

Coleman-Mazur 固有値曲線上の p 進 L 関数の構成

By

CHAN-HO KIM, 中村 健太郎*

§ 1. はじめに

Coleman-Mazur 固有値曲線とは, p で通常な (p での Atkin-Lehner U_p 作用素の固有値が p 進単数である) p 進 Hecke 固有形式をパラメトライズする肥田族の一般化であり, p で有限スロープを持つ (U_p 作用素の固有値がゼロでない) 過収束 Hecke 固有形式をパラメトライズするリジッド解析的曲線である. p で有限スロープを持つ (通常の正則) Hecke 固有形式 f たちに対応する点の集合は固有値曲線の中で Zariski 稠密であることが知られており, そのような f たちに対しては, f の (様々な指標による捻りの) L 関数の臨界的な整数点での特殊値を p 進補間する p 進 L 関数の存在が知られている ([MS74], [Man73], [Vi], [AM75], [MTT86]).

本稿の主題は, これらの p 進 L 関数の固有値曲線上への拡張についてである ([KN]). このテーマについては既に多くの先行研究があり, 出版されているものでは, 肥田族への拡張については [Ki94], [GS93], [Oc03], 固有値曲線上への拡張については [Em06], [Pa03], [Bel12] などがある. [Em06] はモジュラー曲線の完備コホモロジーの $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ が局所解析的に作用する部分空間に, 解析的 Jacquet 加群の理論を適用する表現論的な構成であり, [Bel12] は過収束モジュラーシンボル ([PS11]) を用いた Betti コホモロジー的な構成である. これに対して我々 [KN] の構成は, 肥田族の場合の [Oc03] の手法と同様に, 固有値曲線上の Galois 表現のゼータ元 ([Na23] の応用例) に Perrin-Riou 写像 ($\equiv$ 三角 (φ, Γ) 加群に対する局所イプシロン予想 [Na17]) を適用する Galois(エタール) コホモロジー的な構成である. この構成による利点は様々な点があるが, 特に, ゼータ元と直接結び付く構成なので, 固有値曲線上の岩澤主予想への応用を考えることができる, という点が最も大きな利点であると筆者は考えている.

本稿では, まず第 2 章で保型形式 f に対する p 進 L 関数について詳しく復習する. 続く第 3 章では, まずは固有値曲線の性質を復習した後, 固有値曲線上のゼータ元と p 進 L 関数についての主定理を述べる. 最後の第 4 章で, Perrin-Riou 写像の構成に必要な (φ, Γ)

Received July 27, 2021. Revised November 10, 2021.

Key Words: p 進 L 関数, ゼータ元, (φ, Γ) 加群

Supported by KAKENHI 22K03231

*Saga University, 1 Honjo-Machi, Saga, 840-8502, Japan.

e-mail: nkentaro@cc.saga-u.ac.jp

加群の基礎を復習し、最後にゼータ元と Perrin-Riou 写像を用いた固有値曲線上の p 進 L 関数の定義を与える。

以下、本稿を通じて、体 F に対して、 F の絶対 Galois 群を $G_F := \text{Gal}(\overline{F}/F)$ と表すとする。可換環 R , R 加群 M に対して R 線形双対を $M^\vee = \text{Hom}_R(M, R)$ と表す。

§ 2. 保型形式に付随する p 進 L 関数

以下、保型形式に付随する p 進 L 関数や p 進 Galois 表現を考えるために、体の同型 $\iota: \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。各自然数 $n \geq 1$ に対して $\zeta_n := \iota(\exp(\frac{2\pi i}{n})) \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ と表す。自然数 $k \geq 2$, N に対して、重さ k , レベル N , neben 指標 $\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ のカスプ新形式の空間を $S_k^{\text{new}}(\Gamma_1(N), \chi)$ と表す。 $f = f(\tau) = q + \sum_{n \geq 2} a_n q^n \in S_k^{\text{new}}(\Gamma_1(N))$ ($\tau \in \mathbb{C}, \text{Im}(\tau) > 0$, $q = e^{2\pi i \tau}$) を正規化された Hecke 固有カスプ新形式とする。 $\bar{f} = \bar{f}(\tau) = q + \sum_{n \geq 2} \bar{a}_n q^n \in S_k^{\text{new}}(\Gamma_1(N), \chi)$ を f の複素共役とする。上で固定した体の同型 $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_p$ を用いて複素数 $\{a_n, \bar{a}_n\}_{n \geq 2}$ を $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元ともみなす。 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 $L \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ を $\{a_n, \bar{a}_n\}_{n \geq 2}$ を含むものとする。 $\rho_f: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(L)$ を f に付随する Galois 表現 ([Sh68], [De71]) とする。以下、 ρ_f の表現空間 (2 次元 L ベクトル空間) も同じ記号 ρ_f で表す。 f の複素共役 $\bar{f}$ についても同様に、付随する Galois 表現を $\rho_{\bar{f}}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(L)$ と表す。 ρ_f の双対を $\rho_f^\vee := \text{Hom}_L(\rho_f, L)$ と表し、Tate 双対を $\rho_f^\vee := \rho_f^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$ と表す。

Galois 表現 $\rho_f, \rho_{\bar{f}}$ はモジュラー曲線のエタールコホモロジーの一部として構成されるため、自然にモチーフの構造 (Betti 構造, de Rham 構造, 比較定理) を持つ。特に、代数体 $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap L$ を $\{a_n, \bar{a}_n\}_{n \geq 2}$ を含むものとする、モジュラー曲線の (係数付き) Betti コホモロジーと Betti-エタールの比較定理から複素共役 $c \in G_{\mathbb{Q}}$ の作用で保たれる F 格子 $\rho_{f,F} \subseteq \rho_f, \rho_{\bar{f},F} \subseteq \rho_{\bar{f}}$ が定まる。 $S(\bar{f})_F = F\bar{f}$ を F 上 $\bar{f}$ で生成される保型形式たちのなす F 部分空間とする。Eichler-志村同型により定まる F 線形な単射

$$\text{per}_{\bar{f}}: S(\bar{f})_F \rightarrow \rho_{\bar{f},F} \otimes_F \mathbb{C}$$

がある。Betti コホモロジーの Poincare 双対定理により誘導される F 線形な同型

$$\rho_{\bar{f},F} \xrightarrow{\sim} \rho_{f,F}^\vee(1-k) := \rho_{f,F}^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi i)^{k-1}} \mathbb{Z}$$

から、次の $\mathbb{C}$ 線形な同型

$$\rho_{\bar{f},F} \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \rho_{f,F}^\vee(1-k) \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \rho_{f,F}^\vee \otimes_F \mathbb{C}$$

が得られる (ここで、後者の同型は

$$\rho_{f,F}^\vee(1-k) \otimes_F \mathbb{C} \rightarrow \rho_{f,F}^\vee \otimes_F \mathbb{C}: (x \otimes \frac{1}{(2\pi i)^{k-1}}) \otimes y \mapsto x \otimes \frac{y}{(2\pi i)^{k-1}}$$

で定まるものとする)。この同型で両辺を同一視し、以下、この同型と $\text{per}_{\bar{f}}$ との合成で得られる写像も同じ記号で

$$\text{per}_{\bar{f}}: S(\bar{f})_F \rightarrow \rho_{f,F}^\vee \otimes_F \mathbb{C}$$

と表す. (Eichler-志村同型より) c が ± 1 で作用する部分空間 $\rho_{f,F}^{c=\pm 1}$ はそれぞれ 1 次元 F ベクトル空間となる.

定義 2.1. $\rho_{f,F}^{c=\pm 1}$ の基底 $\gamma^\pm$ をそれぞれ取り, その双対基底を $(\gamma^\pm)^\vee \in (\rho_{f,F}^\vee)^{c=\pm 1}$ と表す. $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- \in \rho_{f,F}$ とおき, $\Omega_{f,\gamma} = (\Omega_{f,\gamma}^\pm) \in (\mathbb{C}^\times)^2$ を次の等式

$$\text{per}_{\overline{f}}(\overline{f}) = \Omega_{f,\gamma}^+(\gamma^+)^\vee + \Omega_{f,\gamma}^-(\gamma^-)^\vee$$

で定める.

