)$  はダイガンマ関数  $\Gamma'(1+x)/\Gamma(1+x)$  である.

$o(1)$  の部分はもう少し正確に記述でき, それが必要になることもあるが, ここでは省略する.

**注 2.**  $x = 0$  のときこれらはそれぞれ級数, 積分を用いて得られる, [4] で調べた本来の多重ゼータ値の「正規化多項式」に等しくなる. それらは調和積, シャッフル積という代数構造を使っても定義されるが,  $P^{(x)}$  については,  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{(x)}(t)$  が一般にはシャッフル積を満たさないため, 代数的な扱いが出来ないと思われる. それで,  $Z_{\text{III}}^{(x)}$  と書きたいところであるが,  $P^{(x)}$  という記号を用いている.

多項式  $Z_*^{(x)}(\mathbf{k}; T)$  の存在については,  $x = 0$  の場合同様, 代数的に示すことが出来る. というのは,  $\zeta_N^{(x)}(\mathbf{k})$  が  $\zeta_N^{(x)}(\mathbf{k})\zeta_N^{(x)}(\mathbf{l}) = \zeta_N^{(x)}(\mathbf{k} * \mathbf{l})$  という調和積の規則に従うからである ( $\mathbf{k} * \mathbf{l}$

は定義級数の積から自然に導かれるインデックスの形式和で、「調和積」または「stuffle 積」と呼ばれるものであるが、詳細な定義は例えば [5] に譲る。また記号  $\zeta_N^{(x)}$  を、インデックスの形式和にも線形に拡張して使っている。すなわち  $\zeta_N^{(x)}(\mathbf{k})$  を、収束インデックス  $\mathbf{l}$  たちによる  $\zeta_N^{(x)}(\mathbf{l})$  の  $\mathbb{Q}$  線形結合を係数とする、 $\zeta_N^{(x)}(1)$  の多項式として書く。そして、 $\zeta_N^{(x)}(1)$  を  $T$  で、また係数の  $\zeta_N^{(x)}(1)$  を  $\zeta^{(x)}(1)$  で置き換えることで ( $\mathbf{l}$  が収束インデックスなのでそれは意味を持つ) 多項式  $Z_*^{(x)}(\mathbf{k}; T)$  が得られる。そして、 $\zeta_N^{(x)}(1)$  の漸近式

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+x} = \log N - \psi(1+x) + O(N^{-1}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

より、命題の  $\zeta_N^{(x)}(\mathbf{k})$  の漸近式が得られる。この  $\zeta_N^{(x)}(1)$  の漸近式は、よく知られた

$$\psi(1+x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \quad (\gamma: \text{オイラー定数})$$

および

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + O(N^{-1}), \quad \sum_{n=N}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = O(N^{-1}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

より得られる。

先に注意したように、 $P^{(x)}(\mathbf{k}; T)$  についてはこのような簡単な代数的手続きでは得られないと思われる。代わりに、 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^{(x)}(t)$  の次のような積分表示を用いる：

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\mathbf{k}}^{(x)}(t) = \int_{0 < u_1 < \dots < u_k < t} & \frac{u_1^x du_1}{1-u_1} \underbrace{\frac{du_2}{u_2} \dots \frac{du_{k_1}}{u_{k_1}}}_{k_1-1} \frac{du_{k_1+1}}{1-u_{k_1+1}} \underbrace{\frac{du_{k_1+2}}{u_{k_1+2}} \dots \frac{du_{k_1+k_2}}{u_{k_1+k_2}}}_{k_2-1} \dots \\ & \dots \frac{du_{k-k_r}}{u_{k-k_r}} \frac{du_{k-k_r+1}}{1-u_{k-k_r+1}} \underbrace{\frac{du_{k-k_r+2}}{u_{k-k_r+2}} \dots \frac{du_k}{u_k}}_{k_r-1}. \end{aligned}$$

ここで  $k = k_1 + \dots + k_r$  である。具体的に多項式  $P^{(x)}(\mathbf{k}; T)$  は、母関数を用いて書くと次のように与えられる。インデックスの成分がすべて 1 のものについては

$$\sum_{m=0}^{\infty} P^{(x)}(\underbrace{1, \dots, 1}_m; T) y^m = \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1+y)}{\Gamma(1+x+y)} \cdot e^{Ty}, \quad (2)$$

そうでないものは

$$\sum_{m=0}^{\infty} P^{(x)}(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T) y^m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \zeta^{(x)}(\mathbf{k} \otimes \underbrace{(1, \dots, 1)^\star}_{m+1}) y^m \cdot \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1+y)}{\Gamma(1+x+y)} \cdot e^{Ty}. \quad (3)$$

