

信用イベント発生強度モデルによる信用サイクル変動要因の分析

筑波大学／三井物産デジタル・アセットマネジメント株式会社 廣中 純

Jun Hironaka

University of Tsukuba／Mitsui & Co. Digital Asset Management, Ltd.

【Abstract】

本研究では、日本のクレジット市場で観測可能なファクター[マクロ要因および過去の信用イベント発生実績(格付機関による発行体格付の変更件数, 企業の倒産件数)]のほか, 市場で直接観測することができないファクター(それを **frailty** と名付ける)の存在を仮定し, これらを考慮した信用イベント(格上げ・格下げ・デフォルト)の発生しやすさ(発生強度)を表すモデルを提案する。

信用イベントのうち, 「格上げ」および「格下げ」の発生強度を表すモデルのパラメーターは, 95%の有意水準で統計的に有意であるとの結果を得た。またアウトオブサンプル期間(2013年1月1日～2022年3月31日)についてもほぼ同様の結果が得られた。

また信用イベントが「格下げ」である場合について, ①全てのファクター, ②マクロ要因のみ, ③マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ, ④マクロ要因+**frailty** のみ, で各々構成されるモデルについて, パラメーターの推定値および時間変更後の強度に対するKolmogorov-Smirnov検定を実施した結果, 全てのファクター(マクロ要因, 過去の信用イベントの影響, **frailty**)により構成されるモデルはその適合度に高い有意性が見られた。特に, 過去の信用イベントの影響および**frailty**はともに, モデルのパラメーターの推定値に大きく影響を及ぼすと考えられる。

次に, 総与信・GDP比率に代表される「信用サイクル」の変動要因を探るため, 「過去の信用イベントの影響+**frailty**」と信用サイクルとの関連性について, 1)レジーム・スイッチモデルによる, 「過去の信用イベントの影響+**frailty**」と信用サイクルのレジーム推移の比較, 2)インパルス応答関数による, 信用サイクルの構成要素にショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+**frailty**」に及ぼす影響の有無, および3)信用サイクルを構成する要素(GDP・総与信額)を状態空間モデルで表した場合における各成分[水準(level)・傾き(slope)]と「過去の信用イベントの影響+**frailty**」との間における, グレンジャーの意味での因果性の存在の有無, の3点から検証を行なった。

まず1)については, 総与信・GDP比率のレジームの推移と「過去の信用イベントの影響+**frailty**」のそれとは似通った傾向を示した。次に2)については, 「GDPの水準成分」「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP比率の水準成分・傾き成分」は「過去の信用イベントの影響+**frailty**」に長期的に影響を及ぼす点を示された。最後に3)については, 「GDPの水準成分」「総与信額の傾き成分」「総与信・GDPの水準成分・傾き成分」について, 「過去の信用イベントの影響+**frailty**」とグレンジャーの意味での因果性が見られた。

1. はじめに

銀行等の金融機関は, バーゼル規制の下で, 自社が保有する信用リスクのあるポートフォリオ(以下

「信用ポートフォリオ」という)について、デフォルト確率、デフォルト時損失(Loss Given Default, LGD)、景気後退期を考慮した LGD および信用 VaR(Value at Risk)等の信用リスク量を算出する。2007 年に顕在化したサブプライム問題や、2008 年 9 月のリーマン・ブラザーズの破綻を契機に拡大したグローバルな金融・経済危機における状況を踏まえ、金融機関の自己資本比率の安定的な維持を目的に導入されたバーゼルⅢでは、金融機関に対して自己資本の質・量の改善や景気後退期に取り崩しが可能となる追加的な資本の積み増し(資本バッファー)等を要請¹する。こうした新しい規制が金融機関の経営戦略や信用ポートフォリオのリスク量の算出プロセスに及ぼす影響は大きいと考えられる。

しかしながら、金融機関の自己資本比率は経済や金融環境に大きく左右されるため、その水準を安定的に維持することは容易ではない。例えば景気拡大期(好況期)においては、自己資本比率を高い水準に維持できるため、金融機関は過度にリスクを取ることが可能となる。一方、景気後退期(不況期)には、債務者のデフォルト確率やデフォルト時損失が悪化、金融機関のリスク・アセットの増加に伴う自己資本比率の低下を通じて、企業や個人に対する貸出等の信用供与が抑制される。その結果、景気の変動がより増幅される傾向にある点が指摘されている²。また、バーゼルⅢにて導入されたリスク・アセットのアウトプット・フロアにより、先進的内部格付手法を採用する金融機関のリスク・アセットが増大し、結果として自己資本比率が低下する可能性がある。そのため金融機関にとって、格付機関による格付を利用した標準的手法に基づくリスク・アセットの管理をより重視せざるを得ない状況となっている。一方、格付機関は、投資対象の信用リスクを判断する際の基準となる格付方式として、短期的な景気変動に左右されない「スルー・ザ・サイクル(Through-the-Cycle, TTC)格付³」を採用している。これはバーゼルⅢにおける格付の考え方に準拠するものである。⁴

以上により、金融機関はバーゼルⅢへの対応のため、格付機関による格付、金利・株価等のマクロ要因や、日本のクレジット市場(社債市場等)全体の信用リスクの変動、すなわち、「信用サイクル(例:総与信・GDP 比率に代表される、金融機関による信用供与額の拡大・縮小のトレンド)」を踏まえた信用ポートフォリオのリスク管理を行なう必要があると考える。

本研究は、上記を踏まえた信用ポートフォリオ管理方法として、Yamanaka et al.(2012)や Azizpour et al.(2018)で示された強度モデルを拡張し、市場で観測可能なファクター[マクロ要因および過去の信用イベントの発生実績(格付機関による発行体格付の変更件数、企業の倒産件数)]のほか、市場で直接観測することができないファクター(それを **frailty** と名付ける)の存在を仮定し、これらを考慮した信用イベントの発生しやすさ(発生強度)を表すモデル(以下「モデル」という)を提案する。またモデルにより、日本のクレジット市場における「信用サイクル」の変動要因の説明を試みる。

¹ 主な内容は次の通り。①自己資本の質および量の改善策としての最低自己資本比率の引き上げ(最低所要普通株等 Tier1 比率および Tier1 比率の最低水準を、各々 4.5%、6.0%に引き上げ)、②国際的に活動する銀行に対する流動性基準の導入[流動性カパレージ比率(LCR)、安定調達比率(NSFR)]の導入、③レバレッジを抑制するレバレッジ比率の導入、④好況時に、ストレス時に取り崩しが可能な資本バッファーを積み立て、⑤ストレス・テストの高度化。

² プロシクリカリティ(景気変動増幅効果)という。

³ スルー・ザ・サイクル格付は、格付の対象となる債務者の直近の決算状況ではなく、長期の景気変動の影響を勘案して決定される。そのため、景気の局面に応じて、格付毎のデフォルト確率を変動させる(そのため、ある債務者に付与された格付は景気の局面に関わらず一定)という特徴がある。一方、格付機関の従来の格付手法であるポイント・イン・タイム(Point-in-Time, PIT)格付は、債務者の直近の決算期の状況を重視して決定される。PIT 格付は、景気の局面に応じて債務者格付が変動する(景気悪化局面では格下げ傾向、景気改善局面では格上げ傾向となる)点に特徴がある。