$\gamma_1^\pm = a_\pm \gamma^\pm$ ($a_\pm \in F^\times$) とすると, $(\gamma_1^\pm)^\vee = a_\pm^{-1}(\gamma^\pm)^\vee$ であるから, $\gamma_1 = \gamma_1^+ + \gamma_1^-$ に対して $\Omega_{f,\gamma_1}^\pm = a_\pm \Omega_{f,\gamma}^\pm$ となる.

注意 2.2. 技術的な注意であるが, 通常は $\rho_{f,F}^\vee$ ではなく, 元々の $\rho_{\overline{f},F}$ の基底 $\gamma_0 = \gamma_0^+ + \gamma_0^-$ を用いて周期 $\Omega_{\gamma_0}^\pm$ を定義している文献が多い (例えば, [Ka04] Theorem 16.2 参照). 上の同型 $\rho_{\overline{f},F} \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \rho_{f,F}^\vee \otimes_F \mathbb{C}$ の定義より, 我々の周期 $\Omega_{f,\gamma}^\pm$ はこれらの周期を $(2\pi i)^{1-k}$ 倍したものになっている.

導手 $M \geq 1$ の Dirichlet 指標 $\eta: (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して, $L(f, \eta, s)$ を, 冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta(n)a_n}{n^s} \quad (\text{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1)$$

を $\mathbb{C}$ 全体へ解析接続して得られる正則関数とする. $L(f, \eta, s)$ たちの p 進的な対応物を考えるためには, 特殊値の代数性に関する次の結果が基本となる ([Man73], [Sh76]).

定理 2.3. 任意の Dirichlet 指標 $\eta: (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ および任意の自然数 $1 \leq r \leq k-1$ に対して, $\pm 1 = (-1)^r \eta(-1)$ となるように $\pm$ を選ぶと

$$\frac{L(f, \eta, r)}{(2\pi i)^r \Omega_{f,\gamma}^\pm} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ.

これらの代数的な特殊値を p 進的に補間する p 進的に良い関数があるかどうか, ということが f に付随する p 進 L 関数の構成における基本的な問題になる. このようなよい関数の存在は, 現在までに次のタイプの特別な f に対してのみ知られている.

定義 2.4. f に付随する $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現を π_f とおく. π_f の p 成分 $\pi_{f,p}$ が $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の超カスプ表現でないとき, f は非 p -超カスプ (non p -supercuspidal) であるという.

注意 2.5. ラングランズ対応の素点 p における局所大域整合性 ([Sc90], [Sa97]) などにより, f が非 p -超カスプであることは

$$D_{\text{crys}}(\rho_f) := (\mathbf{B}_{\text{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_f)^{G_{\mathbb{Q}_p}} \neq 0$$

であることと同値であり, これはさらに, $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が $\mathbb{Q}_p$ のあるアーベル拡大上で準安定表現になることとも同値である. よって特に, $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が p -通常の場合や, $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ がクリスタリン表現となる (つまり $p \nmid N$ となる) 場合などを含んでいる.

非 p -超カスプな f に対して $D_{\text{crys}}(\rho_f) \neq 0$ なので (必要なら L を十分大きく取り直すことで)

$$D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha} \neq 0$$

となる $\alpha \in L^\times$ が取れる. 以下, このような f と α の組 (f, α) で

$$\dim_L(D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha}) = 1$$

を満たすものを考える (これは常に成り立つと予想されている). Hodge-Tate 重みが $\{0, -(k-1)\}$ の潜在的準安定表現 $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ に付随する Frobenius 加群 $D_{\text{pst}}(\rho_f)$ の弱許容性 (weakly admissibility) より, 不等式

$$0 \leq \text{ord}_p(\alpha) \leq k-1$$

が成り立っていることに注意 (ここで, $\text{ord}_p: \overline{\mathbb{Q}_p}^\times \rightarrow \mathbb{Q}$ は $\text{ord}_p(p) = 1$ となる付値とする).

定義 2.6. 不等式 $\text{ord}_p(\alpha) < k-1$ が成り立つとき, 組 (f, α) は非臨界的スロープ (non-critical slope) をもつという.

$\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ とおく. p 進円分指標を

$$\chi_p: \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$$

と表し, 以下これによって Γ と $\mathbb{Z}_p^\times$ を同一視する. $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して $\sigma_a := (\chi_p)^{-1}(a) \in \Gamma$ と表す. この同一視と冒頭で固定した同型 $\iota: \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ を用いて, 導手が p べきの Dirichlet 指標 $\eta: (\mathbb{Z}/p^n)^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ から導かれる指標 $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\text{can}} (\mathbb{Z}/p^n)^\times \xrightarrow{\eta} \mathbb{C}^\times$ や $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ などと同じ記号 η で表す. η の導手を $n(\eta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表す. $n(\eta) \geq 1$ のとき, η の Gauss 和 $G(\eta) \in \mathbb{C}^\times$ を

$$G(\eta) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^{n(\eta)}\mathbb{Z})^\times} \eta(a) \exp(-2\pi i a/p^{n(\eta)})$$

で定め, ι によってこれを $\overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ の元ともみなす. Γ の岩澤代数を $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ と表し, Λ の Jacobson 根基を $\mathfrak{m}_\Lambda$ と表す. Λ に付随する $\mathfrak{m}_\Lambda$ 進形式スキームを $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p[[\Gamma]])$ と表し, これに付随する (Tate の意味での) リジッド解析的空間 (Berthelot's generic fiber) を $\mathcal{W} := \text{Spf}(\mathbb{Z}_p[[\Gamma]])^{\text{an}}$ と表す. $\mathcal{W}$ の大域切断 $\Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}})$ を $\mathcal{R}^+(\Gamma)$ と表す. 自然な連続準同型 $\Gamma \rightarrow \Lambda^\times: \gamma \mapsto [\gamma]$ を $\chi_{\text{univ}}: \Gamma \rightarrow \Lambda^\times$ と表し, これと自然な連続環準同型 $\Lambda \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}) = \mathcal{R}^+(\Gamma)$ との合成で得られる連続準同型も同じ記号

$$\chi_{\text{univ}}: \Gamma \rightarrow \mathcal{R}^+(\Gamma)^\times$$

で表す. $\mathcal{W}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 有理点の集合を $\mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ と表す. χ_{univ} を $\mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ の各点に制限する写像 $x \mapsto x^*(\chi_{\text{univ}})$ によって全単射

$$\mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\text{-alg}}^{\text{cont}}(\Lambda, \overline{\mathbb{Q}}_p) = \{\chi : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \mid \text{連続準同型}\}$$

が得られることに注意. また, $\mathcal{R}^+(\Gamma)$ は Γ 上の distribution (つまり, Γ から $\mathbb{Q}_p$ への局所解析的関数全体のなす位相的 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間の連続双対) の集合とみなせるが, 収束条件を付けることで, $h \geq 0$ に対して order h 以下の tempered distribution と呼ばれる部分 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間 $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{R}^+(\Gamma)$ を定義することができる.

以上の準備の下で, p 進 L 関数の存在については以下が知られていた ([MS74], [Man73], [Vi], [AM75], [MTT86]).

