楕円接合関数の裾従属性と金融リスク管理*

吉羽 要直
東京都立大学 大学院経営学研究科†
Toshinao Yoshiba
Graduate School of Management, Tokyo Metropolitan University

概 要

金融機関のリスク管理においては，資産価格変動や信用状態をリスクファクターとして，その従属関係を正規接合関数や t 接合関数といった楕円接合関数で捉えることが多い．しかしながら，正規接合関数は変量間の裾従属性が弱く，t 接合関数はリスクファクターの上下の変動に対して対称な従属関係しか表現できない．そのため，正規接合関数や t 接合関数に非対称性を入れたモデリングも発展してきている．

本論文では，まず，資産価格変動や信用状態の接合関数に対する実用的な接合関数の特徴と裾次数を含む裾従属性の概念を整理したうえで，非対称性の導入も含めた楕円接合関数の定義と特徴を整理する．

次に，仮想的な信用ポートフォリオを設定し，ポートフォリオに含まれる企業の信用状態の裾従属性がポートフォリオ全体のリスクに及ぼす影響をシミュレーションで確認する．最後に，非対称性を含む楕円接合関数の裾次数や裾従属係数について，先行研究で得られている理論的な結果を整理し，楕円接合関数が持つそれらの特徴を整理する．

1 はじめに：資産価格変動や信用状態の接合関数と裾従属性

1.1 接合関数

確率変動する d 変量のリスクファクターを想定し，その同時分布関数を考える．同時分布関数 $\Pr(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d)$ は，各変量が連続確率変数であるときには，(1.1) 式のように接合関数 $C(u_1, \ldots, u_d)$ を用いて周辺分布関数の関数として一意に表現される（Sklar の定理）．

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d) = C(\Pr(X_1 \leq x_1), \cdots, \Pr(X_d \leq x_d)) \tag{1.1}$$

接合関数 $C(u_1, \ldots, u_d)$ は，$[0,1]^d$ の d 変量一様分布に対する同時分布関数でもあり，接合密度関数 $c(u_1, \ldots, u_d)$ は (1.2) 式のように定義される．

$$c(u_1, \ldots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \ldots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} \tag{1.2}$$

*本研究は，2023 年度京都大学数理解析研究所「共同利用・共同研究拠点事業」，JSPS 科研費（21K01581）からの助成を受けている．

†Address: 18F 1-4-1 Marunouchi, Chiyoda-ku, Tokyo 100-0005, Japan
E-mail address: tyoshiba@tmu.ac.jp

1.2 裾従属係数

2 変量の同時分布関数 $F(x_1, x_2)$ に対し，各変量の周辺分布関数を $F_j(\cdot)\,(j = 1, 2)$ とするとき，下側・上側裾従属係数 λ_L，λ_U は，(1.3) 式で定義される．

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \to 0+} \lambda_L(u), \quad \lambda_L(u) = \Pr\left[X_1 \leq F_1^{-1}(u) | X_2 \leq F_2^{-1}(u)\right], \\ \lambda_U &= \lim_{u \to 1-} \lambda_U(u), \quad \lambda_U(u) = \Pr\left[X_1 \geq F_1^{-1}(u) | X_2 \geq F_2^{-1}(u)\right]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\lambda_L = 0$ または $\lambda_U = 0$ のとき，下側（上側）漸近独立と呼ぶ．

下側・上側裾従属性 $\lambda_L(u)$，$\lambda_U(u)$ は，接合関数 $C\,(u_1, u_2)$ とその生存関数 $\bar{C}\,(u_1, u_2)$ を用いて，(1.4) 式のように表現できる．

$$\lambda_L(u) = \frac{C(u, u)}{u}, \quad \lambda_U(u) = \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u}. \tag{1.4}$$

なお，接合関数の生存関数 $\bar{C}\,(u_1, u_2)$ は，

$$\begin{aligned} \bar{C}\,(u_1, u_2) &:= \Pr\,(U_1 > u_1, U_2 > u_2) \\ &= 1 - \Pr\,(U_1 \leq u_1) - \Pr\,(U_2 \leq u_2) + \Pr\,(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 + C\,(u_1, u_2) \end{aligned}$$

と定義される．

1.3 資産価格変動の接合関数

金融リスク管理の実務で d 変量のリスクファクターの接合関数に求められる点は，以下の 3 点にまとめられる．

1. 相関行列などで全体の従属性を調整できる
2. 裾での従属性を調整できる
3. （資産変動の）上下で従属性を変えられる

1 のように相関行列で全体の従属性を調整できる接合関数が楕円接合関数である．1. については，楕円接合関数のうち，正規接合関数（Gaussian copula, Normal copula）が最もよく使われているが，漸近独立であることからストレス時の相関の強まりを捉えにくい．さらに 2. を考慮する場合には t 接合関数（Student-t copula）が金融リスク管理でよく用いられる．しかし，t 接合関数では 3. の上下の裾従属性に関する非対称性を考慮できない．そこで，Yoshiba (2018) は 2 種類の非対称 t 接合関数（skew-t copula）を取り上げ，その最尤法の実装法を提案．日米欧の株価変動に応用した．