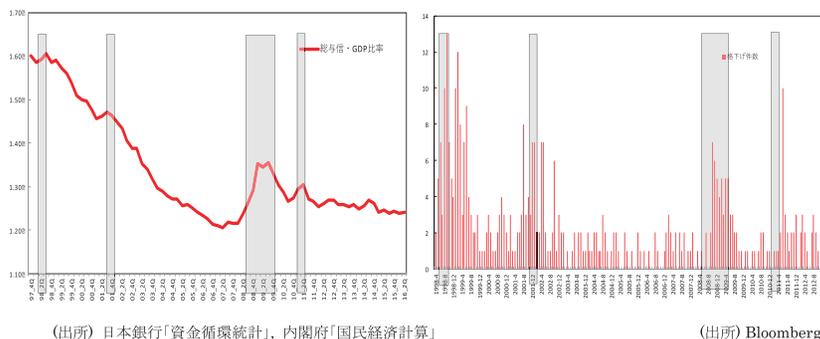
⁴ 2017 年 12 月に公表されたバーゼルⅢの最終規則では、外部格付を利用した標準的手法に基づくリスク・ウェイトの管理がより重視されることとなった。そのため、本研究における信用イベントの発生しやすさ(格付変更の発生しやすさ)を表現するモデルは、バーゼルⅢの主旨に則った信用リスク管理手法の 1 つを提示するものとする。

具体的には、まず、信用イベント(格上げ・格下げ・デフォルト)を信用サイクルの代理変数と仮定したうえで、各信用イベントの発生しやすさ(発生強度)を表すモデルを構築、そのパラメーターを推定する。次に、モデルを構成するファクター(マクロ要因、*frailty*、過去の信用イベントの影響)の組み合わせの違いによる、モデルの説明力の差異に対する検証を行なう。また、信用サイクルの変動要因を探るため、「過去の信用イベントの影響+*frailty*」と信用サイクルとの関連性について、1)レジーム・スイッチモデルによる、「過去の信用イベントの影響+*frailty*」と信用サイクルのレジーム推移の比較、2)信用サイクルを構成する要素(GDP および総与信額)を状態空間モデルで表した場合における各成分[水準(level)・傾き(slope)]と「過去の信用イベントの影響+*frailty*」との間で、グレンジャーの意味での因果性の存在の有無、および 3)インパルス応答関数による、信用サイクルの構成要素にショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+*frailty*」に及ぼす影響、の3点から検証を行なう。

日本のクレジット市場における信用サイクルを示す例として、日本銀行が公表する「総与信・GDP 比率」を挙げることができる⁵。総与信・GDP 比率は、同行が公表する資金循環統計における企業・家計等向けに対する民間金融機関貸出等の合計値を GDP で除した数値で定義される。

図1は、総与信・GDP 比率の推移(左図、対象期間:1997年12月~2016年6月)、および株式会社格付投資情報センター(R&I)が公表する発行体格付のうち、格下げ件数の推移(右図、対象期間:1998年4月~2012年12月)を示したものである。また図中の網掛けは「景気後退期」を表しており、日本銀行が公表する景気動向指数のうち Composite Index 値が3期以上にわたり連続して下落した期間と定義する(すなわち、総与信・GDP 比率が上昇している期間⁶が「景気後退期」に相当する)。

(図1) 総与信・GDP 比率の推移(左図)および格下げ件数(R&I)の推移(右図)



上記の対象期間を通じ、金融機関の総与信額はほぼ一定の水準で推移する一方で、GDP は景気動向により変化するため、これが信用サイクルの変動要因となっていると考えられる。そのため、金融機関にとって、信用サイクルを勘案した自社ポートフォリオの信用リスク管理を実施することは困難である。また、格下げ件数が増加している期間は景気後退期とほぼ一致していることが見て取れる。

以上より、日本のクレジット市場全体の信用サイクルは、格付機関による信用イベント(格上げ・格下

⁵ 金融システムレポートにて公開している。なお各国の中央銀行が公表する信用サイクルの定義もほぼ同様である。

⁶ 図1の網掛け部分(景気後退期)は、各々、1997年第4四半期-1998年第3四半期:アジア通貨危機時、2001年第1四半期-2002年第1四半期:ネットバブル崩壊時、2008年第2四半期-2009年第1四半期:リーマン・ショック時、2011年第1四半期-同年第2四半期:東日本大震災時を示している。

げ・デフォルト)にて代替することができると考えられる。⁷

2. 先行研究

次に、過去のデフォルト実績、経済指標等のマクロ要因や *frailty* をモデルのファクターとして、デフォルトの集積(default clustering)要因の説明や信用ポートフォリオの格付推移確率の推定を試みた先行研究を紹介する。

まず Koopman et al.(2009)は、Standard & Poor's による格付推移データおよび格付対象企業のデフォルト実績に基づき、マクロ要因(GDP・マネーサプライ・インフレ率等)と格付推移との関連性を検証し、格付の変更事象、特に「格下げ」と「デフォルト」に大きく影響するのは潜在変数(latent factor)、すなわち *frailty* であり、マクロ要因が格付変更に及ぼす影響は限定的であるとの分析結果を示した。

なお Koopman et al.(2009)では、格付推移の強度(ある企業の格付が特定の格付に推移する強度)を比例ハザード過程で表すとともに、*frailty* は AR(1)過程に従うと仮定した。

次に Duffie et al.(2009)は、金融機関を除く米国上場企業のデフォルト発生強度モデルを構築し、マクロ要因(株価指数・米国債利回り等)や Moody's による過去のデフォルト実績(対象期間:1974年~2004年)等の観測可能なファクターに加え、個別企業間のデフォルトの依存構造に強い影響を及ぼすと考えられる観測不可能な common dynamic latent ファクター、すなわち *frailty* の存在の有無について検証した。

Duffie et al.(2009)のモデルでは、個別企業のデフォルト発生強度を比例ハザード過程に、*frailty* は Ornstein-Uhlenbeck(OU)過程に各々従うと仮定した。これらの仮定に基づき、デフォルト発生強度の尤度関数を最大にするパラメーターのセットを最尤法により推定し、個別企業に共通かつ観測不可能なファクター(*frailty*)の時系列の推移および条件付きの事後分布の推定を行なった。⁸

また Yamanaka et al.(2012)は、R&I による日本企業の格付変更データに基づき、日本経済全体の信用イベント(格上げ・格下げ・デフォルト)を表す強度モデルを提案した。なおモデルは自励的(self-exciting)過程に従い、かつ状態依存するものと仮定した⁹。

更に確率的細分化(random thinning)により、日本経済全体の信用イベントの発生強度を個別ポートフォリオの信用イベント発生強度に割り当てたうえで、個別ポートフォリオの信用 VaR 等のリスク量を推定した。

最後に、本研究で提案する信用イベント発生強度モデルを構築する際に参考とした Azizpour et al.(2018)では、Moody's による過去のデフォルト実績(対象期間:1970年~2010年)、マクロ要因および *frailty* の3つのファクターにて米国経済全体のデフォルト強度モデルを構築し、米国企業におけるデフ

⁷ 日本銀行が公表する総与信額には、格付機関による格付が付与されていない企業に対する与信額が含まれており、これも信用サイクルを構成する要素であると考えられるが、本研究では考慮しない。また上場企業を含め約120万社の企業の信用状況の調査業務を行なう株式会社帝国データバンクが公表する倒産データ(倒産時の負債総額が1,000万円以上の企業で構成)によると、2000年4月以降の月間倒産件数は約900件に及ぶ。リーマン・ショック前後においても約1,100件と大きな変化はないことから、与信先企業に対する金融機関の与信内容が変化しているものと考えられる。そのため、本研究における信用サイクル分析のためのデータには適さないと考えられる。また本研究では、信用サイクルの転換点の推定は行っていない。

⁸ 具体的には EM(Expectation-Maximization) algorithm を応用し、*frailty* のパラメーター k および η を推定するため、*frailty* のサンプル・パスを Markov Chain Monte Carlo の Gibbs Sampler にて生成する。