定理 2.7. f は非 p -超カスプであり, 組 (f, α) が非臨界的スロープを持つとする. $\rho_{f,F}^{c=\pm 1}$ の基底 $\gamma^\pm$ をそれぞれ取り, $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- \in \rho_{f,F}$ とおく. このとき, オーダーが $\text{ord}_p(\alpha)$ 以下の tempered distribution

$$\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma} \in \mathcal{R}_L^+(\Gamma) := \mathcal{R}^+(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$$

で (つまり, $\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma} \in \mathcal{H}_{\text{ord}_p(\alpha)} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ で), 任意の $1 \leq r \leq k-1$ および任意の Dirichlet 指標 $\eta : (\mathbb{Z}/p^{n(\eta)}\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対して次の等式

$$\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}(\chi_p^r \eta) = \begin{cases} (r-1)! \cdot \left(\frac{pr}{\alpha}\right)^{n(\eta)} \cdot \frac{1}{G(\eta)} \cdot \frac{L(f,\eta^{-1},r)}{(2\pi i)^r \Omega_\gamma^\pm} & (\eta \neq \mathbf{1}) \\ (r-1)! \cdot (1-p^{r-1}\alpha^{-1})(1-\chi(p)p^{k-1-r}\alpha^{-1}) \cdot \frac{L(f,\mathbf{1},r)}{(2\pi i)^r \Omega_\gamma^\pm} & (\eta = \mathbf{1}) \end{cases}$$

(ただし, $\Omega_\gamma^\pm$ は $\pm 1 = (-1)^r \eta(-1)$ となる方を選ぶ. また, $\mathbf{1}$ は自明な Dirichlet 指標とする) を満たすものが唯一存在する.

注意 2.8. $\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}$ の $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- \in \rho_{f,F}$ に対する依存性について,

$$\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma} = \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^+ + \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^- \in \mathcal{R}_L^+(\Gamma) = \mathcal{R}_L^+(\Gamma)^{[\sigma_{-1}]=1} + \mathcal{R}_L^+(\Gamma)^{[\sigma_{-1}]=-1}$$

は Betti F -構造 $\rho_{f,F}^\pm$ の基底 $\gamma = \gamma^+ + \gamma^-$ の選び方に依存している. 正確には, $\gamma_1^\pm = a_\pm \gamma^\pm$ ($a_\pm \in F^\times$) とすると $\Omega_{f,\gamma_1}^\pm = a_\pm \cdot \Omega_{f,\gamma}^\pm$ だったので

$$\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma_1} = (a_+)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^+ + (a_-)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^-$$

となる.

ρ_f のモチーフ構造の一部である Betti F -構造は p 進的な変形に対して振る舞いが悪い (わかっていない) ため, $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- \in \rho_{f,F}$ の選び方によらないものを定めることが我々の目的において重要である. そのために, [KN] では

$$S(\overline{f})_F \otimes_F \rho_{f,F} \otimes_{F[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

(ここで, $-1 \in \{\pm 1\}$ は $\rho_{f,F}$ に c で作用し, $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ に $[\sigma_{-1}]$ 倍で作用するとする) を考え (これは $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ 加群として非標準的に $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ と同型である), 次を定義する.

定義 2.9. $\mathcal{L}_{(f,\alpha)} \in S(\bar{f})_F \otimes_F \rho_{f,F} \otimes_{F[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ を

$$\mathcal{L}_{(f,\alpha)} := \bar{f} \otimes \gamma \otimes \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma} \in S(\bar{f})_F \otimes_F \rho_{f,F} \otimes_{F[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

で定める.

別の基底 $\gamma_1^\pm = a_\pm \gamma^\pm$ に対して,

$$\mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma_1} = (a_+)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^+ + (a_-)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^-$$

だったので, $F[\{\pm 1\}]$ 加群としてのテンソル積の性質から

$$\begin{aligned} \gamma_1 \otimes \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma_1} &= \gamma_1^+ \otimes (a_+)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^+ + \gamma_1^- \otimes (a_-)^{-1} \cdot \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^- \\ &= \gamma^+ \otimes \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^+ + \gamma^- \otimes \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}^- = \gamma \otimes \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma} \end{aligned}$$

となり, $\mathcal{L}_{(f,\alpha)}$ は基底 $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$ の選び方によらない. この証明から, 基底 γ の選び方に依存しない元を構成するだけなら $\rho_{f,F} \otimes_{F[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ 上 $\gamma \otimes \mathcal{L}_{(f,\alpha),\gamma}$ を考えれば十分であることがわかるが, 次章で説明するように, これを一つの f でなく固有値多様体上に拡張するためにはもう一つの項 $S(\bar{f})_F$ が必要になってくる.

§ 3. Coleman-Mazur 固有値曲線上の p 進 L 関数

$N_0 \geq 1$ を p と素な自然数とする. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{p,N_0}$ を tame レベル N_0 のカスピダルな Coleman-Mazur 固有値曲線 ([CM98], [Bu07], または [Bel12] §2 参照) とする. この定義は説明しないが, $\mathcal{C}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の被約リジッド解析的曲線であり, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -有理点の集合 $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ は, tame レベル N_0 の p で有限スロープを持つ (つまり, p における Atkin-Lehner Hecke 作用素 U_p の固有値がゼロでない) 過収束 Hecke 固有カスプ形式の集合と自然に同一視できる. 例えば, $f = f(\tau) \in S_k^{\text{new}}(\Gamma_1(N), \chi)$ を非 p -超カスプな Hecke 固有新形式とし, ある $m \geq 0$ に対して N が $N_0 p^m$ の約数になっているとする. このとき, $D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha} \neq 0$ となる任意の $\alpha \in L^\times$ に対して (最小の m が $m \geq 1$ ならそのような α は一つであり, $m = 0$ ならそのような α は二つ以下 (予想では丁度二個) である),

$$f_\alpha = f_\alpha(\tau) := \begin{cases} f(\tau) & (m \geq 1) \\ f(\tau) - \frac{p^{k-1}\chi(p)}{\alpha} f(p\tau) & (m = 0) \end{cases}$$

と定めると f_α も Hecke 固有形式であり, さらに自然に (保型形式の空間から過収束保型形式の空間への自然な埋め込みによって) tame レベル N_0 の p で有限スロープを持つ過収束 Hecke 固有形式とみなせる. (通常为正則)Hecke 固有形式からなる $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ の部分集合を $\mathcal{C}^{\text{cl}}$ (the set of classical points) とおく. 過収束保型形式の古典性定理 (U_p 固有値の付値よりも重さの方が十分大きい過収束保型形式は正則保型形式である, という内容の定理) より, $\mathcal{C}^{\text{cl}}$ は $\mathcal{C}$ において Zariski 稠密となる.

$\mathcal{C}$ は過収束保型形式の空間に作用する Hecke 環から構成されるが, この構成により, 各素数 $\ell \nmid N_0 p$ に対する (不分岐)Hecke 作用素

$$T_\ell \in \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$$

と p での Hecke 作用素 (Atkin-Lehner 作用素)

$$U_p \in \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$$

がある. p で有限スローブを持つ族を考えていることから

$$U_p \in \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})^\times$$

となっていることが重要である. 各点 $x \in \mathcal{C}^{\text{cl}}$ に対して, 対応する (必ずしも新形式ではない)Hecke 固有形式を $\tilde{f}_x \in S_k(\Gamma_1(N_0 p^m))$ ($m \geq 1$) と表し, $\alpha_x := U_p(x) \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ と表す. $\tilde{f}_x$ に付随する Hecke 固有新形式を $f_x = q + \sum_{n \geq 2} a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N'_0 p^{m_0}), \chi)$ ($N'_0 | N_0$, $0 \leq m_0 \leq m$) と表す. このとき $T_\ell(x) = a_\ell$ ($\ell \nmid N_0 p$) となり, また, p における局所ラングランズ対応と大域ラングランズ対応の整合性などにより $D_{\text{crys}}(\rho_{f_x})^{\varphi=\alpha_x} \neq 0$ となっていることに注意. $x \in \mathcal{C}^{\text{cl}}$ に対して, f_x の重さが k であれば, 弱許容性により $v_p(\alpha_x) \leq k-1$ であったが, $v_p(\alpha_x) < k-1$ となると, x は非臨界的 (non-critical) スローブを持つと呼ぶ. 非臨界的スローブを持つ点全体からなる $\mathcal{C}^{\text{cl}}$ の部分集合を $\mathcal{C}^{\text{cl}, \text{ncr}}$ と表し, その補集合を $\mathcal{C}^{\text{cl}, \text{cr}} := \mathcal{C}^{\text{cl}} \setminus \mathcal{C}^{\text{cl}, \text{ncr}}$ と表す. 古典性定理より, $\mathcal{C}^{\text{cl}, \text{ncr}}$ も $\mathcal{C}$ において Zariski 稠密となる.