1.4　裾従属性と裾次数

正規接合関数は漸近独立であるが，接合関数の裾での漸近挙動について，漸近独立でも弱い裾従属性（intermediate tail dependence）を捉える指標として，Hua and Joe (2011) が裾次数（tail order）と裾次数関数（tail order function）という概念を提案している．

下側の裾の 2 変量同時分布 $C(u,u)$ について考える．$C(u,u)$ が緩慢変動関数（slowly varying function）$\ell_L(u)$ と正の実数 $\kappa_L(C)>0$ を用いて

$$C(u,u) \sim u^{\kappa_L(C)}\ell_L(u), \quad u \to 0^+ \tag{1.5}$$

と表せるとき，$\kappa_L(C)$ を下側裾次数（lower tail order）と呼び，$\ell_L(C)=\lim_{u\to 0^+}\ell_L(u)$ が収束するとき，$\ell_L(C)$ を下側裾次数係数（lower tail order parameter）と呼ぶ．

$\kappa_L(C)=1$ ならば，下側漸近従属で，下側裾従属係数 $\lambda_L(C)$ は下側裾次数係数 $\ell_L(C)$ に一致する．$\kappa_L(C)=2$ ならば，下側漸近独立となる．$1<\kappa_L(C)<2$ の場合，$\lambda_L(C)=0$ と下側漸近独立になり，下側裾従属係数では従属性を捉えられないが，κ_L は下側漸近従属よりは弱い裾従属性を捉えられる．

同様に上側については，実数 $\kappa_U(C)>0$ と緩慢変動関数 $\ell_U(u)$ を用いて接合関数の生存関数 $\bar{C}(\cdot,\cdot)$ について

$$\bar{C}(1-u,1-u) \sim u^{\kappa_U(C)}\ell_U(u), \quad u \to 0^+ \tag{1.6}$$

と表せるとき，$\kappa_U(C)$ を上側裾次数（upper tail order）と呼び，$\lambda_U(C)=\lim_{u\to 0^+}\ell_U(u)$ が収束するとき，$\lambda_U(C)$ を上側裾次数係数（upper tail order parameter）と呼ぶ．緩慢変動関数についての詳細な議論は，Resnick (2007) を参照．

上側漸近従属の場合も，上側裾次数が 1 の場合は上側裾次数係数は上側裾従属係数に一致するため．裾従属係数では弱い従属性は捉えられない．

相関 $\rho>0$ の 2 変量正規接合関数 $C_N(u_1,u_2;\rho)$ については，裾次数が

$$\kappa_L(C_N)=\kappa_U(C_N)=\frac{2}{1+\rho}$$

となることが示されている（詳細は後述）．

2　楕円接合関数への非対称性の導入

2.1　陰的接合関数と密度

楕円接合関数は，非対称性を取り入れた接合関数を含めて，定義された同時確率分布から内包される陰的接合関数（implicit copula）を導いたものである．

一般に，$\boldsymbol{\theta}$ をパラメータとする d 変量の分布関数 $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ に内包される陰的接合関数 $C_G(u_1,\ldots,u_d;\boldsymbol{\theta}_C)$ は，各 j $(j=1,\ldots,d)$ 変量の周辺分布の分位点関数（分布関数の逆関数）を $G_j^{-1}(x_j;\boldsymbol{\theta}_j)$ として，(2.1) 式のように定義される．

$$C_G(u_1,\ldots,u_d;\boldsymbol{\theta}_C)=G(G_1^{-1}(u_1;\boldsymbol{\theta}_1),\ldots,G_d^{-1}(u_d;\boldsymbol{\theta}_d);\boldsymbol{\theta}) \tag{2.1}$$

陰的接合関数 (2.1) の密度 $c_G(u_1,\ldots,u_d;\boldsymbol{\theta}_C)$ は，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned} c_G\left(u_1,\ldots,u_d;\boldsymbol{\theta}_C\right) &= \frac{\partial^d C_G\left(u_1,\ldots,u_d;\boldsymbol{\theta}_C\right)}{\partial u_1 \ldots \partial u_d} \\ &= \frac{g\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}\right)}{\prod_{j=1}^{d} g_j(x_j;\boldsymbol{\theta}_j)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_d)^\top$ で

$$x_j = G_j^{-1}(u_j;\boldsymbol{\theta}_j), \quad j = 1,\ldots,d$$

となる．

2.2 楕円分布への非対称性の導入

Azzalini and Dalla Valle (1996) では多変量正規分布に非対称性を導入して非対称正規分布が提案されており，広く利用されている．

一方，多変量の非対称 t 分布には様々な提案があり，様々な非対称 t 接合関数を定義できる．

最尤推定では，接合密度 (2.2) が計算できることが望ましく，最尤推定に適した非対称 t 接合関数としては，以下の 2 つが知られている．

1. Demarta and McNeil (2005) が提案した一般化双曲型（generalized hyperbolic: GH）の非対称 t 分布に内包される接合関数（GH 非対称 t 接合関数）
2. Azzalini and Capitanio (2003) による d 変量非対称 t 分布に内包される接合関数（AC 非対称 t 接合関数）．