⁹ スタンフォード大学の Giesecke 等が提唱する「トップダウン・アプローチ」を信用リスクモデルの基本概念とする。トップダウン・アプローチでは、ポートフォリオを構成する個別債務者の信用リスクの特性をひとまず置き、ポートフォリオ内でデフォルトイベントがいつ発生するのかに注目する。

ォルト集積(default clustering)の源泉が、主として frailty とデフォルトの伝播(default contagion)にある点を明らかにした。なお末尾に、主な先行研究における frailty の前提やマクロ要因の種類等をまとめた。

なお筆者が知る限り、日本のクレジット市場全体における信用リスクの変動を説明することを目的に、市場で観測可能なファクターに加え、市場で観測できないファクター(frailty)を考慮した信用イベントの発生強度モデルを提案した先行研究はこれまでに存在しないと考える。また信用サイクルの変動と frailty との関連性を検証する試みは、金融機関による資本バッファー規制への対応やシステミック・リスクの計測手法等への適用につながる可能性があると考えるところから、新規性を有すると思われる。

3. 信用イベント発生強度モデル

本章では、Koopman et al.(2009), Yamanaka et al.(2012)および Azizpour et al.(2018)¹⁰で提示された強度モデルを拡張し、観測可能なファクター(マクロ要因・過去の信用イベント)と観測不可能なファクター(frailty)を考慮した、信用イベントの発生強度を表すモデルを示す。

まず信用イベントの発生強度モデルの内容について説明する。フィルトレーション付きの完備確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ [(\mathcal{F}_t) :完全フィルトレーション], $0 < T_1^i < T_2^i < \dots \in \{\mathcal{F}_t\}$ 適な点過程とする(T_n^i : イベント*i*の発生時刻)。また観測フィルトレーション $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ¹¹の下での計数過程を $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n^i \leq t\}}$, λ_t^i を N_t^i に対する $\{\mathcal{F}_t\}$ 補正過程とすると、 $N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds$ は局所マルチンゲールとなる。

また、R&I が Bloomberg 等を通じて公表する発行体格付の変更を「信用イベント([$i = 1$ (格上げ), $i = 2$ (格下げ), $i = 3$ (デフォルト)])と見做し、「格上げ」「格下げ」「デフォルト(ただし、BBB 格未満を「デフォルト」状態とする)」の各信用イベントが発生する強度を表すモデルを考える。また、本研究において信用イベントと見做す「格付の変更」は、日本のクレジット市場全体の信用拡張・信用収縮(信用サイクル)の代理変数であると仮定する。

以上の前提に基づき、信用イベント発生の強度(λ_t^i)を次の式で表す。

$$\lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + b Y_t^i + \delta \sum_{n \leq N_t^i} \exp(-\kappa(t - T_n^i)) \ell(R_n^i) \quad (1)$$

各々の変数は以下の通りとする。

X_t : マクロ要因(観測可能なファクター)¹²

Y_t^i : frailty(観測不可能なファクター)¹³

$$dY_t^i = z^i(c^i - Y_t^i)dt + \sqrt{Y_t^i}dW_t^i, \quad z, c \geq 0, \quad 2zc \geq 1$$

$\sum_{n \leq N_t} \exp(-\kappa(t - T_n^i)) \ell(R_n^i)$: 過去の信用イベントの影響(観測可能なファクター)¹⁴

¹⁰ 本研究の軸となる filtered intensity の計算方法については、Azizpour et al.(2018)の working paper 段階のバージョンである Azizpour et al.(2012)に詳細に記述されている。また、本研究の理論面については、Giesecke and Schwenkler (2018)を参照した。

¹¹ 観測値は、「マクロ要因」「企業の倒産件数」の2種類である。

¹² 実質 GDP 成長率、鉱工業生産成長率、株価指数(TOPIX・日経平均株価指数等)の収益率、株価指数ボラティリティ、日本国債10年物利回り、短期国債・長期国債イールドスプレッド、社債イールドスプレッド(AAA 格・BBB 格)、M3(マネーストック)等。

¹³ Duffie et al.(2009)は、frailty が中心回帰性を持つ OU 過程に従うと仮定している。OU 過程では frailty が負値となる可能性がある点を踏まえ、本研究では frailty を Cox-Ingersoll-Ross(CIR)モデルに類似する形とした。なお、Azizpour et al.(2018)では、CIR モデルのパラメーターであるボラティリティ項 σ の有無がパラメーター推定値に及ぼす影響は極めて小さいことが示されている。

¹⁴ 過去の信用イベントの影響は Hawkes 過程に従い、ある企業の信用力の変化が他の企業に伝搬すると仮定する。また1日に複

$$\ell(R_n^i) = \sum_{k=1}^{N_i} \eta_k^i, \quad \eta: \text{発行体格付の変更件数の累積値}$$

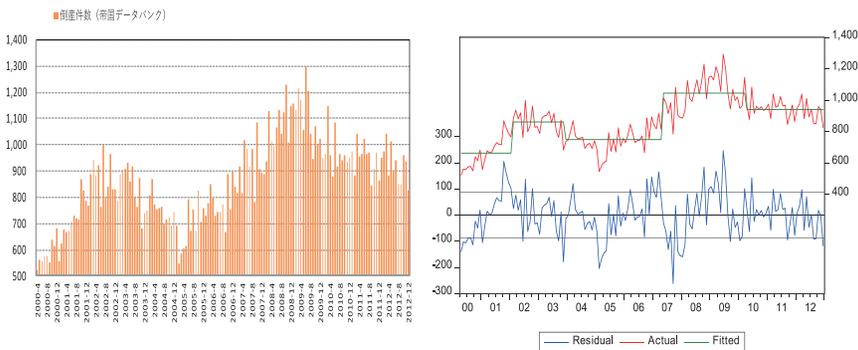
マクロ要因のファクターは、格付変更件数(被説明変数)とファクターの候補(説明変数)とのポアソン回帰により、実質GDP成長率(ラグ:4)、M3(マネーストック、対数値)、東証株価指数(TOPIX)の収益率(日次)、社債のイールドスプレッド(AAA格-BBB格、日次)および非流動性指標(対数値)の5種類を選択した。なお非流動性指標については、東証株価指数を対象とし、Amihud(2012)に従い以下の式で算出する。

$$\frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \frac{\frac{(H_d - L_d)}{((H_d - L_d)/2)}}{V_d \cdot (H_d + L_d)/2} \quad H_d: \text{第 } d \text{ 日目の高値, } L_d: \text{第 } d \text{ 日目の安値, } V_d: \text{出来高}$$

また、「過去の信用イベントの影響」を表す代理変数として、R&Iが公表する発行体格付の変更件数の累積値を用いた。なお、信用イベント発生強度モデルのパラメーターの更なる精緻化を目的として、株式会社帝国データバンクが公表する負債総額1,000万円以上の企業倒産件数も「過去の信用イベントの影響」を表す代理変数の候補とした。

図2は、同社が公表する企業倒産件数の月次推移(左)と、Bai(1997)により提唱されたブレイクポイント付き回帰に基づく企業倒産件数のレジーム分割(右)である。これらより、図1の景気後退期(2001年第1四半期～2002年第1四半期、2008年第2四半期～2009年第1四半期等)には企業の倒産件数も増加していること、および同時期には連鎖的な企業倒産を示唆するレジームの変化を見て取ることができる。

(図2) 企業倒産件数の推移(左)および企業倒産件数のレジーム分割(右) (2000年4月1日・2012年12月31日)



以上より、本研究における信用イベント発生強度モデルを「観測可能なファクター」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の3つで構成されるものと仮定する。

数件の信用イベントが同時に発生した場合においても、これらは互いに独立に発生したものと見做す。

次に、信用イベント発生強度モデルのパラメーターの推定方法について説明する。

(1)式に基づく下記の尤度関数 $\mathcal{L}_t(\theta)$ を最大にするパラメーターを最尤法により推定する。

$$\mathcal{L}_t(\theta) \propto \mathbb{E}^*[1/Z_\tau | \mathcal{G}_\tau], \quad \mathbb{E}[Z_\tau | \mathcal{G}_\tau] = 1 \quad (2)$$

推定すべきパラメーターのセットは、 $\theta = (a_0, a_k, b, z, c, \delta, \kappa)$ である $[(a_0, a_k)$:マクロ要因, (b, z, c) : frailty, (δ, κ) : 過去の信用イベントの影響].