擬表現の理論 (擬表現を族に拡張する理論 [Ca94]) より, $N_0 p$ の外不分岐な連続擬表現

$$T : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$$

で, 任意の素数 $\ell \nmid N_0 p$ に対して

$$T(\text{Frob}_\ell) = T_\ell$$

となるものが一意に存在する. $\mathcal{C}$ の正規化を $\pi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ と表す. このとき, $\tilde{\mathcal{C}}$ 上の階数 2 の Galois 表現, つまり, 階数 2 の射影的 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ 加群 $\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ と連続準同型

$$\rho_{\tilde{\mathcal{C}}} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}})$$

で

$$\text{trace}(\rho_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \pi^* \circ T : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}})$$

となるものが存在する ([CM98]). 各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}(L)$ に対して, V_x を $\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ の x への底変換とし, $\rho_{\tilde{\mathcal{C}}}$ を x に制限して得られる Galois 表現を $\rho_x : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}_L(V_x)$ と表す.

$\mathcal{C}$ はカスピダルな固値曲線を考えていたから, 各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\text{cl}} := \pi^{-1}(\mathcal{C}^{\text{cl}})$ に対して, $f_x := f_{\pi(x)}$ はカスプ形式であり, これより ρ_{f_x} は絶対既約である. このことと擬表現の一般論により, ($x \in \tilde{\mathcal{C}}(L)$ となる十分大きな L に対して) L 上の Galois 表現の (非標準的な) 同型

$$\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}$$

が存在することに注意.

次に, $\tilde{C}$ 上のゼータ元についての定理を述べるために, $\mathcal{V}_{\tilde{C}}$ の解析的岩澤コホモロジー ([Pot12]) の定義を復習する. X を $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析的空間とし, $\mathcal{V}$ を有限射影的 $\mathcal{O}_X$ 加群で, 連続 $\mathcal{O}_X$ 線形かつ pN_0 の外不分岐な $G_{\mathbb{Q}}$ 作用をもつものとする. X と $\mathcal{W} = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[\Gamma]])^{\mathrm{an}}$ との積空間 $X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}$ の射影を

$$p_1 : X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W} \rightarrow X, \quad p_2 : X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$$

と表す. 合成写像

$$(p_2)^* \circ \chi_{\mathrm{univ}} : \Gamma \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}})^{\times} \rightarrow \Gamma(X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}, \mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}})^{\times}$$

も同じ記号 χ_{univ} で表す. $X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}$ の各アフィノイド開集合 $U = \mathrm{Spm}(A)$ に対して, Galois コホモロジー

$$H^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], p_1^*(\mathcal{V})(\chi_{\mathrm{univ}}^{-1})|_U)$$

は有限生成 A 加群となり, 対応

$$U \mapsto H^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], p_1^*(\mathcal{V})(\chi_{\mathrm{univ}}^{-1})|_U)$$

は $X \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}$ 上の接続層になることが知られている ([Pot12]). これを

$$H_{\mathrm{an-Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V})$$

と表し, $\mathcal{V}$ の解析的岩澤コホモロジーと呼ぶ. X が一点 $X = \mathrm{Spm}(L)$ の場合, $\mathcal{V} = V$ は通常の p 進 Galois 表現であり, このときは, $H_{\mathrm{an-Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], V)$ は $\mathcal{W}_L = \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} L$ 上の接続層になる. ($\mathcal{W}_L$ は quasi-Stein リジッド解析的空間なので) 大域切断を取る関手によって, $\mathcal{W}_L$ 上の接続層の圏は余許容的 (co-admissible) $\mathcal{R}_L^+(\Gamma) := L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{R}^+(\Gamma)$ 加群の圏と自然に圏同値になることが知られている ([ST03]). この圏同値によって, $H_{\mathrm{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], V)$ を $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ 加群とみなす. Shapiro の補題より, 通常の岩澤コホモロジー

$$H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], V) = \varprojlim_{n \geq 1} H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p, \zeta_{p^n}], T)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

(ここで, $T \subset V$ は $G_{\mathbb{Q}}$ -不変な $\mathcal{O}_L$ 格子) は

$$H^i(\mathbb{Z}_p[1/N_0p], V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(\chi_{\mathrm{univ}}^{-1}))$$

とも書けるので, 自然な環準同型 $\Lambda \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}) = \mathcal{R}^+(\Gamma)$ によって Λ 線形写像

$$\mathrm{can} : H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], V) \rightarrow H_{\mathrm{an-Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], V)$$

が誘導される.

以上の構成を $\mathcal{V}_{\tilde{C}}^* = \mathcal{V}_{\tilde{C}}^{\vee}(1)$ ($\mathcal{V}_{\tilde{C}}$ の Tate 双対) に適用することで, $\tilde{C} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}$ 上の接続層

$$H_{\mathrm{an-Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V}_{\tilde{C}}^*)$$

が得られる. 各点 $x \in \widetilde{C}^{\text{cl}}(L) = \widetilde{C}^{\text{cl}} \cap \widetilde{C}(L)$ に対して, 底変換によって, (非標準的な) 同型 $\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}$ から $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ 加群の写像

$$x^*((p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V}_{\widetilde{C}}^*)) \rightarrow H_{\text{an-Iw}}^i(\mathbb{Z}[1/N_0p], \rho_{f_x}^*))$$

が導かれる.

加藤 [Ka04] は, Hecke 固値新形式 $f \in S_k^{\text{new}}(\Gamma_1(N), \chi)$ に対して, ρ_f のオイラー系を用いて, f の (p での局所 L 因子を除いた) L 関数の特殊値を補間する標準的な $\mathcal{O}$ 線形写像

$$\mathbf{z}(f) : \rho_f^\vee \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], \rho_f^*)$$

を構成し ([Ka04] Theorem 12.5), さらに f が非 p -超カスプで (f, α) が非臨界的スロープを持つときに, この写像にさらに Perrin-Riou 写像 ([Pe94]) を適用することで $\mathcal{L}_{(f, \alpha), \gamma} \in \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ が得られることを証明した ([Ka04] Theorem 16.6). 本稿では, 写像 $\mathbf{z}(f)$ をゼータ準同型と呼ぶ. Perrin-Riou 写像とは, 局所岩澤コホモロジーの元から, この元の Bloch-加藤 exponential 射および双対 exponential 射の値を補間する Γ 上の (tempered) distribution を作る写像である. 特に, 上の状況でこの写像は

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \rho_f^*) \rightarrow (D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha})^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

という写像であり, このとき $\mathcal{L}_{(f, \alpha), \gamma}$ は, $\gamma = \gamma^+ + \gamma^-$ の双対基底 $(\gamma^\pm)^\vee \in (\rho_f^\vee)^\pm$ の合成写像

$$\rho_f^\vee \xrightarrow{\mathbf{z}(f)} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], \rho_f^*) \xrightarrow{\text{loc}_p} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \rho_f^*) \rightarrow (D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha})^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

による像として得られる (後述するように, 自然な同型

$$(D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha})^\vee \xrightarrow{\sim} S(\overline{f})_F \otimes_F L$$

がある) ことを加藤は証明した.

固値曲線上の p 進 L 関数の構成についての我々の基本的なアイデアは, ゼータ準同型および Perrin-Riou 写像を固値曲線上に拡張することである. まず, 筆者の前の研究 ([Na23]) およびゼータ元の存在に関する一般的な予想 ([Ka93], [FK06]) に基づいて, [KN] では固値曲線上のゼータ準同型について次の予想を立てた.