2.3 GH 非対称 t 分布に従う確率ベクトルと接合関数

GH 非対称 t 分布に従う d 変量確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ は，非対称性を表すパラメータ $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$ を用いて (2.3) 式で与えられる．

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\gamma} V^{-1} + \frac{\boldsymbol{Z}}{\sqrt{V}} \tag{2.3}$$

ただし，$\boldsymbol{Z}$ は d 変量の標準正規分布 $N_d(\boldsymbol{0},\Psi)$ に従う確率ベクトル（Ψ は相関行列），V は $\boldsymbol{Z}$ とは独立なガンマ分布 $G(\nu/2,\nu/2)$ に従う確率変数である．

同時密度 $g\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\gamma},\Psi,\nu\right)$ と周辺密度 $g_j(x_j;\gamma_j,\nu)$ は，第 3 種の修正ベッセル関数を用いて解析的に与えられ，$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$ では自由度 ν の t 分布の同時密度と周辺密度に帰着する．

内包される GH 非対称 t 接合関数 (2.1) のパラメータ $\boldsymbol{\theta}_C$ と周辺分布のパラメータ $\boldsymbol{\theta}_j$ は，以下で特定される．

$$\boldsymbol{\theta}_C = \boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{\gamma},\Psi,\nu\right), \quad \boldsymbol{\theta}_j = \left(\gamma_j,\nu\right),\ j = 1,\ldots,d.$$

2.4 非対称正規分布に従う確率ベクトルと接合関数

AC 非対称 t 分布に従う確率ベクトルは，Azzalini and Dalla Valle (1996) で提案された非対称正規確率ベクトル $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_d)^\top$ を

$$\begin{aligned} Y_j &= \delta_j |Z_0| + \sqrt{1-\delta_j^2} Z_j,\ j = 1, \ldots, d \\ Z_0 &\sim N(0,1),\ \boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d)^\top \sim N_d(\boldsymbol{0}, \Psi) \end{aligned} \tag{2.4}$$

で生成し，変換する（変換方法は後述）．

非対称正規分布の同時密度は，$\boldsymbol{Y}$ の相関行列 Ω の d 変量標準正規密度 $\phi_d(\boldsymbol{y}; \Omega)$ と 1 変量標準正規分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いて，(2.5) 式で与えられる．

$$g(\boldsymbol{y}; \Omega, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = 2\phi_d(\boldsymbol{y}; \Omega)\Phi\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^\top \boldsymbol{y}\right) \tag{2.5}$$

相関行列 Ω は，(2.4) 式で用いた $\boldsymbol{Z}$ の相関行列 Ψ を用いて，以下で与えられる．

$$\Omega = \Delta\left(\Psi + \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}^\top\right)\Delta,\ \Delta \equiv \mathrm{diag}\left(\sqrt{1-\delta_1^2}, \ldots, \sqrt{1-\delta_d^2}\right) \tag{2.6}$$

ここで，$\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ は

$$\zeta_j = \frac{\delta_j}{\sqrt{1-\delta_j^2}},\ j = 1, \ldots, d. \tag{2.7}$$

同時密度 (2.5) に含まれる係数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ は，以下で与えられる．

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\Omega^{-1}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\delta}^\top\Omega^{-1}\boldsymbol{\delta}}} = \frac{\Delta^{-1}\Psi^{-1}\boldsymbol{\zeta}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\zeta}^\top\Psi^{-1}\boldsymbol{\zeta}}} \tag{2.8}$$

第 j 成分 ($j = 1, \ldots, d$) の周辺分布 Y_j は (2.4) 式で与えられ，密度関数は以下で与えられる．

$$g_j(y; \zeta_j) = 2\phi(x)\,\Phi(\zeta_j y) \tag{2.9}$$

同時密度 (2.5) より $\boldsymbol{\theta} = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \Omega)$，周辺密度 (2.9) より $\boldsymbol{\theta}_j = (\zeta_j)$ と与えられる．

$\boldsymbol{\theta}_C$ については，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ が (2.8) 式，ζ_j が (2.7) 式で定義されていることを踏まえ，$\boldsymbol{\theta}_C = (\boldsymbol{\delta}, \Omega)$ で内包される非対称正規接合関数を特定できる．

2.5 AC 非対称 t 接合関数

AC 非対称 t 分布に従う確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ は，(2.4) 式で非対称正規確率ベクトル $\boldsymbol{Y}$ を生成した後，$\boldsymbol{Y}$ とは独立な $V \sim G(\nu/2, \nu/2)$ を用いて，以下のように生成する．