(2)式における \mathbb{E}^* は、Radon-Nikodym 微分による測度変換

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_t = \exp\left(-\int_0^t \log(\lambda_{s-}) dN_s + \int_0^t (1 - \lambda_t) ds\right)$$

で定義される、パラメーター θ を所与とした場合の \mathbb{P}^* (リスク中立確率)の下での期待値となる。

モデルのデータは観測値のみを含み, frailty を含んでいない. そのため, Azizpour et al.(2012) の Proposition 4.1 に基づき, 観測フィルトレーションを条件とするフィルター付きの強度 (filtered intensity) h_t に変換する[(3)式]¹⁵.

$$h_t = \mathbb{E}(\lambda_t | \mathcal{G}) = \mathbb{E}^*(\lambda_t / Z_t | \mathcal{G}) / \mathbb{E}^*(1 / \lambda_t | \mathcal{G}), \quad a. s. \quad (3)$$

なお, filtered intensity h_t の具体的な形は以下の通りである.

$$h_t^i = \frac{\mathbb{E}_\theta^*(\lambda_t^i \exp(\int_0^t \log(\lambda_{s-}^i) dN_s + \int_0^t (1 - \lambda_s^i) ds) | \mathcal{G}_t)}{\mathbb{E}_\theta^*(\exp(\int_0^t \log(\lambda_{s-}^i) dN_s + \int_0^t (1 - \lambda_s^i) ds) | \mathcal{G}_t)}, \quad a. s. \quad (4)$$

Azizpour et al.(2018)に従い, (4)式を下記の(5)式にて計算する.

$$\mathbb{E}^*(u(\lambda_t) / Z_t | \mathcal{G}_t) = \exp(t) \mathbb{E}^*(u(\lambda_t) \phi(T_{N_t}, t) \prod_{n=1}^{N_t} \lambda_{T_n} \phi(T_{n-1}, T_n) | \mathcal{G}_t) \quad (5)$$

ただし,

$$\Pi_t = u(\lambda_t) \exp\left(\int_0^t \log(\lambda_{s-}) dN_s\right)$$

$$\phi(m, n) = \Phi(m, n) \exp\left(-\int_m^n \left[e^{a(1, X_s)} + \delta \sum_{n \leq N_t} \exp(-\kappa^i (s - T_n^i)) \ell(R_n^i)\right] ds\right)$$

$$\Phi(m, n) = \frac{I_q(\sqrt{Y_m Y_n})^{4l} \cdot e^{-0.5l(n-m)}}{1 - e^{-l(n-m)}} \cdot \frac{l e^{-0.5(1-z)} (1 - e^{-z(n-m)})}{z(1 - e^{-z(n-m)})} \cdot e^{(Y_m + Y_n) \left[\frac{z(1 + e^{-z(n-m)})}{1 - e^{-z(n-m)}} \frac{l(1 + e^{-l(n-m)})}{1 - e^{-l(n-m)}} \right]}$$

$$l = \sqrt{z^2 + 2b} \quad I_q: \text{修正ベッセル関数}$$

¹⁵ λ_t の事後平均 (posterior mean) であり, 観測フィルトレーションへの射影 (optional projection) となる。

尤度関数 $\mathcal{L}_\tau(\theta)$ のパラメーターを推定後、時間変更を行なったフィルター付きの強度 h_t に対してKolmogorov-Smirnov 検定を行い、強度 h_t が標準ポアソン過程に従うか否かを確認する。¹⁶

次に、「格上げ」「格下げ」「デフォルト」の各強度モデルのパラメーターについて、①全てのファクター(マクロ要因, frailty, 過去の信用イベントの影響), ②マクロ要因のみ, ③マクロ要因と過去の信用イベントの影響, および④マクロ要因と frailty の 4 パターンのモデルに対して、標準誤差の推定および時間変更に対する Kolmogorov-Smirnov 検定を「格上げ」「格下げ」「デフォルト」の各強度モデルに対して行い、95%水準で統計的有意性を検定する。なお、上記①～④のモデルの具体的な形は以下の通りである。

$$\textcircled{1} \quad \lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + bY_t^i + \delta \sum_{n \leq N_t} \exp(-\kappa(t - T_n^i)) \ell(R_n^i)$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t})$$

$$\textcircled{3} \quad \lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + \delta \sum_{n \leq N_t} \exp(-\kappa(t - T_n^i)) \ell(R_n^i)$$

$$\textcircled{4} \quad \lambda_t^i = \exp(a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X_{k,t}) + bY_t^i$$

また尤度比検定により, frailty や過去の信用イベントの影響を考慮する場合と考慮しない場合におけるモデルの説明力を検証する。また、アウトオブサンプル期間(2013年1月1日～2022年3月31日)について上記を検証する。

なお、モデルのパラメーター推定に用いたデータは Bloomberg より取得し、データの対象期間は2000年4月1日から2012年12月31日とした。また発行体格付変更データは、R&I が公表する日本国内企業の発行体格付の変更履歴データとした¹⁷

4. 推定結果

本章では、前章で示した方法に基づいて行なったモデルのパラメーター推定結果等を示す。

まず、信用イベント別のモデルのパラメーター推定結果は次頁の表 1 の通りとなった。

¹⁶ C_t を $A_t = \int_0^t h_s d_s$ の右連続の逆関数とするとき、計数過程 N_{C_t} は $[0, A_t)$ は確率測度 \mathbb{P} およびフィルトレーション (\mathcal{G}_{C_t}) について、標準ポアソン過程となる(cf. Azizpour et al.(2012) Proposition 4.2).

¹⁷ R&I 以外の格付機関[Moody's, Standard & Poor's, 日本格付研究所(JCR)等]も日本企業の発行体格付を公表しているが、R&I による日本企業の発行体格付数が最も多いため、本研究のデータとして採用した。

(表 1) 信用イベント別のモデルのパラメーター推定結果

信用イベント	推定値	a_0 (定数)	a_1 (GDP成長率)	a_2 (M3)	a_3 (TOPIX)	a_4 (社債 イールドスプレッド)	a_5 (非流動性指標)
格上げ	パラメーター	-1.421	0.063	-0.051	0.031	-0.023	-0.043
	標準誤差	(0.503)	(0.022)	(0.024)	(0.004)	(0.009)	(0.021)
格下げ	パラメーター	-1.698	-0.219	0.111	-0.021	0.014	0.027
	標準誤差	(0.602)	(0.036)	(0.005)	(0.007)	(0.003)	(0.009)
デフォルト	パラメーター	-0.911	-0.102	0.001	-0.0076	0.002	0.023
	標準誤差	(0.436)	(0.002)	(0.000)	(0.001)	(0.000)	(0.015)