予想 3.1. $\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$ 加群の準同型

$$\mathbf{z}_{\widetilde{C}} : \mathcal{V}_{\widetilde{C}}^\vee \rightarrow (p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V}_{\widetilde{C}}^*))$$

で, 各点 $x \in \widetilde{C}^{\text{cl}} = \pi^{-1}(C^{\text{cl}})$ に対して, $\rho_{f_x}^\vee$ から $H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \rho_{f_x}^*)$ への写像としての等式

$$x^*(\mathbf{z}_{\widetilde{C}}) = \prod_{\ell|N_0} P_{\ell, f_x}(\text{Frob}_\ell) \cdot (\text{can} \circ \mathbf{z}(f_x))$$

を満たすものがただ一つ存在する. ここで,

$$P_{\ell, f_x}(X) = \det(1 - \text{Frob}_\ell X | \rho_{f_x}^{I_\ell}) \in L[X]$$

とし ($I_\ell \subset G_{\mathbb{Q}_\ell}$ は惰性群),

$$\text{can} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \rho_{f_x}^*) \rightarrow H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \rho_{f_x}^*)$$

は上で説明した標準的な写像とする.

$\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ 加群

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^+(\Gamma) := (p_1)_*(\mathcal{O}_{\tilde{C} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}})$$

と定める. これを Γ の $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ 係数の解析的岩澤代数と呼ぶ. 定義より, 各点 $x \in \tilde{C}(L)$ に対して自然な同型 $x^*(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^+(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ があることに注意.

この予想に関する部分的な結果, および, この予想の下での p 進 L 関数の存在に関する次の二つの定理が本稿 [KN] の主定理である.

定理 3.2.

- (1) ([KPX14]) 階数 1 のある局所自由 $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ 加群 $\mathcal{D}$ があり, 各点 $x \in \tilde{C}^{\text{cl, ncr}}$ に対して ($x \in \tilde{C}(L)$ となる十分大きな $L \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p}$ を取ると) 同型

$$x^*(\mathcal{D})^\vee \xrightarrow{\sim} S(\overline{f}_x)_L := S(\overline{f}_x)_F \otimes_F L$$

が存在する (より正確には, この同型は, 非標準的な同型 $\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}$ から自然に誘導される)

- (2) 予想 3.1 を仮定する. ある大域切断

$$\mathcal{L}_{\tilde{C}} \in \Gamma(\tilde{C}, \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \mathcal{V}_{\tilde{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^+(\Gamma))$$

が存在して, 各点 $x \in \tilde{C}^{\text{cl, ncr}}(L)$ に対して, (1) の同型と次の同型

$$\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}, \quad x^*(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^+(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

から導かれる同型

$$x^*(\mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \mathcal{V}_{\tilde{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^+(\Gamma)) \xrightarrow{\sim} S(\overline{f}_x)_L \otimes_L \rho_{f_x} \otimes_{L[\{\pm 1\}]} \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

により両者を同一視すると, 等式

$$x^*(\mathcal{L}_{\tilde{C}}) = \prod_{\ell | N_0} P_{\ell, f_x}(\text{Frob}_\ell) \cdot \mathcal{L}_{(f_x, \alpha_x)}$$

が成り立つ.

注意 3.3. 技術的な注意であるが, (1) の同型 $x^*(\mathcal{D})^\vee \xrightarrow{\sim} S(\bar{f}_x)_L$ は, 非標準的な同型 $\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}$ の選び方に依存していた. この性質により, 2つの同型のテンソル積として得られる同型

$$x^*(\mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \mathcal{V}_{\tilde{C}}) \xrightarrow{\sim} S(\bar{f}_x)_L \otimes_L \rho_{f_x}$$

は, 同型 $\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}$ の選び方によらずに一意に定まる.

$\mathbb{F} \subset \bar{\mathbb{F}}_p$ を $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体, $L \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体で, その整数環 $\mathcal{O}$ の剰余体が $\mathbb{F}$ となるものとする.

$$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$$

を, N_0 を割らない全ての素数 ℓ において不分岐であり, odd な (つまり, 複素共役 $c \in G_{\mathbb{Q}}$ が $\det(\bar{\rho}(c)) = -1$ を満たす) 連続表現とする. $\bar{\rho}$ は絶対既約であると仮定する. このとき, 擬表現の理論 ([Ch14]) から, $\mathcal{C}$ の許容的開集合 $\mathcal{C}(\bar{\rho})$ で, 各 $x \in \mathcal{C}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ に対して同値

$$x \in \mathcal{C}(\bar{\rho}) \iff x^*(T) \bmod \mathfrak{m}_{\bar{\mathbb{Z}}_p} = \mathrm{trace}(\bar{\rho})$$

が成り立つものが存在する. $\mathcal{C}(\bar{\rho})$ の $\pi: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ による引き戻しを $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho}) := \pi^{-1}(\mathcal{C}(\bar{\rho}))$ と表す.

筆者の前の結果 ([Na23]) によって, 予想 3.1 について次の部分的な結果が得られる.

定理 3.4. $p \geq 3$ とし, $\bar{\rho}$ がさらに次の条件 (i), (ii) を満たすと仮定する.

$$(i) \quad \mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{\mathbb{Q}_p}]}(\bar{\rho}) = \mathbb{F},$$

$$(ii) \quad \bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \not\sim \begin{pmatrix} \bar{\chi}_p^{\pm 1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \eta \quad (\bar{\chi}_p: \text{法 } p \text{ 円分指標}, \forall \eta: G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}^\times: \text{有限指標})$$

このとき, $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})}$ 加群の準同型

$$\mathbf{z}_{\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})}: \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})}^\vee \rightarrow (p_1)_*(H_{\mathrm{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})}^*))$$

で, 各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{cl}}(\bar{\rho})$ に対して, $\rho_{f_x}^\vee$ から $H_{\mathrm{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \rho_{f_x}^*)$ への写像としての等式

$$x^*(\mathbf{z}_{\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})}) = \prod_{\ell|N_0} P_{\ell, f_x}(\mathrm{Frob}_\ell) \cdot (\mathrm{can} \circ \mathbf{z}(f_x))$$

を満たすものがただ一つ存在する.

この二つの定理によって, 固値曲線上の p 進 L 関数の存在について, 以下の結果が直ちに得られる.

系 3.5. 定理 3.4 の仮定を満たす $\bar{\rho}$ に対して, ある大域切断

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})} \in \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho}), \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \mathcal{V}_{\tilde{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}\{\pm 1\}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^+(\Gamma))$$

が存在して、各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\text{cl,ncr}}(L) \cap \tilde{\mathcal{C}}(\bar{\rho})$ に対して等式

$$x^*(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \prod_{\ell|N_0} P_{\ell, f_x}(\text{Frob}_{\ell}) \cdot \mathcal{L}_{(f_x, \alpha_x)}$$

が成り立つ.

§ 4. 定理の証明

本稿では、定理 3.2 の証明の概略について解説する. (定理 3.1 の仮定の下での) この定理の証明においては、非臨界的スロープを持つ組 (f, α) に対して定義された Perrin-Riou 写像

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \rho_f^*) \rightarrow (D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha})^{\vee} \otimes_L \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

を固有値曲線上の Galois 表現 $\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ へ拡張することが最も重要になる. [KN] ではこれを、階数 1 の (φ, Γ) 加群に関する局所イプシロン予想 ([Na17]) と $\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ に付随する (φ, Γ) -加群の三角化 (triangulation) の理論 ([KPX14]) を用いて構成した.