ここで  $\mathbf{k}$  は任意の空でないインデックスを表し、 $\mathbf{k}_+$  はその最後の成分に 1 を加えたものを表す。従って  $\mathbf{k}_+$  は必ず収束インデックスとなり、上式の左辺は、右に 1 が並ぶ個数に

よって母関数を作っている．右辺の  $\mathbf{k} \circledast \underbrace{(1, \dots, 1)}_{m+1}^*$  はあるインデックスの形式和であるが，正確な定義はあとの川島関数を定義するところで述べる．ひとまず， $\zeta^{(x)}(\mathbf{k} \circledast \underbrace{(1, \dots, 1)}_{m+1}^*)$  は級数により

$$\zeta^{(x)}(\mathbf{k} \circledast \underbrace{(1, \dots, 1)}_{m+1}^*) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r = l_{m+1} \geq \dots \geq l_1 > 0} \frac{1}{(n_1 + x)^{k_1} \dots (n_r + x)^{k_r} (l_1 + x) \dots (l_{m+1} + x)}$$

として与えられる量で，この和を通常の  $\zeta^{(x)}(\mathbf{m})$  の一次結合で書くようなインデックスの形式和が  $\mathbf{k} \circledast \underbrace{(1, \dots, 1)}_{m+1}^*$  であるとう理解頂きたい．

(2) や (3) の証明は結構込み入っていて，一言で言えば積分を上手に計算するということなのだが，論文 [4] を参照頂くということにしたい．「山本積分」のダイアグラム表示を使ってある程度見通しよく計算出来るのであるが，それにしても，見事なカラクリだなと感じ入ってしまう計算である．

また，命題 1 の多項式の一意性については， $\log N - \psi(1+x)$  (resp.  $-\log(1-t)$ ) の多項式で  $N \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow 1$ ) のとき 0 になるものは恒等的に 0 でなければならないことから，ほぼ自明であることを注意しておく．

さて，「正規化の基本定理」がこれらの多項式に対して拡張される．まず， $\mathbb{R}[T]$  から自身への  $\mathbb{R}$  線形写像  $\rho$  を形式的べき級数環  $\mathbb{R}[T][[y]]$  における等式

$$\rho(e^{Ty}) = \Gamma_0(y)e^{Ty}$$

によって定める．ここに，

$$\Gamma_0(y) = e^{\gamma y} \Gamma(1+y) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) y^n\right) \in \mathbb{R}[[y]]$$

であり， $\rho$  は係数ごとに作用しているものとする．この  $\rho$  は，もとの [2] における  $\rho$  と同じものである．このとき，[4] の主定理の一つとして次を示した．

**定理 3.** 各インデックス  $\mathbf{k}$  に対し，等式

$$P^{(x)}(\mathbf{k}; T) = \rho(Z_*^{(x)}(\mathbf{k}; T - \gamma - \psi(1+x)))$$

が成り立つ．

$x = 0$  のときが，[2] における定理である ( $\psi(1) = -\gamma$ ) ．

この関係式は，(2) や (3) に対応する調和正規化の方の母関数

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} Z_*^{(x)}(\underbrace{1, \dots, 1}_m; T) y^m &= \frac{\Gamma(1+x)e^{\psi(1+x)y}}{\Gamma(1+x+y)} \cdot e^{Ty}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} Z_*^{(x)}(\mathbf{k}_+, \underbrace{1, \dots, 1}_m; T) y^m &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \zeta^{(x)}(\mathbf{k} \circledast \underbrace{(1, \dots, 1)}_{m+1}^*) y^m \cdot \frac{\Gamma(1+x)e^{\psi(1+x)y}}{\Gamma(1+x+y)} \cdot e^{Ty} \end{aligned}$$

を計算し（この計算は代数的に遂行される），この  $T$  を  $T - \gamma - \psi(1+x)$  に置き換え  $\rho$  を施せば (2) や (3) になることを見れば得られる．

この定理を使いながら，「川島関数」を正規化多項式で書き表すことにより，川島関係式に新しい光を当てようというのが次の目標である．

**正規化多項式と川島関数の関係，川島関係式．** 空でない各インデックス  $\mathbf{k}$  に対して，「川島関数」  $F(\mathbf{k}; x)$  を，  $|x| < 1$  で収束するべき級数

$$F(\mathbf{k}; x) := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \otimes (\mathbf{k}^\vee)^*) x^m \quad (4)$$