信用イベント	推定値	b	z	c	δ	κ
格上げ	パラメーター	0.152	2.925	0.002	-0.013	0.034
	標準誤差	(0.074)	(1.369)	(0.001)	(0.009)	(0.020)
格下げ	パラメーター	0.213	4.006	0.005	0.014	0.060
	標準誤差	(0.089)	(1.823)	(0.002)	(0.007)	(0.030)
デフォルト	パラメーター	0.099	2.063	0.0004	0.008	0.021
	標準誤差	(0.071)	(1.007)	(0.0003)	(0.005)	(0.015)

※マクロ要因は、ステップワイズ変数減少法により、AIC が最小となる組合せとした。また社債イールドスプレッドは、AAA 格社債・BBB 格社債の平均イールドスプレッドの差分とした。

表 1 より、「格上げ」「格下げ」の各場合について、「マクロ要因」「frailty」および「過去の信用イベントの影響」に関するパラメーターは、95%の有意水準で概ね統計的に有意であるとの結果を得た。また観測可能ファクターのうち実質 GDP 成長率は、「格上げ」「格下げ」「デフォルト」の全ての信用イベントについて、95%の有意水準で統計的に有意であった点に加え、他のマクロ要因ファクターと比較し、モデルに対する寄与度も大きいと推定された。

なお、表 1 の「格下げ」「デフォルト」の各信用イベントにおける「過去の信用イベントの影響」のパラメーター(枠線部分)について、「企業倒産件数」を代理変数としてパラメーターを推定した結果は表 2 の通りである。格付変更件数の累積値の場合と比較すると、「過去の信用イベントの影響」のパラメーター推定値の精度は向上した(表 2 の枠線部分)。

(表 2) 「過去の信用イベントの影響」をモデルのパラメーターとした場合の推定結果(格下げ・デフォルト)

信用イベント	推定値	a_0 (定数)	a_1 (GDP成長率)	a_2 (M3)	a_3 (TOPIX)	a_4 (社債 イールドスプレッド)	a_5 (非流動性指標)
格下げ	パラメーター	-1.896	-0.245	0.015	-0.041	0.016	0.031
	標準誤差	(0.747)	(0.097)	(0.007)	(0.018)	(0.004)	(0.013)
デフォルト	パラメーター	-1.204	-0.157	0.002	-0.0092	0.003	0.027
	標準誤差	(0.578)	(0.009)	(0.000)	(0.004)	(0.001)	(0.014)

信用イベント	推定値	b	z	c	δ	κ
格下げ	パラメーター	0.225	3.987	0.007	0.018	0.090
	標準誤差	(0.090)	(1.906)	(0.002)	(0.006)	(0.020)
デフォルト	パラメーター	0.103	2.157	0.001	0.010	0.043
	標準誤差	(0.061)	(1.023)	(0.0004)	(0.002)	(0.022)

表 3 は、信用イベントが格下げである場合について、①全てのファクター、②マクロ要因のみ、③マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ、④マクロ要因+frailty のみ、の各々で構成されるモデルについて、パラメーターの推定値および Kolmogorov-Smirnov 検定の結果を示している。これによる

と、「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の全てのファクターを含むモデルは、Kolmogorov-Smirnov 検定の結果、統計的有意性が最も高いと考えられる。また実質 GDP 成長率は、①全てのファクター、②マクロ要因のみ、および③マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ、で構成される各モデルにおいて説明力の高いファクターとなる点、および「過去の信用イベントの影響+frailty」は、ファクターとしての寄与度が高い点が示された。

(表 3) モデル別のパラメーター推定値(信用イベント:格下げ)

	①:全ファクター	②:マクロ要因	③:マクロ要因+過去の信用イベントの影響	④:マクロ要因+frailty
a_0 (定数)	-1,698 (0,602)	-1,013 (0,147)	-1,223 (0,489)	-1,200 (0,361)
a_1 :GDP成長率	-0,219 (0,053)	-0,157 (0,043)	-0,108 (0,029)	-0,093 (0,028)
a_2 :M3 = マネーストック	0,011 (0,005)	-	-	-
a_3 :TOPIX	-0,021 (0,007)	-0,009 (0,004)	-0,013 (0,006)	-0,010 (0,004)
a_4 :社債イールドスプレッド	0,014 (0,003)	0,006 (0,002)	0,004 (0,001)	0,003 (0,000)
a_5 :LN非流動性指標	0,027 (0,009)	-	-	-
b	0,213 (0,089)	-	-	0,127 (0,045)
z	4,006 (1,823)	-	-	3,421 (1,512)
c	0,005 (0,002)	-	-	0,003 (0,001)
d	0,014 (0,005)	-	0,012 (0,006)	-
e	0,060 (0,012)	-	0,047 (0,023)	-
AIC	-1,588,46	-944,44	-1,282,22	-1,195,48
Kolmogorov - Smirnov Test	0,000	0,007	0,002	0,005
対数尤度	795,23	473,22	642,11	598,74

表 4 は、表 3 と同様に、信用イベントが「格下げ」である場合について、マクロ要因を含むベンチマークモデルに対して、①マクロ要因+過去の信用イベントの影響のみ、②マクロ要因+frailty のみ、および③全てのファクターで構成されるモデルを、各々代替モデルとして尤度比検定を行なった結果を示す。

(表 4) 各モデル間の尤度比検定(信用イベント:格下げ)

ベンチマークモデル (代替モデル)	マクロ要因 (マクロ要因+過去の信用イベント)	マクロ要因 (マクロ要因+frailty)	マクロ要因 (全ファクター)	マクロ要因+frailty (全ファクター)
検定統計量	321.78	301.22	330.62	275.28
自由度	3	2	5	2
p 値	0.002	0.004	0.000	0.056

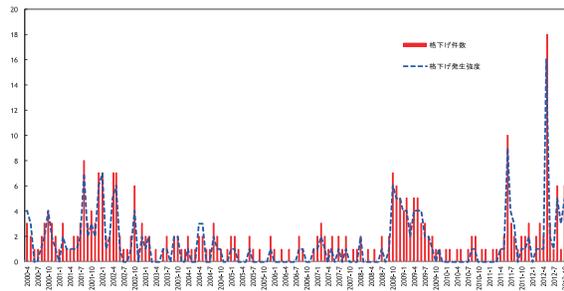
表 4 より、frailty を含むモデルを代替モデルとして尤度比検定を行なった場合には、いずれも統計的に有意であることが示された。

以上により、R&I による日本企業の格付変更履歴データを用いたモデルのパラメーター推定値、Kolmogorov-Smirnov 検定および尤度比検定の各結果を踏まえると、日本のクレジット市場において

frailty の存在が示唆されると考えられる。¹⁸ また, frailty を含む全てのファクターにより構成されたモデルは, 日本のクレジット市場の変動(信用サイクルの変動)をより良く説明できる可能性があると考えられる. 特に「過去の信用イベントの影響」と「frailty」は, 信用イベントの発生のしやすさを説明するファクターとして統計的有意性を有する点は, Azizpour et al.(2018)で示された結果と整合的であると考えられる.

図 3 は, 上記の結果を踏まえ, 格下げ件数と格下げ発生強度の推移を示したものである. 本研究で提案する信用イベント発生強度モデルは, 格下げ件数の推移を概ね捉えていると考えられる. なおアウトオブサンプル期間(2013年1月1日~2022年3月31日)についても同様の検証を行なったが, 上記とほぼ同様の結果が示された.

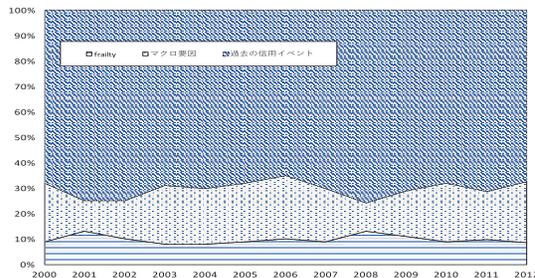
(図 3) 格下げ件数と格下げ発生強度の推移 (2000年4月1日-2012年12月31日)



また図 4 は, 格下げ発生強度モデルのパラメーター推定値に基づき, 当該モデルの期待値(事後平均)を算出したうえで, 「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の各々について, 2000年から2012年までの間における各ファクターの構成比の月次推移を示した.