§ 4.1. (φ, Γ) 加群についての基礎事項

これを解説するために、まずは (φ, Γ) 加群の基礎を復習する. $\mathbb{A}^1[0, 1] := \text{Spm}(\mathbb{Z}_p\{\{T\}\}[1/p])$ を半径 1 の閉円板とし、有理数 $r \leq s \in (0, 1)$ に対して、 $\mathbb{A}^1[r, s] = \{x \in \mathbb{A}^1[0, 1] \mid r \leq |x| \leq s\}$ (resp. $\mathbb{A}^1[0, s] = \{x \in \mathbb{A}^1[0, 1] \mid |x| \leq s\}$) を境界の半径が r, s の穴あき閉円板 (resp. 半径 s の閉円板) とし、これらの大域切断をそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{[r, s]} &:= \Gamma(\mathbb{A}^1[r, s], \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1[r, s]}) = \{f(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in \mathbb{Q}_p, f(T) \text{ converges on } r \leq |T| \leq s\} \\ &= \{f(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in \mathbb{Q}_p, r^{-n}|a_{-n}|, s^n|a_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}^{[0, s]} := \Gamma(\mathbb{A}^1[0, s], \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1[0, s]}) = \{f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \mid a_n \in \mathbb{Q}_p, s^n|a_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\}$$

と表す. $\mathbb{Q}_p$ 上のアフィノイド代数 A に対して、 $\text{Spm}(A) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1[r, s]$ および $\text{Spm}(A) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1[0, s]$ の大域切断をそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_A^{[r, s]} &:= \Gamma(\text{Spm}(A) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1[r, s], \mathcal{O}_{\text{Spm}(A) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1[r, s]}) = \mathcal{R}^{[r, s]} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} A \\ &= \{f(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in A, r^{-n}|a_{-n}|, s^n|a_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_A^{[0, s]} &:= \Gamma(\text{Spm}(A) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1[0, s], \mathcal{O}_{\text{Spm}(A) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1[0, s]}) = \mathcal{R}^{[0, s]} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} A \\ &= \{f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \mid a_n \in A, s^n|a_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\} \end{aligned}$$

と表す (ここで, $|\cdot|$ は A 上のノルム). $0 \leq r' \leq r \leq s \leq s' < 1$ に対して自然な包含写像 $\mathcal{R}_A^{[r', s']} \hookrightarrow \mathcal{R}_A^{[r, s]}$, $\mathcal{R}_A^{[0, s']} \hookrightarrow \mathcal{R}_A^{[0, s]}$ があることに注意して,

$$\mathcal{R}_A^r := \bigcap_{r < s < 1} \mathcal{R}_A^{[r, s]}, \quad \mathcal{R}_A^+ := \bigcap_{s < 1} \mathcal{R}_A^{[0, s]}, \quad \mathcal{R}_A := \bigcup_{r < 1} \mathcal{R}_A^r$$

とおく. 位相 A 代数 $\mathcal{R}_A$ および $\mathcal{R}_A^+$ への φ 作用と連続 Γ 作用 (位相 A 代数としての作用) を

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1, \quad \gamma(T) = (1+T)^{\chi_p(\gamma)} - 1 \quad (\gamma \in \Gamma)$$

で定める. 有限射影的 $\mathcal{R}_A$ 加群 M に対して $\varphi^*(M) := M \otimes_{\mathcal{R}_A, \varphi} \mathcal{R}_A$ とおく. $\mathcal{R}_A$ 線形同型

$$\varphi^*(M) \xrightarrow{\sim} M$$

(これを Frobenius 構造と呼ぶ) と, Frobenius 構造と可換な連続半線形 Γ 作用

$$\Gamma \times M \rightarrow M$$

を持つ有限射影的 $\mathcal{R}_A$ 加群 M を $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ) 加群と呼ぶ. 自然な写像 $M \rightarrow \varphi^*(M) : x \mapsto x \otimes 1$ と Frobenius 構造との合成で得られる写像を $\varphi : M \rightarrow M$ と表す.

$\mathcal{R}_A = \bigoplus_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(\mathcal{R}_A)$ であることから, $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ) 加群 M に対しても $M = \bigoplus_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(M)$ が成り立つ. そこで写像 $\psi : M \rightarrow M$ を $x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i) \in M$ に対して $\psi(x) = x_0$ で定める. 定義より $\psi \circ \varphi = \text{id}_M$ となることに注意.

連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow A^\times$ に対して, 階数 1 の $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ) 加群

$$\mathcal{R}_A(\delta) = \mathcal{R}_A e_\delta$$

を

$$\varphi(e_\delta) = \delta(p)e_\delta, \quad \gamma(e_\delta) = \delta(\chi_p(\gamma))e_\delta \quad (\gamma \in \Gamma)$$

で定める.

X を $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析的空間とする. X の各許容的アフィノイド開集合 $\text{Spm}(A)$ に対して $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ) 加群 M_A が与えられていて, 各包含 $\text{Spm}(A_2) \subseteq \text{Spm}(A_1)$ に対して (コサイクル条件を満たす) 同型 $M_{A_1} \otimes_{\mathcal{R}_{A_1}} \mathcal{R}_{A_2} \xrightarrow{\sim} M_{A_2}$ が与えられていたとき, 組

$$\{\{M_A\}_{\text{Spm}(A) \subseteq X}, \{M_{A_1} \otimes_{\mathcal{R}_{A_1}} \mathcal{R}_{A_2} \xrightarrow{\sim} M_{A_2}\}_{\text{Spm}(A_2) \subseteq \text{Spm}(A_1)}\}$$

を $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}$ 上の (φ, Γ) 加群と呼ぶ. 例えば, 連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ に対し, 各 $\text{Spm}(A)$ への制限を $\delta_A : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times \rightarrow A^\times$ と表す. このとき, $\mathcal{R}_A(\delta_A)$ たちと同型 $\mathcal{R}_{A_1}(\delta_{A_1}) \otimes_{\mathcal{R}_{A_1}} \mathcal{R}_{A_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{A_2}(\delta_{A_2}) : e_{\delta_{A_1}} \otimes 1 \mapsto e_{\delta_{A_2}}$ たちの組によって $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}$ 上の階数 1 の (φ, Γ) 加群が定まる. これを $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}(\delta)$ と表す.

$G_{\mathbb{Q}_p}$ が連続 $\mathcal{O}_X$ 線形に作用する有限射影的 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{V}$ に対して, Fontaine, Cherbonnier-Colmez, Kedlaya の構成によって $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}$ 上の (φ, Γ) 加群

$$D_{\text{rig}}(\mathcal{V})$$

を対応させることができる ([BC08]).

§ 4.2. 定理の証明

$U_p \in \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})^{\times}$ を $\pi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ で引き戻したのも同じ記号で $U_p := \pi^*(U_p) \in \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}})^{\times}$ と表す. (局所定数) 連続準同型 $\delta_{U_p} : \mathbb{Q}_p^{\times} \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}})^{\times}$ を

$$\delta_{U_p}(p) = U_p, \quad \delta_{U_p}(a) = 1 \quad (a \in \mathbb{Z}_p^{\times})$$

で定め, これに対応する階数 1 の $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}$ 上の (φ, Γ) 加群 $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p})$ を考える. これと, $\tilde{\mathcal{C}}$ 上の Galois 表現 $\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ に対応する $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}$ 上の (φ, Γ) 加群 $\mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}})$ を用いて, 定理 3.2 (i) の $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ -加群 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} := \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p}), \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}))$$

で定義する (ここで, $\mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}$ は $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}$ 上の (φ, Γ) 加群の射のなす加群とする). 各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}(L)$ に対して, $\mathcal{D}_x := x^*(\mathcal{D})$ と表すと, 底変換により次の自然な写像

$$\mathcal{D}_x \rightarrow \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_L(\alpha_x), \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\rho_x)^{\varphi=\alpha_x} \cap \mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\rho_x) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\rho_x)^{\varphi=\alpha_x}$$

が得られることに注意 (ここで, 同型は [Ber02] による).

evaluation で定まる (φ, Γ) 作用と可換な $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}$ 線形写像

$$\mathrm{ev} : \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p}) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}) : f \otimes x \mapsto f(x)$$

がある.