で定義する．ここで  $\mathbf{k}^\vee$  は  $\mathbf{k}$  のホフマン双対と呼ばれるもので，インデックスの各成分を  $1+1+\dots+1$  と書いて，‘+’ と ‘,’ を入れ替えることで得られるインデックスである．また，空でないインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  および  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$  に対し  $\mathbf{k} \otimes \mathbf{l}$  は調和積で出てくる項のうち，最後の成分が  $k_r + l_s$  となるものだけを取り出したもの，つまり形式和として書くと

$$\mathbf{k} \otimes \mathbf{l} = ((k_1, \dots, k_{r-1}) * (l_1, \dots, l_{s-1}), k_r + l_s)$$

で定義されるものである．また  $\mathbf{l}^*$  は，  $(l_1 \square \dots \square l_s)$  の  $\square$  を ‘+’ または ‘,’ で置き換えて得られる  $2^{s-1}$  個のインデックスの形式和である．そうして  $\zeta$  をインデックスの形式和に対しても線形に拡張して使っている．

もともと  $F(\mathbf{k}; x)$  は川島学 [6] がニュートン級数を用いて定義したもので，その  $x=0$  におけるテイラー展開が (4) で与えられることを彼は証明した．  $\mathbf{k} = (1)$  の場合，  $\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \otimes (\mathbf{k}^\vee)^* = \underbrace{(1, \dots, 1, 2)}_{m-1}$  であり，双対性  $\zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_{m-1}, 2) = \zeta(m+1)$  と  $\psi(1+x)$  のよく知られたテイラー展開より，  $F(1; x) = \psi(1+x) + \gamma$  であることが分かる．すなわち川島関数はダイガンマ関数の一つの拡張になっている．

論文 [4] の二つ目の主定理は，この川島関数を正規化多項式で書き表すものである．

**定理 4.** 空でない各インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対し，

$$F(\mathbf{k}; x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} Z_*^*(k_1, \dots, k_j; T) Z_*^{(x)}(k_r, \dots, k_{j+1}; T - \gamma - \psi(1+x))$$

が成り立つ．

ここに  $Z_*^*(\mathbf{k}; T)$  は，多重ゼータスター値 (1) に対する調和積正規化多項式であり，  $\zeta^*(\mathbf{k})$  を  $\zeta(\mathbf{l})$  の和として書くのと全く同じ一次結合として，  $Z_*(\mathbf{l}; T) = Z_*^{(0)}(\mathbf{l}; T)$  により書かれるものである（詳しくは [5] を参照）．

$\zeta^*(\mathbf{k})$  が満たす「調和積」を  $\bar{*}$  で書くとする. すなわち  $\zeta^*(\mathbf{k})\zeta^*(\mathbf{l}) = \zeta^*(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l})$  が成り立つようなインデックスの一次結合である (これも詳しくは [5] を参照). すると,  $Z_*^*$  が  $\bar{*}$  積を,  $Z_*^{(x)}$  が  $*$  積を満たすことから, インデックスの  $\mathbb{Q}$  線形形式和に調和積  $\bar{*}$  を入れた可換代数  $\mathcal{R}_*$  に入るホップ代数の構造 ([1] 参照) から来るスタンダードな議論で,  $F(\mathbf{k}; x)$  がまた  $\bar{*}$  積に従うことが分かる. すなわち (例によって  $F(-; x)$  をインデックスの形式和に線形に拡張する)

$$F(\mathbf{k}; x)F(\mathbf{l}; x) = F(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}; x)$$

が成り立つ. この両辺の展開を比べることにより, 「川島関係式」が得られる.

**系 5.** 空でないインデックス  $\mathbf{k}$  および  $\mathbf{l}$  に対し, 等式

$$\sum_{\substack{p+q=m \\ p, q \geq 1}} \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_p \otimes (\mathbf{k}^\vee)^*) \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_q \otimes (\mathbf{l}^\vee)^*) = -\zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \otimes ((\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l})^\vee)^*)$$

がすべての自然数  $m \geq 1$  について成り立つ.