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\sqrt{V}}$$

AC 非対称 t 分布の同時密度は，自由度 ν，相関行列 Ω の d 変量 t 密度 $t_{d,\nu}(\boldsymbol{x};\Omega)$ と自由度 ν の 1 変量 t 分布関数 $T_\nu(\cdot)$ を用いて，

$$g(\boldsymbol{x};\Omega,\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\nu) = 2t_{d,\nu}(\boldsymbol{x};\Omega)T_{\nu+d}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^\top \boldsymbol{x}\sqrt{\frac{\nu+d}{\boldsymbol{x}^\top\Omega^{-1}\boldsymbol{x}+\nu}}\right) \tag{2.10}$$

第 j 成分 $(j=1,\ldots,d)$ の周辺分布は，

$$X_j = \frac{\delta_j|Z_0| + \sqrt{1-\delta_j^2}Z_j}{\sqrt{V}},$$

密度関数は，自由度 ν の 1 変量 t 密度関数 $t_\nu(\cdot)$ を用いて

$$g_j(x;\zeta_j,\nu) = 2t_\nu(x)\,T_{\nu+1}\left(\zeta_j x\sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}\right). \tag{2.11}$$

同時密度 (2.10) より $\boldsymbol{\theta} = (\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\Omega,\nu)$，周辺密度 (2.11) より $\boldsymbol{\theta}_j = (\zeta_j,\nu)$ と与えられる．

$\boldsymbol{\theta}_C$ については，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ が (2.8) 式，ζ_j が (2.7) 式で定義されていることを踏まえると，$\boldsymbol{\theta}_C = (\boldsymbol{\delta},\Omega,\nu)$ で内包される AC 非対称 t 接合関数を特定できる．

2.6　楕円接合関数の等高線プロット（周辺分布：標準正規）

周辺分布を標準正規分布とし，$\rho = 0.5, \delta_1 = \delta_2 = -0.6$ で 2 変量正規接合関数，非対称正規接合関数を適用した同時密度の等高線を描く．

周辺分布を標準正規分布としたまま，$\rho = 0.5, \nu = 3$ で t 接合関数を適用した同時密度の等高線を描き，非対称性パラメータを $\boldsymbol{\delta} = (-0.6,-0.6), \boldsymbol{\gamma} = (-0.2,-0.2)$ として，AC, GH 非対称 t 接合関数を適用した同時密度の等高線を描く．

その結果，図 1のように非対称性パラメータが負の場合に下側の裾従属性が強まる様子が窺える．

3　信用ポートフォリオにおける同時デフォルト確率

3.1　信用ポートフォリオにおける同時デフォルト確率

本節では，吉羽 (2021) で分析した信用ポートフォリオリスクのうち，非対称性も取り込んだ楕円接合関数を用いた同時デフォルト確率の把握に焦点を当てる．

具体的には，接合関数について正規接合関数を仮定しているMerton (1974) モデルに対して，接合関数を非対称正規接合関数や t 接合関数，AC および GH の非対称 t 接合関数に置き換えたときに，デフォルトする与信先の企業数がどのように変化するかについて，シミュレーション分析を行う．

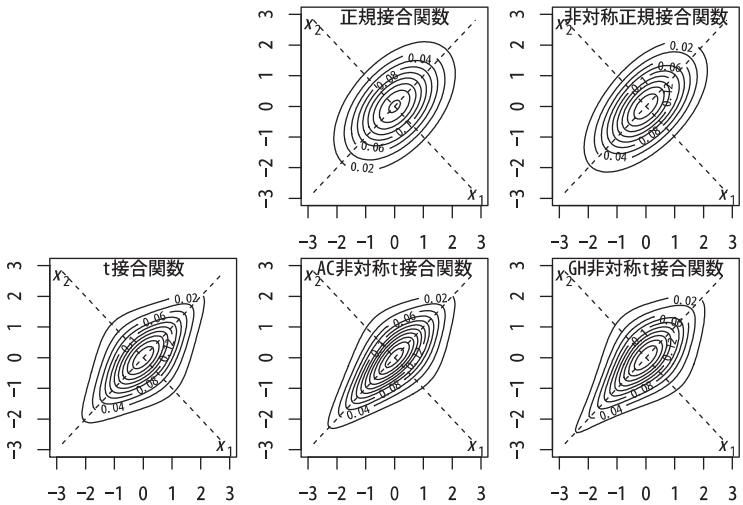

図 1: 同時密度の等高線

3.2 Merton (1974) モデル

Merton (1974) は，デフォルトの閾値を与信先の負債と考え，貸出満期 T の債務超過（資産が負債を下回る状態）でデフォルトするとのバランスシート構造を反映したモデルを想定した．具体的には，与信先企業 i のデフォルト閾値（負債）D_i は大きな変化をしないものの資産状態（資産価値の対数値）はブラウン運動に従うと想定しており，満期 T での資産状態 X_i は正規分布に従うことになる．これにより，与信先企業 i のデフォルト確率は以下で与えられる (Frey, McNeil and Nyfeler, 2001)．

$$p_i = \Pr\left(X_i \leq D_i\right) \tag{3.1}$$

与信先が d 件であれば，資産状態は相関のある d 変量正規分布に従うと想定することになり，d 変量正規分布に想定される相関行列は，資産状態の相関を示すものとなる．