次の定理は, $\mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}})$ の三角化に関する Kedlaya-Pottharst-Xiao の結果 ([KPX14] Proposition 6.4.5) であり, 我々の p 進 L 関数の構成において基礎となる結果である.

定理 4.1.

- (1) $\mathcal{D}$ は階数 1 の局所自由 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ 加群.
- (2) 各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}(L)$ に対して, *evaluation* 写像の x への底変換で得られる自然な写像

$$\mathrm{ev}_x : \mathcal{D}_x \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x}) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_x)$$

は単射であり, 次が成り立つ.

- (i) x が θ -critical (定義は次の注意参照) でないとき, ev_x は $\mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_x)$ の三角化 (*triangulation*) を与える. より正確に, 次の (φ, Γ) 加群の完全列がある.

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_x \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_x) \rightarrow \mathcal{R}_L(\delta_x) \rightarrow 0$$

(ここで, $\delta_x := \det(\rho_x) \cdot \delta_{\alpha_x}^{-1} : \mathbb{Q}_p^{\times} \rightarrow L^{\times}$)

(ii) x が θ -critical のとき, ev_x は包含写像

$$\mathcal{D}_x \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x}) \hookrightarrow \frac{1}{t^{k-1}} \mathcal{D}_x \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x})$$

を経由し ($t := \log(1+T) \in \mathcal{R}_L^\times$), 次の (φ, Γ) 加群の完全列を誘導する.

$$0 \rightarrow \frac{1}{t^{k-1}} \mathcal{D}_x \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x}) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_x) \rightarrow \mathcal{R}_L(\delta_x) \rightarrow 0$$

(ここで, $\delta_x := \det(\rho_x) \cdot [y \mapsto y^{k-1}] \cdot \delta_{\alpha_x}^{-1} : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$)

注意 4.2. 重さが $j \in \mathbb{Z}$, tame レベル N_0 の過収束保型形式の空間を $M_j^\dagger(\Gamma_1(N_0))$ と表す. 整数 $k \geq 2$ に対して, 過収束保型形式の q 展開上では $\left(q \frac{d}{dq}\right)^{k-1}$ で作用する線形写像

$$\theta^{k-1} : M_{2-k}^\dagger(\Gamma_1(Np^r)) \rightarrow M_k^\dagger(\Gamma_1(Np^r))$$

が存在することが知られている ([Co97]). $x \in \tilde{\mathcal{C}}(L)$ に対して, $\pi(x) \in \mathcal{C}(L)$ に対応する過収束保型形式 $\tilde{f}_{\pi(x)}$ が, ある $k \geq 2$ に対して $\theta^{k-1}(M_{2-k}^\dagger(\Gamma_1(Np^r)))$ に含まれているとき, x は θ -critical であるという. x が θ -critical であるとき, $v_p(\alpha_x) = k-1$ であることが知られている ([Bel12] §2). これより, $\tilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{cl}, \mathrm{ncr}}$ の各点 x は θ -critical ではないので, (i) を満たす.

$x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\mathrm{cl}, \mathrm{ncr}}(L)$ とする. 定理 3.2 の (i) にある同型

$$x^*(\mathcal{D})^\vee = \mathcal{D}_x^\vee \xrightarrow{\sim} S(\overline{f}_x)_L$$

は次のように定義される. 上の注意より, x は non θ -critical であるので, 同型 $\rho_x \xrightarrow{\sim} \rho_{f_x}$ を選ぶと, 定理 4.1 (i) より完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_x \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_{f_x}) \rightarrow \mathcal{R}_L(\delta_x) \rightarrow 0$$

が存在する. これの双対より完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_L(\delta_x^{-1}) \rightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{rig}}(\rho_{f_x}^\vee) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x^\vee} \mathcal{D}_x^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x^{-1}}) \rightarrow 0$$

が得られるが, $\mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{R}_L(\delta_x^{-1})) = 0$ となることから, $\mathrm{ev}_x^\vee$ に関し $\mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(-)$ を施すことで次の同型が得られる.

$$\begin{aligned} S(\overline{f}_x)_L &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^{k-1} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\rho_{\overline{f}_x}) = \mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\rho_{\overline{f}_x}(k-1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0 \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\rho_{f_x}^\vee) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_x^\vee \otimes_L \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x^{-1}})) = \mathcal{D}_x^\vee \otimes_L \mathrm{Le}_{\delta_{\alpha_x^{-1}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_x^\vee \end{aligned}$$

(ここで, 最初の同型は p 進 Hodge 理論の比較同型による同型. 2 番目の同型は, Poincaré dual により導かれる同型 $\rho_{f_x}^\vee \xrightarrow{\sim} \rho_{\overline{f}_x}(k-1)$ から誘導される. 3 番目の同型が $\mathrm{ev}_x^\vee$ から誘導されるもの. 最後の同型は $y \otimes e_{\delta_{\alpha_x^{-1}}} \mapsto y$ で与える).

この合成によって、定理 3.2(i) の同型

$$S(\overline{f_x})_L \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_x^\vee$$

が定義される。以下、この同型によって両者を同一視する。

最後に、大域切断

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{C}}} \in \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}[\pm 1]} \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}^+(\Gamma))$$

の定義について説明する。このような大域切断を与えることは $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ 加群の準同型

$$\mathcal{L} : \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^\vee \rightarrow \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}^+(\Gamma)$$

で $\mathcal{L}(\sigma(x)) = \sigma(\mathcal{L}(x))$ を満たすものを与えることと同値である。以下、この写像 $\mathcal{L}$ の構成を説明する。

予想 3.1 の下で、ゼータ準同型 $\mathbf{z}(f)$ たちを補間する写像 $\mathbf{z}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ があり、これと局所岩澤コホモロジー準同型への自然な射と合成することで次の写像が得られる。

$$\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^\vee \xrightarrow{\mathbf{z}_{\tilde{\mathcal{C}}}} (p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^*)) \xrightarrow{\text{loc}_p} (p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^*))$$

よって、あとは非臨界的スロープを持つ各組 (f, α) に対する Perrin-Riou 写像

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \rho_f^*) \rightarrow (D_{\text{crys}}(\rho_f)^{\varphi=\alpha})^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L^+(\Gamma)$$

の $\tilde{\mathcal{C}}$ への拡張となるような写像

$$(p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^*)) \rightarrow \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}^+(\Gamma)$$

を構成すればよい。この写像は (φ, Γ) 加群の岩澤コホモロジーの理論に自然に現れる写像によって、次のように容易に定義することができる。

まず、 (φ, Γ) 加群の岩澤コホモロジーにおける最も基本的な結果として、自然な $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}^+(\Gamma)$ 加群の同型

$$(p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^*)) \xrightarrow{\sim} D_{\text{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^*)^{\psi=1}$$

が存在する ([KPX14])。次に、evaluation 写像 ev の双対によって写像

$$D_{\text{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{C}}}^*)^{\psi=1} \xrightarrow{\text{ev}^\vee} \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=1}$$

が誘導される。さらに等式 $\psi \circ \varphi = \text{id}$ から写像

$$1 - \varphi : \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=1} \rightarrow \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=0}$$

が誘導されるが、簡単な議論により、この写像は

$$1 - \varphi : \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=1} \rightarrow \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}}^+(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=0}$$

を経由することが証明できる. 最後に, $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底を $e_1 = (\zeta_{p^n})_{n \geq 1}$ とおくと, 次の写像

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\Gamma) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=0} : \lambda \mapsto \lambda((1+T)e_{\delta_{U_p^{-1}}} \otimes e_1)$$