図 4 を見る限り, 景気後退期において「過去の信用イベントの影響」および「frailty」の構成比が高くなるため, これらが日本のクレジット市場における信用サイクルの変動に何らかの影響を及ぼしている可能性があると思定される. ただしその影響度の推定にあたっては, 更に精緻な検証を要する.

(図 4) 格下げ発生強度の構成比推移 (2000年4月1日-2012年12月31日)



※「過去の信用イベントの影響」の構成比は, 他のファクターに比較して相対的に高い水準で推移している. 特に景気後退期(例: 2001年, 2008年)には顕著な傾向を示している.

¹⁸ 「格上げ」および「デフォルト」の場合もほぼ同様の結果が得られた.

5. 信用サイクルの変動要因

本章では、信用サイクルの変動要因の検証を試みる。まず、主な先行研究について紹介する。

まず Amato and Furfine(2004)は、景気循環(ビジネス・サイクル)と格付の変更との関連性の有無を検証した。次に Koopman et al. (2009)は、common latent factor(frailty)とGDP 成長率との間の相互依存性を検証した。また Koopman et al.(2011)は、景気拡大期および景気後退期における frailty の変動要因のモデル化を行なった。

信用サイクルの変動に大きく影響を与えるファクターは GDP 成長率であると結論付けている先行研究が多いと考えられる。

本章では、日本のクレジット市場における信用サイクルを表す「総与信・GDP 比率」に影響を及ぼす可能性があると考えられる「過去の信用イベントの影響+frailty」と信用サイクルとの関連性について、1) レジーム・スイッチモデルによる「過去の信用イベントの影響+frailty」と信用サイクルのレジーム推移の比較、2)信用サイクルを構成する要素(GDP, 総与信)を線形ガウス状態空間モデルで表現した場合における各成分[水準(level)・傾き(slope)]と「過去の信用イベントの影響+frailty」との間で、グレンジャーの意味での因果性の存在の有無、および 3)インパルス応答関数による、信用サイクルの構成要素にショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+frailty」の変化の推移、の 3 点から検証を行なう。

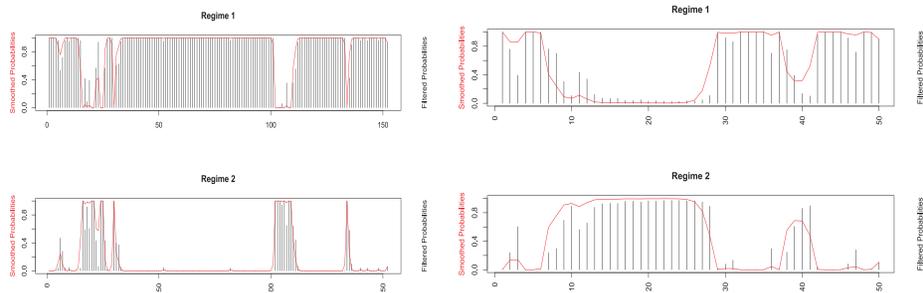
まず Hamilton(1994)に基づき、2 状態のレジーム(レジーム 1: 景気拡大期, レジーム 2: 景気後退期)を仮定する。以下の式に基づき尤度関数を最大化することにより、パラメーターの推定を行なう。

$$Y_t^i = \phi_{11} + \phi_{21}Y_{t-1}^i + \phi_1\varepsilon_t, \quad S_t = 1 \quad (\text{レジーム 1})$$

$$Y_t^i = \phi_{12} + \phi_{22}Y_{t-1}^i + \phi_2\varepsilon_t, \quad S_t = 2 \quad (\text{レジーム 2})$$

図 5 は、frailty(「格下げ」の場合)と、日本における信用サイクルを示すと考えられる「総与信・GDP 比率」のレジームの推移を示す(対象期間:1998年4月1日 - 2012年12月31日)。また表 4 は、各レジーム・スイッチモデルのパラメーター推定値を示す。

(図 5) レジームの推移 「過去の信用イベントの影響+frailty」(格下げ) (左)、総与信・GDP 比率 (右)
(2000年4月1日~2012年12月31日)



レジーム 1: 景気拡大期 レジーム 2: 景気後退期 (左)

レジーム 1: 景気拡大期 レジーム 2: 景気後退期 (右)

(表 5) パラメーター推定値等「過去の信用イベントの影響+frailty」(格下げ) (左), 総与信・GDP 比率 (右)
(2000年4月1日～2012年12月31日)

		推定値	標準偏差	t値	p値
ϕ_{11}	景気拡大	1.033	0.120	8.602	0.000
ϕ_{21}	景気拡大	0.186	0.063	2.946	0.003
ϕ_{12}	景気後退	5.988	1.596	3.759	0.000
ϕ_{22}	景気後退	-0.214	0.287	-0.748	0.455

		推定値	標準偏差	t値	p値
ϕ_{11}	景気後退	0.093	0.048	1.948	0.051
ϕ_{21}	景気後退	0.928	0.038	24.686	0.000
ϕ_{12}	景気拡大	0.007	0.022	3.149	0.002
ϕ_{22}	景気拡大	0.937	0.017	55.100	0.000

※残差項の標準偏差: 0.9052(レジーム 1), 2.0759(レジーム 2)

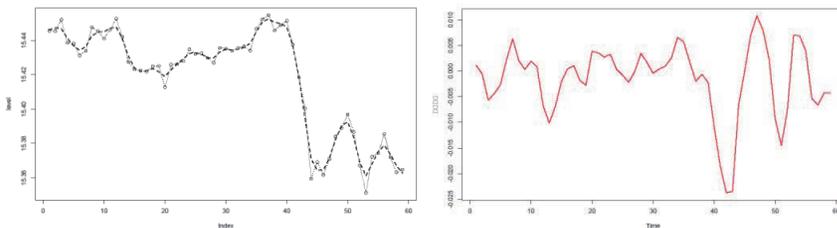
※残差項の標準偏差: 0.0175(レジーム 1), 0.0051(レジーム 2)

上記により、「過去の信用イベントの影響+frailty」と総与信・GDP 比率のレジームの推移は似通った傾向にあることが示された。しかしながら、「過去の信用イベントの影響+frailty」におけるレジーム 2(景気後退期)のパラメーターおよび総与信・GDP 比率におけるレジーム 1(景気後退期)のパラメーターについて 95%有意水準にて統計的に有意ではないとの結果が示された(表 5)。これは、各々に景気後退期の特徴を示していない期間が存在することを意味しており、その背景や要因については更に検証を要する。

次に、総与信・GDP 比率の構成要素である「GDP」「総与信額」(いずれも対数値)「総与信・GDP 比率」が「過去の信用イベントの影響+frailty」の挙動に及ぼす影響について検証する(対象期間: 2000年4月1日～2012年12月31日)。具体的には、まず、1) 「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各々について、2 次のトレンドを有する線形ガウス状態空間モデル(linear Gaussian state space model)の、平滑化状態における水準(level)および傾き(slope)の 2 成分に分解(図 6)し¹⁹、2) 各成分が「過去の信用イベントの影響+frailty」の挙動に及ぼす影響をインパルス応答関数により定量的に把握するとともに、3) 各成分・「過去の信用イベントの影響+frailty」間におけるグレンジャーの意味での因果性(Granger causality)の存在の有無の検定を行なう。

