2 つの可換な非線形写像の共通不動点への強収束定理
A Weak Convergence Theorem for Common Fixed Points of Two Nonlinear Mappings in Hilbert Spaces

茨木貴徳 (Takanori Ibaraki)
横浜国立大学 教育学部
College of Education,
Yokohama National University
梶葉駿介 (Shunsuke Kajiba)
横浜国立大学大学院 環境情報学府
Graduate School of Environment and Information Sciences,
Yokohama National University
竹内幸雄 (Yukio Takeuchi)
高橋非線形解析研究所
Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

1 はじめに

1975 年に Baillon [4] はヒルベルト空間において最初の非線形エルゴード定理として知られる平均収束定理を示した.

定理 1.1 ([4]). *H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない有界な閉凸集合とする. T を C から C への非拡大写像とする. $x_1 \in C$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を次の様に生成する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに,*

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x_1.$$

このとき, 点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

Baillon の定理 1.1 が示されてから, 多くの研究者が平均収束定理について研究を行った ([1, 7, 22] 等参照). 2011 年に高橋-竹内 [21] は吸引点の概念を導入してその性質を考察し, generalized hybrid 写像の吸引点の存在する条件を示し, Baillon の平均収束定理の枠組みを拡張した.

一方, 1963 年に DeMarr [8] はバナッハ空間において可換な非拡大写像族に対する共

通不動点定理を示した．この結果以降, 多くの研究者が共通不動点に関する様々な研究を行っている ([5, 6, 14, 19] 等参照)．そして, 共通不動点への収束定理を得るため, これまでに様々な近似法が提案されている．特に, 1997 年に清水-高橋 [17] は, Halpern [10] と Baillon [4] の 2 つの近似法を組み合わせた新たな近似法を考案し, ヒルベルト空間において, 非拡大写像族の共通不動点への強収束定理を示した．

定理 1.2 ([17])**.** *H をヒルベルト空間とし, C を空ではない H の閉凸部分集合とする．S, T を $ST = TS$ を満たす C から C への非拡大写像とし, $F = F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ を仮定する．$\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たす $[0, 1]$ の実数列とする．$x_1 \in C$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を次の様に生成する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに*

$$x_{n+1} = a_n x_1 + \frac{2(1-a_n)}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} S^i T^j x_n.$$

このとき, $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点 $z = P_F x_1$ に強収束する．ただし, P_F は H から F への距離射影とする．

1998 年に厚芝-高橋 [2] は Mann [16] と Baillon [4] の 2 つの近似法を組み合わせた新たな近似法を提案し, 一様凸バナッハ空間で, 2 つの可換な非拡大写像の共通不動点への弱収束定理を示した．鈴木 [18] は一般のバナッハ空間において, 厚芝-高橋の近似法を用いて 2 つの可換な非拡大写像の共通不動点への強収束定理を示した．これを動機として, 2016 年に竹内 [23] は Mann の近似法と簡略化した Baillon の近似法を組み合わせた新たな近似法を提案し, 2 つの可換な非拡大写像の共通不動点への強収束定理を得た．2022 年に茨木-梶葉-竹内 [11] はヒルベルト空間において, 竹内の提案した近似法を吸引点の性質を用いて考察し, 2 つの可換な非線形写像の共通不動点への弱収束定理を示した．

本稿では, 上記の先行研究に刺激されて, ヒルベルト空間において, Halpern の近似法と簡略化された Baillon の近似法を組み合わせた新たな近似法を提案し, 2 つの可換な非線形写像の共通不動点への強収束定理を提示する．ただし, 紙面の制約から, 補題や定理の証明は割愛する．

2 準備

本節では, 本稿において用いる定義や記号, 補題等を確認する．$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし, $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ をそれぞれ正の整数全体の集合, 非負の整数全体の集合とする．$i \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}_i = \{k \in \mathbb{N}_0 : i \leq k\}$ とし, $i \leq j$ を満たす $i, j \in \mathbb{N}_0$ について, $\mathbb{N}(i, j) = \{k \in \mathbb{N}_0 :$