定理 4 の証明の鍵となるのが, 川島関数に一つパラメータ  $t$  ( $0 < t < 1$ ) を入れた, 次の関数  $F(\mathbf{k}; x; t)$  である:

$$F(\mathbf{k}; x; t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \hat{\zeta}(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m; \mathbf{k}^\vee; 1-t) x^m.$$

ここに, インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  と  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$  に対し

$$\hat{\zeta}(\mathbf{k}; \mathbf{l}; t) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r = n_s \geq \dots \geq n_1 > 0} \frac{t^{n_1}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r} n_1^{l_1} \dots n_s^{l_s}} \quad (5)$$

である.  $t = 1$  のとき  $\hat{\zeta}(\mathbf{k}; \mathbf{l}; 1) = \zeta(\mathbf{k} \otimes \mathbf{l}^*)$  であって, この量は山本修司さんとの共著論文 [5] で証明した「積分-級数等式」に現れる級数である. 注意すべきなのは, 定義 (5) の右辺に現れる  $t$  のべきは (外側の)  $n_s$  ではなく  $n_1$  であることである. この級数は, コロナ禍直前の一年間, 特別研究学生として九大にいた徐策君が導入した. そのとき彼が書いた原稿を, 申し訳ないことに長いこと読まずに放っていて, コロナになって少し時間が出来たときに本腰を入れて読んでみると, 色々と面白いものがそこにあることに気付かされ, 例によって山本さんの知恵も大いに借りながら, 短期間で論文 [4] へと結実していった. コロナがプラスに働いた例と言えるかも知れない.

さて, この  $\hat{\zeta}(\mathbf{k}; \mathbf{l}; t)$  が満たす微分公式などを援用しながら, 次を導くことが出来る.

**命題 6.** インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対し,

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{(x)}(t) + (-1)^r F(k_r, \dots, k_1; x; t) = \sum_{j=0}^r (-1)^j F(k_j, \dots, k_1; x) \mathrm{Li}_{k_{j+1}, \dots, k_r}(t)$$

が成り立つ.

これが言えると、 $t \rightarrow 1$  のときの漸近挙動を見ることで

$$P^{(x)}(\mathbf{k}; T) = \sum_{j=0}^r (-1)^j F(k_j, \dots, k_1; x) Z_{\text{III}}(k_{j+1}, \dots, k_r; T)$$

が得られ、この両辺に  $\rho^{-1}$  を施し定理 3 を用いれば、

$$Z_*^{(x)}(\mathbf{k}; T - \gamma - \psi(x+1)) = \sum_{j=0}^r (-1)^j F(k_j, \dots, k_1; x) Z_*(k_{j+1}, \dots, k_r; T) \quad (6)$$

を得る。これから定理 4 を導くのは（そして逆に定理からこの式を導くのも）ホップ代数  $\mathcal{R}_*$  における “antipode relation” を用いればよい。

定理 4 の右辺は  $T$  の値によらないので、 $T = 0$  や  $T = \gamma + \psi(1+x)$  と置くことにより、

$$F(k_1, \dots, k_r; x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \zeta_*^*(k_1, \dots, k_j) Z_*^{(x)}(k_r, \dots, k_{j+1}; -\gamma - \psi(1+x))$$

や

$$F(k_1, \dots, k_r; x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} Z_*^*(k_1, \dots, k_j; \gamma + \psi(1+x)) \zeta_*^{(x)}(k_r, \dots, k_{j+1}),$$

あるいは (6) より

$$\zeta_*^{(x)}(\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^r (-1)^j F(k_j, \dots, k_1; x) Z_*(k_{j+1}, \dots, k_r; \gamma + \psi(x+1))$$

を得る。とくにすべての  $k_i$  が 1 より大きいとき、正規化は不要で、

$$\zeta^{(x)}(k_1, \dots, k_r) = \sum_{j=0}^r (-1)^j F(k_j, \dots, k_1; x) \zeta(k_{j+1}, \dots, k_r),$$

または同値な式

$$F(k_1, \dots, k_r; x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \zeta^*(k_1, \dots, k_j) \zeta^{(x)}(k_r, \dots, k_{j+1})$$

を得る。

個人的には、川島関数やこのフルヴィッツ型多重ゼータ値  $\zeta^{(x)}(\mathbf{k})$  については、まだ十分に理解しきれてないような気がして、これからも面白い展開があり得るのではないかと期待している。

## 参考文献

- [1] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod  $p$  multiple harmonic sums, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.
- [2] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.
- [3] 金子昌信, 多重ゼータ値導入, 第26回整数論サマースクール「多重ゼータ値」報告集 (2019), <http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/tasaka/ss2018/index.html>
- [4] M. Kaneko, C. Xu, and S. Yamamoto, A generalized regularization theorem and Kawashima’s relation for multiple zeta values, Journal of Algebra, **580**, (2021), 247–263.
- [5] M. Kaneko and S. Yamamoto, *A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations*, Selecta Mathematica, **24** (2018), 2499–2521.
- [6] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, J. Number Theory, **129** (2009), 755–788.