は $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\Gamma)$ 加群の同型であることが知られており, この逆写像によって次の同型

$$\mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\Gamma)$$

が得られる. 以上の写像の合成によって写像 $\mathcal{L} : \mathcal{V}_{\tilde{c}}^\vee \rightarrow \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\Gamma)$ を定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{V}_{\tilde{c}}^\vee &\xrightarrow{\mathbf{z}_{\tilde{c}}} (p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/N_0p], \mathcal{V}_{\tilde{c}}^*)) \xrightarrow{\text{loc}_p} (p_1)_*(H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V}_{\tilde{c}}^*)) \\ &\xrightarrow{\sim} D_{\text{rig}}(\mathcal{V}_{\tilde{c}}^*)^{\psi=1} \xrightarrow{\text{ev}^\vee} \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=1} \\ &\xrightarrow{1-\varphi} \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\delta_{U_p^{-1}})(1)^{\psi=0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\tilde{c}}}^+(\Gamma) \end{aligned}$$

注意 4.3. このように, 写像 $\mathbf{z}_{\tilde{c}}$ の存在を認めてしまえば, $\mathcal{L}_{\tilde{c}}$ の構成は非常に簡単であるが, こうして作った $\mathcal{L}_{\tilde{c}}$ が各点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\text{cl,ncr}}$ において $\mathcal{L}_{(f_x, \alpha_x)}$ と結びつくことを示すのは難しい. これを示すためには, 写像 $\mathcal{L}$ の $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\text{cl,ncr}}(L)$ での底変換, 特に, 次の合成

$$\begin{aligned} H_{\text{an-Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, \rho_x^*) &\xrightarrow{\sim} D_{\text{rig}}(\rho_x^*)^{\psi=1} \xrightarrow{\text{ev}^\vee} (D_{\text{crys}}(\rho_x)^{\varphi=\alpha_x})^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L(\delta_{\alpha_x})(1)^{\psi=1} \\ &\xrightarrow{1-\varphi} (D_{\text{crys}}(\rho_x)^{\varphi=\alpha_x})^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L^+(\delta_{\alpha_x})(1)^{\psi=0} \xrightarrow{\sim} (D_{\text{crys}}(\rho_x)^{\varphi=\alpha_x})^\vee \otimes_L \mathcal{R}_L^+(\Gamma) \end{aligned}$$

を組 (f_x, α_x) に対する Perrin-Riou 写像と比較する必要がある. 我々は, 階数 1 の (φ, Γ) 加群に対する局所イプシロン予想の結果 ([Na17]) を用いて, この合成写像と Bloch-加藤の exponential および双対 exponential 射との関係を完全に明示的に記述することで, これを示した. [KN] においては, p 進 L 関数の例外零点に対応する点での Perrin-Riou 写像の制限も明治的に記述出来る出来るため, 我々の写像の構成の応用として, p 進 L 関数の例外零点の微分値の記述も (先行結果とは別の方法で) できる. また, これらの明示的な計算結果を θ -critical な点 $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\text{cl,cr}}(L)$ に適用し, さらに定理 4.1(ii) を用いることで, θ -critical な点における p 進 L 関数 ([Bel12]) の別構成を与えることもできる.

References

[AM75] Y. Amice, J. Vlu. Distributions p -adiques associees aux sries de Hecke. Astrisque 24-25, pp. 119-131, 1975.
 [Bel12] J. Bellache. Critical p -adic L -functions. Invent. Math. 189 (2012), no. 1, pp. 1-60.
 [Bu07] K. Buzzard, Eigenvarieties, Proc. of the LMS Durham Conference on L -functions and arithmetic (2007).
 [Ber02] L. Berger, Reprsentations p -adiques et quations diffrentielles, Invent. Math. **148** (2002), 219-284.

- [BC08] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p -adique, *Astérisque* 319 (2008), 187-212.
- [Ch14] G. Chenevier, The p -adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* 414, *Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011, Automorphic forms and Galois representations vol. 1*, 221-285 (2014)
- [Ca94] H. Carayol, Formes modulaires et représentations Galoisienne à valeurs dans un anneau local complet, *p -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture* (B. Mazur, G. Stevens, eds.), *Contemp. Math.* **165** (1994), 213-235.
- [Co97] R. Coleman, Classical and overconvergent modular forms of higher level, *J. Th. Nombres Bordeaux* 9, 1997, 395-403.
- [CM98] R. Coleman, B. Mazur. The eigencurve. Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 1-113, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [De71] P. Deligne. Formes modulaires et représentations l -adiques, *Sémin. Bourbaki* 1968/69, **355** (1971), 139-172.
- [Em06] M. Emerton, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigen- forms, *Invent. Math.* 164 no.1, 1-84 (2006).
- [FK06] T. Fukaya, K. Kato, A formulation of conjectures on p -adic zeta functions in non commutative Iwasawa theory, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*. Vol. XII (Providence, RI), *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 219, Amer. Math. Soc., 2006, pp. 1-85.
- [GS93] R. Greenberg, G. Stevens, p -adic L -functions and p -adic periods of modular forms, *Invent. Math.* 111 (1993), no. 2, 407-447.
- [Ka93] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L -functions via B_{dR} . Arithmetic algebraic geometry, *Lecture Notes in Mathematics* **1553**, Springer- Verlag, Berlin, 1993, 50-63.
- [Ka04] K. Kato, p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* (2004), no. **295**, ix, 117-290, *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. III*.
- [KN] C. H. Kim, K. Nakamura, Construction of p -adic L -functions over the Coleman-Mazur eigencurve, in preparation.
- [KPX14] K. Kedlaya, J. Pottharst, L. Xiao, Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ) -modules, *J. Amer. Math. Soc.* 27 (2014), 1043-1115.
- [Ki94] K. Kitagawa, On standard p -adic L -functions of families of elliptic cusp forms, in p -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), 81-110, *Contemp. Math.*, 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Man73] Y. Manin, Periods of cuspforms, and p -adic Hecke series, *Math USSR-Sb.* 92, 371-393, 1973.
- [MS74] B. Mazur, P. Swinnerton-Dyer, Arithmetic of Weil curves., *Invent. Math.* 25 (1974), 1-61.
- [MTT86] B. Mazur, J. Tate, J. Teitelbaum, On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* 84 (1986), no. 1, 1-48.
- [Na17] K. Nakamura, A generalization of Kato 's local ε -conjecture for (φ, Γ) -modules over the Robba ring, *Algebra and Number Theory*, Volume 11, Number 2 (2017), 319-404.
- [Na23] K. Nakamura, Zeta morphisms for rank two universal deformations, to appear in *Inventiones mathematicae*.
- [Oc03] T. Ochiai. A generalization of the Coleman map for Hida deformations. *Amer. J. Math.*,

125(4):849-892, 2003.

- [Pa03] A. Panchishkin, Two variable p -adic L -functions attached to eigenfamilies of positive slope, *Invent. Math.* 154 (2003), no. 3, 551-615.
- [Pe94] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local. *Invent. Math.* 115 (1994) 81-161.
- [PS11] R. Pollack, G. Stevens, Overconvergent modular symbols and p -adic L -functions, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4, Tome 44* (2011) no. 1, pp. 1-42.
- [Pot12] J. Pottharst, Cyclotomic Iwasawa theory of motives, preprint.
- [Ro18] J. Rodrigues Jacinto, (φ, Γ) -modules de de Rham et fonctions L p -adiques, *Algebra and Number Theory* 12-4 (2018), 885-934.
- [ST03] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p -adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* 153 (2003), no. 1, p. 145-196.
- [Sh68] G. Shimura, An l -adic method in the theory of automorphic forms, the text of a lecture at the conference *Automorphic functions for arithmetically defined groups*, Oberwolfach, Germany, 1968. (published in *Collected papers. II. 1967-1977*. Springer-Verlag, New York, 2002.)
- [Sh76] G. Shimura. The special values of the zeta functions associated with cuspforms. *Commun. Pure Appl. Math.* 29, pp. 783-804, 1976.
- [Sa97] T. Saito, Modular forms and p -adic Hodge theory, *Inventiones Matj.* 129. 607-620 (1997).
- [Sc90] A. Scholl, Motives for modular forms, *Inventiones Math.* 100, 419-430 (1990).
- [Vi] M. Visik, Nonarchimedean measures connected with Dirichlet series, *Math USSR Sb.* 28, 216-218.