1 ファクターのMerton (1974) モデルでは，ポートフォリオ全体に共通のシステマティックな信用力変化ファクター S が標準正規分布に従うと仮定し，企業 i（$i = 1, \ldots, d$）の信用力変化 X_i を共通要因 S と標準正規分布に従う個別要因 ε_i に分けて

$$X_i = a_i S + \sqrt{1 - a_i^2}\varepsilon_i, \quad S, \varepsilon_i\,(i = 1, \ldots, d) \sim N\,(0, 1)\,, \text{ i.i.d.}$$

と表現しており，与信ポートフォリオリスクに対するバーゼル銀行監督委員会の自己資本比率規制の基礎となっている．ここで $a_i \in [-1, 1]$ は企業間の相関を表すパラメータであり，企業 i と企業 j の信用力変化の相関（資産相関）は $a_i a_j$ と表現できることがわかる．なお，バーゼル自己資本比率規制上の a_i は $\sqrt{\rho}$ と表現され，$\rho = 0.24$ を最大相関としてデフォルト確率で相関を調整しており，$\rho > 0$ が暗黙に仮定され，$a_i < 0$ の状況は考慮されない．

3.3　同時デフォルト確率

(3.1) 式のように各企業のデフォルト確率 $p_1, \ldots, p_d$ が別途求められていたとし，$(X_1, \ldots, X_d)$ の接合関数が相関行列 Σ や非対称性などをパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ とした楕円接合関数 $C(u_1, \ldots, u_d; \boldsymbol{\theta})$ で与えられていると仮定する．このとき，各企業 i（$i = 1, \ldots, d$）の信用力変化 X_i が同時にある一定値 x_i 以下になり，同時にデフォルトする確率は以下で与えられる．

$$\Pr\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d\right) = C\left(p_1, \ldots, p_d; \boldsymbol{\theta}\right)$$

$d = 1,000$ 件の与信先の同時デフォルト件数を正規接合関数の相関を ρ として，他の接合関数と比較する．均一ポートフォリオとして，各与信先への貸出額は同一，各先のデフォルト確率は等しく（2%），各先の状態変数間の順位相関（ケンドールのタウ）は等しく揃える．ただし，非対称正規接合関数，非対称 t 接合関数については，非対称性をゼロとした場合に同一の順位相関を持つパラメータで調整する．すなわち，正規接合関数，t 接合関数，非対称正規接合関数，非対称 t 接合関数の相関パラメータはすべて等しく ρ とする．

比較対象の接合関数としては，(1) 正規，(2)t（自由度 $\nu = 3$），(3) 非対称正規（非対称性 $\delta_i = \delta$），(4)AC 非対称 t（非対称性 $\delta_i = \delta$，$\nu = 3$），(5)GH 非対称 t（非対称性 $\gamma_i = \gamma$，$\nu = 3$）の 5 種類の接合関数を比較する．

相関の設定としては，バーゼル自己資本比率規制では，$\rho = 0.24$ を最大相関として，正規接合関数での 99.9%の非期待損失で最低所要自己資本を特定していることを踏まえ，高相関として $\rho = 0.24$ の設定を想定する．また，より現実的なFrey, McNeil and Nyfeler (2001) の Group B による資産相関の設定を踏まえ，低相関として $\rho = 0.038$ の設定を想定する．

非対称性については，非対称正規と AC 非対称 t では，

$$\Psi_{ij} = \rho,\ \forall i \neq j, \quad \delta_i = \delta = -0.6,\ \forall i$$

GH 非対称 t では，

$$\Omega_{ij} = \rho,\ \forall i \neq j, \quad \gamma_i = \gamma = -0.2,\ \forall i$$

とする．非対称性のパラメータは，株価日次変動に対する吉羽 (2020) の共通非対称性での実証分析結果を踏まえた．

上記の 5 つの各接合関数を用いたデフォルト件数の分布（全 1,000 件）について，100 万パスのシミュレーションで同時デフォルト件数を求めると，高相関 0.24 については表 1，低相関 0.038 については，表 2のとおり，低相関でも裾従属性が強い接合関数では高い信頼水準でのデフォルト件数が多くなる結果を得た．

4　楕円接合関数の裾次数と裾従属性

楕円接合関数のうち，t 接合関数と非対称 t 接合関数については，裾次数が上下ともに 1 であり，上下の裾従属係数で裾の従属性を評価できる．まず，Yoshiba (2018) や吉羽 (2020) での記述に沿って，t 接合関数と非対称 t 接合関数の裾従属係数を整理する．