$i \le k \le j\}$ とする．H は実ヒルベルト空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ をそれぞれ H の内積と内積から誘導されたノルムとする．H の点列 $\{x_n\}$ について，$x_n \rightharpoonup x$, $x_n \to x$ はそれぞれ $x \in H$ に弱収束・強収束することを表す．

C を H の空ではない部分集合とする．C が閉凸集合であるとき，C は弱閉集合である．H の有界な点列は弱収束する部分列を持つ．H の点列 $\{x_n\}$ の全ての弱収積点 (weak cluster point) が，ある $z \in H$ と等しいとき，$\{x_n\}$ は z に弱収束する．C を H の空ではない閉凸部分集合とする．$x \in H$ のとき，$\|z_x - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|$ を満たす $z_x \in C$ が一意に存在し，写像 P_C を $P_C x = z_x$ で定義する．このとき，P_C は H から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ばれ，$x \in H$ と $y \in C$ について $\langle x - P_C x, P_C x - y \rangle \ge 0$ が成り立つ．

C を H の空ではない部分集合，T を C から H への写像とし，C 上の恒等写像 I を T^0 と表記する．$F(T)$ を T の不動点集合，$A(T)$ を T の吸引点集合とする．すなわち，

$$F(T) = \{x \in C : x = Tx\}, \quad A(T) = \{y \in H : \|Tx - y\| \le \|x - y\| \ (\forall x \in C)\}.$$

$I - T$ が原点でデミ閉であるとは，C の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \rightharpoonup z \in C$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ を満たすとき，$z \in F(T)$ となることをいう．T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは，任意の $x, y \in C$ について，$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ が成り立つことをいう．T が非拡大写像であるとき，$I - T$ は原点でデミ閉であることが知られている．T が擬非拡大写像 (quasi-nonexpansive mapping) であるとは $\emptyset \ne F(T) \subset A(T)$ が成り立つことをいう．T が非拡大写像で $F(T) \ne \emptyset$ ならば，T は擬非拡大写像である．青山-家本-高阪-高橋 [1] は $\lambda \in \mathbb{R}$ について，λ–hybrid 写像を提案した．T が λ–hybrid であるとは，すべての $x, y \in C$ について

$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda)\langle x - Tx, y - Ty \rangle$$

が成り立つことである．λ–hybrid 写像のクラスは他の重要な非線形写像のクラスを含んでいる ([15, 20] 等参照)．T が λ–hybrid であるとき，T は $F(T) \subset A(T)$ を満たす．したがって，$F(T) \ne \emptyset$ であれば，T は擬非拡大写像である．また，Falset-Fuster-Suzuki [9] は条件 (E)(condition (E)) を満たす写像のクラスを提案した．写像 T が条件 (E) を満たすとは，ある $s \in [0, \infty)$ が存在し，すべての $x, y \in C$ について

$$\|x - Ty\| \le \|x - y\| + s\|x - Tx\|$$

が成り立つことである．T が条件 (E) を満たすならば $F(T) \subset A(T)$ であり，$F(T) \ne \emptyset$ ならば擬非拡大写像である．

C を H の部分集合とし, T_1, T_2 を C から C への写像とする. $F = F(T_1) \cap F(T_2)$, $A = A(T_1) \cap A(T_2)$ とする. 本稿でも茨木-竹内 [12] が重視した $F \subset A$ という条件に着目する. この条件に関して, 次の事実を容易に導くことができる.

(a) $F \subset A$ であっても, $F(T_1) \subset A(T_1)$ や $F(T_2) \subset A(T_2)$ が成り立つとは限らない;
(b) $F \subset A$ でなければ, $F \neq \emptyset$ から $A \neq \emptyset$ は導かれない;
(c) C が閉凸集合のとき, $A \neq \emptyset$ ならば $F \neq \emptyset$ となる.
ただし, $A \neq \emptyset$ であっても, $F \subset A$ が成り立つとは限らない;
(d) T_1 と T_2 が擬非拡大写像ならば, $F \subset A$ が成立する;
(e) $\emptyset \neq F \subset A$ であっても, T_1 と T_2 は擬非拡大写像とは限らない.

高橋-竹内 [21] は吸引点に関する次の補助定理を提示した.