(図 6) 「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の平滑化状態における各成分の推移

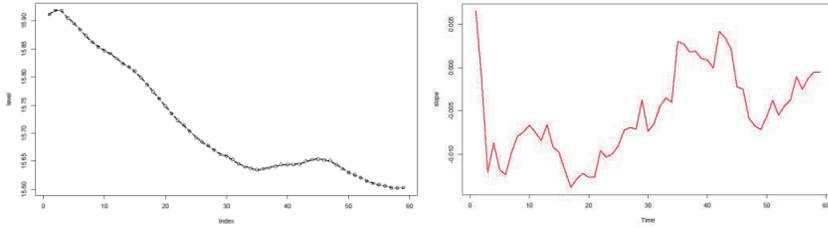
(a) GDP(対数値)



※左図の○線は原系列、破線は平滑化状態における水準成分、右図の実線(赤)は平滑化状態における傾き成分の推移を示す。

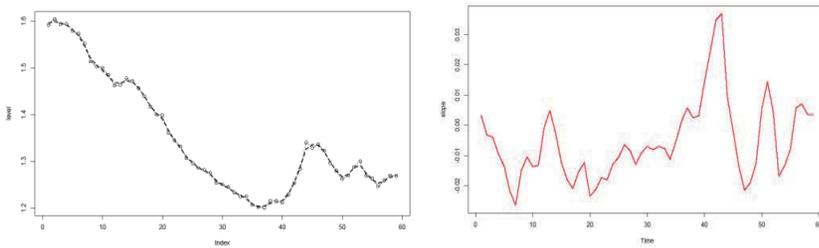
¹⁹ 「過去の信用イベントの影響+frailty」への中長期的な影響を検証するため、短期的な変動の要因である季節(seasonal)成分への分解は行わなかった。

(b) 総与信額(対数値)



※左図の○線は原系列, 破線は平滑化状態における水準成分, 右図の実線(赤)は平滑化状態における傾き成分の推移を示す。

(c) 総与信・GDP比率



※左図の○線は原系列, 破線は平滑化状態における水準成分, 右図の実線(赤)は平滑化状態における傾き成分の推移を示す。

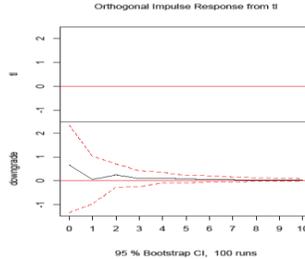
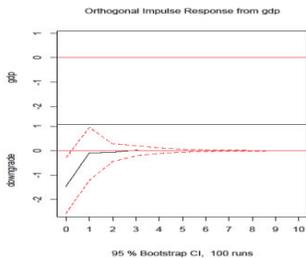
図 6 より、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」は、景気後退期において傾き成分の変動が大きい点で共通している。

次に、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各々について、「原系列」「水準成分」「傾き成分」の各々に対してショックを与えた場合における「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響をインパルス応答関数により検証した(図 7 および図 8).²⁰

(図 7) GDP および総与信額が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響 (原系列)

(a) GDP →「過去の信用イベントの影響+frailty」

(b) 総与信額 →「過去の信用イベントの影響+frailty」

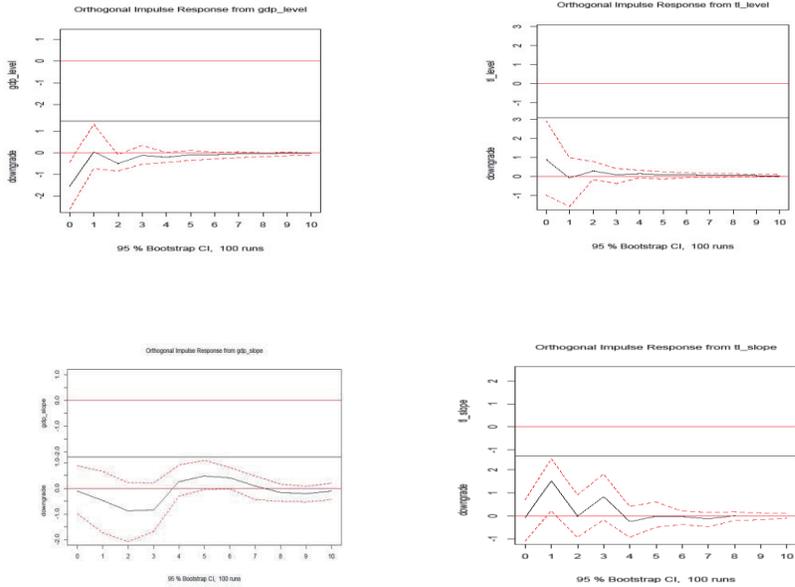


²⁰ 原系列および各成分が定常過程に従う点や共和分を考慮し、グレンジャー因果性・インパルス応答関数の推定を行なった。

(図 7 続き) GDP および総与信額が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響
(上段: 水準成分, 下段: 傾き成分)

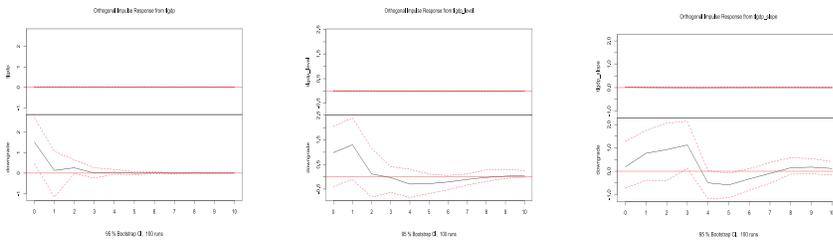
(a) GDP → 「過去の信用イベントの影響+frailty」

(b) 総与信額 → 「過去の信用イベントの影響+frailty」



※10 期先までの予測。なお破線は、95%の信頼水準を示す。

(図 8) 総与信額・GDP 比率が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響
(左図: 原系列, 中図: 水準成分, 右図: 傾き成分)



※10 期先までの予測。なお破線は、95%の信頼水準を示す。

図 7 および図 8 より, 「GDP の水準成分」「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP 比率の水準成分・傾き成分」が「過去の信用イベントの影響+frailty」に及ぼす影響は長期に及ぶと想定される。

また、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の原系列および各成分(水準成分および傾き成分)から「過去の信用イベントの影響+frailty」に対する、あるいは「過去の信用イベントの影響+frailty」はから「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各原系列および各成分(水準成分および傾き成分)に対する、グレンジャーの意味での因果性の存在の有無について検定を行なった。表 6 はその結果である。

(表 6) グレンジャーの因果性

from	to	p値	from	to	p値
GDP	⇒ 信用イベント + frailty	0.264	信用イベント + frailty	⇒ GDP	0.664
GDP(水準成分)	⇒ "	0.024	"	⇒ GDP(水準成分)	0.666
GDP(傾き成分)	⇒ "	0.134	"	⇒ GDP(傾き成分)	0.651
総与信額	⇒ 信用イベント + frailty	0.345	信用イベント + frailty	⇒ 総与信額	0.228
総与信額(水準成分)	⇒ "	0.349	"	⇒ 総与信額(水準成分)	0.217
総与信額(傾き成分)	⇒ "	0.006	"	⇒ 総与信額(傾き成分)	0.130
総与信・GDP比率	⇒ 信用イベント + frailty	0.176	信用イベント + frailty	⇒ 総与信・GDP比率	0.599
総与信・GDP比率(水準成分)	⇒ "	0.009	"	⇒ 総与信・GDP比率(水準成分)	0.990
総与信・GDP比率(傾き成分)	⇒ "	0.001	"	⇒ 総与信・GDP比率(傾き成分)	0.423