表 1: 高相関 0.24 でのデフォルト件数（全 1,000 件中）

	平均	標準偏差	90%	95%	99%	99.9%
正規	20.03	30.47	52	77	148	272
t ($\nu = 3$)	19.93	62.64	51	119	334	615
非対称正規	19.99	49.48	51	95	252	527
AC 非対称 t ($\nu = 3$)	19.88	82.41	28	111	473	854
GH 非対称 t ($\nu = 3$)	19.85	93.79	16	89	552	984

表 2: 低相関 0.038 でのデフォルト件数（全 1,000 件中）

	平均	標準偏差	90%	95%	99%	99.9%
正規	20.01	10.79	34	40	54	73
t ($\nu = 3$)	19.90	50.11	60	117	261	419
非対称正規	19.99	36.21	49	80	182	366
AC 非対称 t ($\nu = 3$)	19.86	73.56	39	119	405	749
GH 非対称 t ($\nu = 3$)	19.82	87.19	25	99	492	962

次に，楕円接合関数のうち，相関 ρ の正規接合関数と非対称正規接合関数の裾次数は，通常は裾次数が 1 よりも大きく 2 よりも小さくなるため，裾次数で弱い裾従属性を評価することになる．これらがどのように評価されるのかを先行研究に沿って整理する．非対称正規接合関数の裾次数については，Yoshiba, Koike and Kato (2023) で得た結果を整理する．

4.1 t，非対称 t 接合関数の裾従属係数

2 変量 t 接合関数の裾従属係数は，Demarta and McNeil (2005) で与えられているように次式で与えられる．

$$\lambda_L = \lambda_U = 2T_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)$$

2 変量 GH 非対称 t 分布の裾従属係数は，Fung and Seneta (2010) が共通の非対称性（$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$）で以下のように整理しており，極端になることがわかる．

1. $\gamma < 0 \Rightarrow \lambda_L = 1,\ \lambda_U = 0$
2. $\gamma > 0 \Rightarrow \lambda_L = 0,\ \lambda_U = 1$
3. $\gamma = 0 \Rightarrow \lambda_L = \lambda_U = 2T_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)$

2 変量 AC 非対称 t 分布の裾従属係数は，Fung and Seneta (2010) と Padoan (2011) が独立に与えており，共通の非対称性（$\delta_1 = \delta_2 = \delta$）では，以下の関係式が成立する（裾従属係数は 0 や 1 など極端にはならない）．

1. $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_L > \lambda_U$

2. $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_L < \lambda_U$

AC 非対称 t 接合関数の裾従属係数は，$0 < \lambda_L, \lambda_U < 1$ を満たし，$\rho = 0.5$ で δ を横軸に $\lambda_L - \lambda_U$ をプロットすると図 2のようになる．

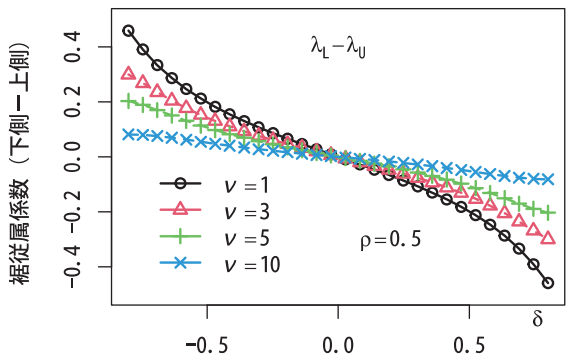

図 2: AC 非対称 t 接合関数の上下の裾従属係数の差

4.2 正規接合関数の裾次数

Coles, Heffernan and Tawn (1999) で示されているように，相関 $\rho > 0$ の 2 変量正規接合関数 $C_N(u_1, u_2; \rho)$ とその生存関数 $\bar{C}_N(u_1, u_2; \rho)$ は以下のように近似される．

$$C_N(u, u; \rho) = \bar{C}_N(1-u, 1-u; \rho) \sim u^{\frac{2}{1+\rho}}(1+\rho)\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}(-4\pi \log u)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}$$

したがって，上下の裾次数は

$$\kappa_L(C_N) = \kappa_U(C_N) = \frac{2}{1+\rho}$$

となり，弱い裾従属性を有することがわかる．

4.3 非対称正規接合関数の裾次数

非対称正規接合関数は，正規接合関数と同様に，上下ともに裾従属係数はゼロで，漸近独立である．

非対称正規ベクトル (2.4) の $\boldsymbol{Y}$ を与える正規ベクトル $\boldsymbol{Z}$ の相関行列 Ψ について $\Psi_{12} = \Psi_{21} = \tilde{\rho}$ とし，同時密度 (2.5) で現れる $\boldsymbol{Y}$ の相関行列 Ω について $\Omega_{12} = \Omega_{21} = \rho$ と表記する．

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ とすると，(2.6), (2.7) 式より，以下を得る．

$$\rho = \tilde{\rho} + \delta^2(1-\tilde{\rho}), \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