補助定理 2.1 ([21]). *H をヒルベルト空間, C を H の空ではない部分集合とし, T を C から H への写像とする. このとき, $A(T)$ は H の閉凸部分集合となる.*

吸引点に関する詳細は [3, 12, 13, 21] 等を参照のこと.

λ–hybrid 写像と条件 (E) を満たす写像について, 次の 2 つの補助定理が知られている (例えば茨木-竹内 [12] などを参照).

補助定理 2.2. *C を H の空ではない部分集合とし, T を C から H への λ–hybrid 写像とする. $\{x_n\}$ を $u \in C$ に弱収束する C の点列とし, $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ を満たすとする. このとき, $u \in F(T)$ である.*

補助定理 2.3. *C を H の空ではない部分集合とし, T を C から H への条件 (E) を満たす写像とする. $\{x_n\}$ を $u \in C$ に弱収束する C の点列とし, $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ を満たすとする. このとき, $u \in F(T)$ である.*

3 非線形写像の共通不動点への収束定理

H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない部分集合とする. T_1, T_2 を C から C への写像とする. $n \in \mathbb{N}$ ごとに, 写像 $M(n)$ を次のように定義する: 任意の $x \in C$ について,

$$M(n)x = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{i+1} T_1^i T_2^j x. \tag{3.1}$$

本節では, まず, 2022 年の茨木-梶葉-竹内 [11] の結果を提示し, その後, 簡略化した Baillon の近似法 (3.1) を Halpern の近似法と組み合わせた近似法を提案し, これを用いて得られた収束定理 (定理 3.2) を提示する. 更に, 定理 3.2 から導かれる結果を提示するとともに, 定理 3.2 の理解を深めるために, ユークリッド空間における具体例を考察する.

2022 年に茨木-梶葉-竹内 [11] は簡略化した Baillon の近似法と Mann の近似法の 2 つを組み合わせた近似法を用いて次の弱収束定理を得た.

定理 3.1 ([11]). H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない閉凸部分集合とする. T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とする. $a \leq b$ を満たす a, b を $(0,1)$ の実数とし, $\{a_n\}$ を $[a,b]$ の実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, 写像 $M(n)$ を (3.1) で定義した写像とする. $x_1 \in C$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を次の様に生成する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに,

$$x_{n+1} = a_n M(n) x_n + (1 - a_n) x_n.$$

$F = F(T_1) \cap F(T_2)$, $A = A(T_1) \cap A(T_2)$ とし, $A \neq \emptyset$ と $j \in \{1,2\}$ について, $I - T_j$ が原点でデミ閉であることを仮定する. このとき, 次が成立する :

1. $\{x_n\}$ は弱収束する部分列を持つ. 更に, $\{x_{n_l}\}$ を $\{x_n\}$ の弱収束する部分列とすれば, $\{x_{n_l}\}$ は F の点に弱収束する.
2. $F \subset A$ を仮定すれば, $\{x_n\}$ はある $z \in F$ に弱収束する.

次に簡略化した Baillon の近似法と Halpern の近似法の 2 つを組み合わせた新たな近似法を用いて, 2 つの非線形写像の共通不動点への強収束定理を得ることができた.

定理 3.2. H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない閉凸部分集合とする. T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とし, $\emptyset \neq A = A(T_1) \cap A(T_2)$, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \subset A$ を仮定する. b を $(0,1)$ の実数とし, $\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たす $(0,1)$ の実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, 写像 $M(n)$ を (3.1) で定義した写像とし, $U_n = bI + (1-b)M(n)$ とする. $q, u_1 \in C$ とし, 点列 $\{u_n\}$ を次の様に生成する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに,

$$u_{n+1} = a_n q + (1 - a_n) U_n u_n.$$

$j \in \{1,2\}$ について, $I - T_j$ が原点でデミ閉であるとき, $\{u_n\}$ は $v_0 = P_A q = P_F q \in F$ に強収束する.

定理 3.2 より以下の結果を導くことができる.