表 6 より、GDP の水準成分から「過去の信用イベントの影響+frailty」に対して、5%有意水準にてグレンジャーの意味での因果性があると考えられ、また、「総与信額の傾き成分」「総与信・GDP 比率の水準成分・傾き成分」から frailty に対して、1%有意水準にてグレンジャーの意味での因果性があると考えられる。なお「過去の信用イベントの影響+frailty」から「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」の各原系列および各成分に対しては、グレンジャーの意味での因果性は確認できなかった。

6. 結論および今後の課題

本研究では、信用イベント(格上げ・格下げ・デフォルト)の発生強度を表すモデルを提案する。モデルのファクターを「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の3つとした。信用イベントのうち、「格上げ」「格下げ」を表す各モデルのパラメーターの推定値は95%有意水準で統計的に有意であるとの結果が示された。また、「マクロ要因」「frailty」「過去の信用イベントの影響」の各ファクターを全て含むモデルの場合には、日本のクレジット市場の信用リスクの変動をより良く説明できる可能性があると考えられる。また、レジーム・スイッチモデルにより、frailty と信用サイクル(総与信・GDP 比率)の関連性の検証を試みた結果、frailty と信用サイクルのレジームの推移はほぼ同様の傾向を示した。更に、「GDP」「総与信額」「総与信・GDP 比率」を状態空間モデルで表した場合における成分の一部について、frailty とグレンジャーの意味での因果性があると考えられる。

今後の課題として、(1)景気拡大期・景気後退期の転換点におけるモデルの有効性の検証、(2)発行体格付けの格上げ件数や格下げ件数の推移との関連性があると考えられる Composite Index の変動に伴う、観測可能なファクターや frailty の中長期的な振る舞いに関する検証、および(3)非ガウス状態空間モデルによる、信用イベントの発生のしやすさの将来予測、の3点を挙げる。

(1)については、まず景気拡大・景気後退の転換点を推定する必要がある。そのため、図2で示したブ

ブレイクポイント付き回帰に基づく企業倒産件数のレジーム分割と同様の方法により Composite Index のレジーム分割を行い、構造転換点を推定した(図 9)²¹

(図 9) 企業倒産件数のレジーム分割(左)と Composite Index のレジーム分割(右)

(2000年4月1日-2012年12月31日)

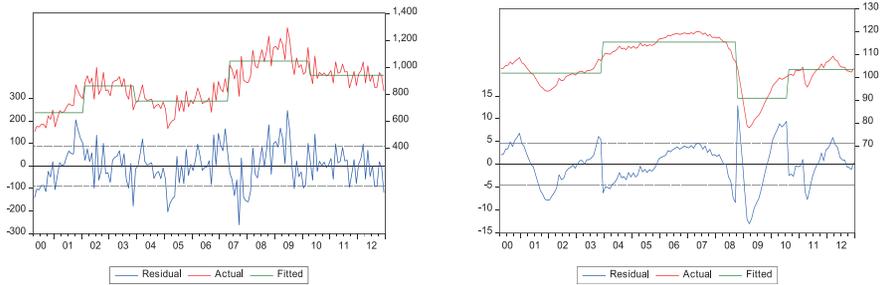


図 9 より、企業倒産件数が増加(減少)傾向を示す局面では、Composite Index が下落(上昇)する傾向にあると推定される。そのため、企業倒産件数を「過去の信用イベントの影響」の代理変数とする場合には、Composite Index の構造変換点との関連性を踏まえた景気拡大期・景気後退期の転換点を推定することが可能となると考えられる。(2)および(3)についても、今後継続的に検証していくこととする。

以上

²¹ 格下げ件数および GDP についても同様にブレイクポイント付き回帰によるレジーム分割を試みたが、構造転換点を有意に推定することができなかった。

【参考文献】

- [1] 近江崇宏・野村俊一「点過程の時系列解析」, 統計学 One Point 14, 共立出版, 2019 年
- [2] 野村俊一「カルマンフィルタ」, 統計学 One Point 2, 共立出版, 2016 年
- [3] Amato and Furfine (2004), “Are credit ratings procyclical ?”, *Journal of Banking & Finance*, 28, 2641-2677
- [4] Amihud (2002), “Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects”, *Journal of Financial Markets* 5, 31-56
- [5] Azizpour, Giesecke and Schenkler (2018), “Exploring the Sources of Default Clustering”, *Journal of Financial Economics* 129, 154-183
- [6] Bai (1997), “Estimating multiple breaks one at a time”, *Economic Theory*, 13, 315-352
- [7] Delloye, Fermanian and Sbai (2006), “Dynamic frailties and credit portfolio modelling”, *Risk*, October 2006, 100-105
- [8] Duffie, Eckner, Horel and Saita (2009), “Frailty Correlated Default”, *Journal of Finance*, vol.64, 2089-2123
- [9] Giesecke and Schenkler (2018), “Filtered likelihood for point processes” , *Journal of Econometrics* 204, 33-53
- [10] Hamilton (1994), “Time Series Analysis”, *Princeton University Press*
- [11] Koopman, Kraussl, Lucas and Monteiro (2009), “Credit cycles and macro fundamentals”, *Journal of Empirical Finance*, vol.16, 42-54
- [12] Koopman, Lucas and Schwaab (2011), “Modeling frailty-correlated defaults using many macroeconomic covariates”, *Journal of Econometrics*, 162, 312-325
- [13] Yamanaka, Sugihara and Nakagawa (2012), “Modeling of Contagious Credit Events and Risk Analysis of Credit Portfolios”, *Asia Pacific Financial Markets*, vol.19, 43-62

(参考) 主な先行研究における frailty の種類およびマクロ経済変数のパラメーター

先行研究	frailtyの種類	発行体格付データ	マクロ経済変数(パラメーター)の種類	分析の対象
Dellaye et al. (2006)	Gamma 分布に従う確率変数	Standard and Poor's	米国鉱工業生産成長率, S&P500 収益率, 米国債イールドスプレッド (3ヶ月-10年), FFレート (3ヶ月)	米国企業(金融機関を除く)の格付推移およびデフォルト率
Koopman et al. (2009)	AR(1)過程	Standard and Poor's	GDP成長率, 米国債イールドスプレッド (1年-10年), 事業性ローン残高増加率, M2成長率, インフレ率, FFレート, 米国債と社債(BB格)スプレッド, S&P500収益率, S&P500ボラティリティ	米国企業(金融機関を除く)の格付推移
Duffie et al. (2009)	Ornstein-Uhlenbeck (OU)過程	Moody's	米国短期国債(3ヶ月物)レート, S&P500収益率	米国企業(金融機関を除く)のデフォルトの集積
Azizpour et al. (2012)	Cox-Ingersoll-Ross(CIR)過程	Moody's	GDP成長率, 鉱工業生産成長率, S&P500収益率, S&P500ボラティリティ, 米国短期国債(3ヶ月物)レート, 米国債イールドスプレッド(1年-10年), 米国債(10年物)利回り, 社債イールドスプレッド(1年-10年), 社債(AAA格)利回り	米国企業(金融機関を除く)のデフォルトの集積

※本研究で用いたマクロ経済変数の候補については, 上記の先行研究を参考とした。

University of Tsukuba
Tokyo 112-0012
JAPAN

Mitsui & Co. Digital Asset Management, Ltd.
Tokyo 103-0012
JAPAN

E-mail address: jhironaka0817@gmail.com

筑波大学／三井物産デジタル・アセットマネジメント株式会社 廣中 純

【謝辞】

本研究は, 京都大学数理解析研究所を認定拠点とする共同利用・共同研究による成果です。ここに記して深く御礼申し上げます。