Fung and Seneta (2016)（Theorem 2）は，裾従属性 $\lambda_L(u)$, $\lambda_U(u)$ を詳細に分析し，下側裾従属性 $\lambda_L(u)$ を $u \downarrow 0$ で (4.1) 式のように整理している．

$$\lambda_L(u) \sim \begin{cases} u^{\beta^2} \frac{(2\pi\lambda)^{\beta^2}}{\sqrt{\pi}\beta(1+\beta^2)^2}(-\log u)^{\beta^2-\frac{1}{2}}, & \text{if } \delta > 0 \\ u^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \left(\frac{1+\rho}{2}\right) \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}(-\pi \log u)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}, & \text{if } \delta < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

ただし，$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$, $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2$ であり，

$$\lambda = \zeta = \frac{\tilde{\alpha}(1+\rho)}{\sqrt{1+\tilde{\alpha}^2(1-\rho^2)}}$$

となり，β は

$$\beta = \sqrt{\frac{(1-\rho)(1+2(1+\rho)\tilde{\alpha}^2)}{1+\rho}}$$

と定義されているが，これは以下のように変形できる．

$$\beta^2 + 1 = \frac{2}{1+\tilde{\rho}}$$

一方，Li and Joe (2023) (Appendix B）は，裾従属性 $\lambda_L(u)$ を $u \downarrow 0$ で (4.2) 式のように整理している．

$$\lambda_L(u) \sim \begin{cases} \kappa^{-1} u^{\kappa-1}(-2\log u)^{\kappa-\frac{3}{2}}, & \text{if } \delta > 0 \\ \left(\frac{1+\rho}{2}\right) u^{\frac{1-\rho}{1+\rho}}(-2\log u)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}, & \text{if } \delta < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

ただし，

$$\kappa = \frac{2(1-\delta^2)}{1+\rho-2\delta^2}$$

としているが，これも $\tilde{\rho}$ の導入により，

$$\kappa = \frac{2}{1+\tilde{\rho}} \tag{4.3}$$

と書き直すことができる．

共通非対称性の 2 変量非対称正規接合関数を $C_{SN}(u_1, u_2; \delta, \rho)$ と表すと，その生存関数 $\bar{C}_{SN}$ と以下の関係が成立する．

$$\bar{C}_{SN}(1-u, 1-u; \delta, \rho) = C_{SN}(u, u; -\delta, \rho)$$

このため上側裾従属性については，以下の関係が成立する．

$$\lambda_U(u; \delta) = \lambda_L(u; -\delta)$$

したがって，(4.1)–(4.3) 式より，非対称正規接合関数の上下の裾次数は以下のように整理される．

$$\begin{aligned} \kappa_L(C_{SN}; \delta > 0) &= \kappa_U(C_{SN}; \delta < 0) = \frac{2}{1+\tilde{\rho}} \\ \kappa_L(C_{SN}; \delta < 0) &= \kappa_U(C_{SN}; \delta > 0) = \frac{2}{1+\rho} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Yoshiba, Koike and Kato (2023) では，$\delta_1 \neq \delta_2$ の場合でも，δ_1 と δ_2 が同符号であれば，上記の結果は成立することが示されている．

なお，(4.1) 式と (4.2) 式を見比べると，裾次数は同じであるが緩慢変動関数の部分は異なっている．Yoshiba, Koike and Kato (2023) では，2 つの漸近式について $u = 0.01$ の閾値で近似精度を評価している．

4.4　非対称正規接合関数の裾従属の非対称性

Kato, Yoshiba and Eguchi (2022) で提案されている裾非対称性尺度 $\alpha(u)$ は，一般に (1.5), (1.6) 式より

$$\begin{aligned} \alpha(u) &\equiv \log\left(\frac{\bar{C}(1-u,1-u)}{C(u,u)}\right) \\ &\sim (\kappa_U(C) - \kappa_L(C)) \log u + \log\left(\frac{\ell_U(u)}{\ell_L(u)}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

となるから，共通非対称性の非対称正規接合関数では (4.4) 式の結果を用いて，$u \downarrow 0$ で (4.6) 式のように整理できる．

$$\alpha_{SN}(u) \sim (\kappa_U(C_{SN};\delta) - \kappa_L(C_{SN};\delta)) \log u \tag{4.6}$$

4.5　非対称正規接合関数の数値計算と裾非対称性尺度

共通非対称性の 2 変量非対称正規接合関数 $C_{SN}(u_1,u_2;\delta,\rho)$ は，平均 $\mathbf{0}$，相関行列 Σ の 3 変量正規分布関数 $\Phi_3(x_1,x_2,x_3;\Sigma)$ と非対称性 δ の 1 変量非対称正規分布の分位点関数 $F_{SN}^{-1}(u;\delta)$ を用いて，以下のように表現できる．

$$\begin{gathered} C_{SN}(u_1,u_2;\delta,\rho) = 2\Phi_3(0,x_{1L},x_{2L};R_L), \quad x_{1L} = F_{SN}^{-1}(u_1;\delta), \\ x_{2L} = F_{SN}^{-1}(u_2;\delta), \quad R_L = \begin{pmatrix} 1 & -\delta & -\delta \\ -\delta & 1 & \rho \\ -\delta & \rho & 1 \end{pmatrix} \end{gathered}$$

3 変量正規分布関数 $\Phi_3(x_1,x_2,x_3;\Sigma)$ については，Genz (2004) が効率的なアルゴリズムを提案しており，R のパッケージ `mvtnorm` での関数 `pmvnorm` でのオプション `algorithm=TVPACK` で利用できる．デフォルトでは絶対誤差 10^{-6} 以内であり，変更可能である．この関数を用いると，(4.5) 式の裾非対称性尺度 $\alpha_{SN}(u)$ を精緻に計算できる．

数値計算で $\tilde{\rho} = 0$ で，$\delta = 0, 0.2, \ldots, 0.9$ の場合に，横軸を $-\log u$ として $\alpha_{SN}(u)$ をプロットしたグラフを図 3に描くと，(4.6) の近似式のとおり，傾きが一定で上下の裾次数の差に近づく様子が窺える．

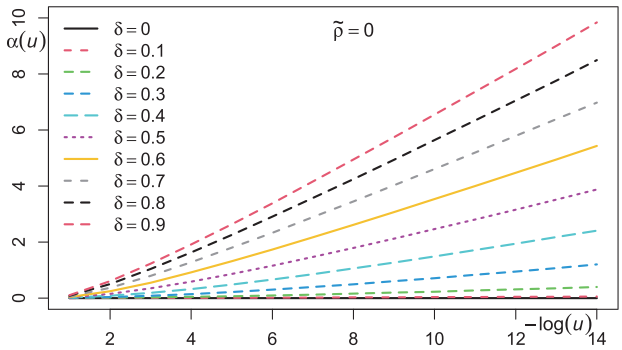

図 3: $\alpha_{SN}(u)$ と $-\log u$ の関係

参考文献

Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996) "The multivariate skew-normal distribution," *Biometrika*, **83**(4), 715–726, 10.1093/biomet/83.4.715.

Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003) "Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution," *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 367–389, 10.1111/1467-9868.00391.

Coles, S., Heffernan, J., and Tawn, J. (1999) "Dependence measures for extreme value analyses," *Extremes*, **2**(4), 339–365, 10.1023/A:1009963131610.

Demarta, S. and McNeil, A. J. (2005) "The t Copula and Related Copulas," *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129, 10.1111/j.1751-5823.2005.tb00254.x.

Frey, R., McNeil, A. J., and Nyfeler, M. A. (2001) "Copulas and credit models," *Risk*, **14**(10), 111–114.

Fung, T. and Seneta, E. (2010) "Tail dependence for two skew t distributions," *Statistics & Probability Letters*, **80**(9-10), 784–791, 10.1016/j.spl.2010.01.011.

——— (2016) "Tail asymptotics for the bivariate skew normal," *Journal of Multivariate Analysis*, **144**, 129–138, 10.1016/j.jmva.2015.11.002.

Genz, A. (2004) "Numerical computation of rectangular bivariate and trivariate normal and t probabilities," *Statistics and Computing*, **14**(3), 251–260, 10.1023/B:STCO.0000035304.20635.31.

Hua, L. and Joe, H. (2011) "Tail order and intermediate tail dependence of multivariate copulas," *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(10), 1454–1471, 10.1016/j.jmva.2011.05.011.

Kato, S., Yoshiba, T., and Eguchi, S. (2022) "Copula-based measures of asymmetry between the lower and upper tail probabilities," *Statistical Papers*, **63**, 1907–1929, 10.1007/s00362-022-01297-w.

Li, X. and Joe, H. (2023) "Estimation of multivariate tail quantities," *Computational Statistics & Data Analysis*, **185**, 107761, 10.1016/j.csda.2023.107761.

Merton, R. C. (1974) "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *The Journal of Finance*, **29**(2), 449–470, 10.1111/j.1540-6261.1974.tb03058.x.

Padoan, S. A. (2011) "Multivariate extreme models based on underlying skew-t and skew-normal distributions," *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(5), 977–991, 10.1016/j.jmva.2011.01.014.

Resnick, S. I. (2007) *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York, NY, Springer, 10.1007/978-0-387-45024-7.

Yoshiba, T. (2018) "Maximum likelihood estimation of skew-t copulas with its applications to stock returns," *Journal of Statistical Computation and Simulations*, **88**(13), 2489–2506, 10.1080/00949655.2018.1469631.

Yoshiba, T., Koike, T., and Kato, S. (2023) "On a Measure of Tail Asymmetry for the Bivariate Skew-Normal Copula," *Symmetry*, **15**(7), 1410, 10.3390/sym15071410.

吉羽要直 (2020) 「非対称 t 接合関数の性質と統計的推定方法―資産価格変動への応用―」,『統計数理』, **68**(1), 45–63.

――― (2021) 「極値での従属性および非対称性と信用ポートフォリオリスク」,『日本統計学会誌』, **51**(1), 157–178, 10.11329/jjssj.51.157.