定理 3.3. H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない閉凸部分集合とする. T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への擬非拡大写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ を仮定する. b を $(0,1)$ の実数とし, $\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たす $(0,1)$ の実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, 写像 $M(n)$ を (3.1) で定義した写像とし, $U_n = bI + (1-b)M(n)$ とする. $q, u_1 \in C$ とし, 点列 $\{u_n\}$ を次の様に生成する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに,

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n)U_n u_n.$$

$j \in \{1,2\}$ について, $I - T_j$ が原点においてデミ閉であるとき, $\{u_n\}$ は $v_0 = P_A q = P_F q \in F$ に強収束する.

定理 3.4. H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない閉凸部分集合とする. T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への非拡大写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ を仮定する. b を $(0,1)$ の実数とし, $\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たす $(0,1)$ の実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, 写像 $M(n)$ を (3.1) で定義された写像とし, $U_n = bI + (1-b)M(n)$ とする. $q, u_1 \in C$ とし, 点列 $\{u_n\}$ を次の様に生成する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに,

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n)U_n u_n.$$

このとき, $\{u_n\}$ は $v_0 = P_F q \in F$ に強収束する.

補助定理 2.2, 2.3 を考慮すると, 定理 3.2 より以下の結果が導かれる.

定理 3.5. H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない閉凸部分集合とする. T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とする. T_1 を λ–*hybrid* 写像, T_2 を μ–*hybrid* 写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ を仮定する. b を $(0,1)$ の実数とし, $\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たす $(0,1)$ の実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, 写像 $M(n)$ を (3.1) で定義した写像とし, $U_n = bI + (1-b)M(n)$ とする. $q, u_1 \in C$ とし, 点列 $\{u_n\}$ を次の様に定義する: $n \in \mathbb{N}$ ごとに,

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n)U_n u_n.$$

このとき, $\{u_n\}$ は $v_0 = P_F q \in F$ に強収束する.

定理 3.6. H をヒルベルト空間とし, C を H の空ではない閉凸部分集合とする. T_1, T_2 を条件 (E) および $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$

を仮定する．b を $(0,1)$ の実数とし，$\{a_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たす $(0,1)$ の実数列とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ について，写像 $M(n)$ を (3.1) で定義した写像とし，$U_n = bI + (1-b)M(n)$ とする．$q, u_1 \in C$ とし，点列 $\{u_n\}$ を次の様に生成する：$n \in \mathbb{N}$ ごとに，

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n)U_n u_n.$$

このとき，$\{u_n\}$ は $v_0 = P_F q \in F$ に強収束する．

定理 3.2 の理解を深めるために，ユークリッド空間で，定理 3.2 の条件をすべて満たし，T_1, T_2 が擬非拡大写像ではない具体例を考察する．なお，ユークリッド空間では，点列の強収束と弱収束の概念が一致するため，単に収束と表現する．

例 3.7. $D = \left\{x = (s,t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [0,1],\ t \in [-s,s]\right\}$ とし，D から D への連続な写像 T_1 と T_2 を次のように定義する: $x = (s,t)$ について，

$$T_1 x = T_1(s,t) = \left(\frac{1}{2}\left(s + |t|\right), t\right), \quad T_2 x = T_2(s,t) = \left(\frac{1}{2}(2s - |t|), \frac{1}{2}t\right).$$

この例において，$F = F(T_1) \cap F(T_2)$, $A = A(T_1) \cap A(T_2)$ としたとき，

$$\begin{aligned}
&F(T_1) = \{(x_1,x_2) \in D : x_1 = |x_2|\}, && F(T_2) = \{(x_1,x_2) \in D : x_2 = 0\},\\
&A(T_1) = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le 0\right\}, && A(T_2) = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le 0, |x_2| \le |x_1|\right\},\\
&F = \{(0,0)\}, && A = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le 0, |x_2| \le |x_1|\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_1T_2)x &= T_1\left(\frac{1}{2}(2s - |t|), \frac{1}{2}t\right) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2s-|t|) + \frac{1}{2}|t|\right), \frac{1}{2}t\right) = \left(\frac{1}{2}s, \frac{1}{2}t\right),\\
(T_2T_1)x &= T_2\left(\frac{1}{2}(s+|t|), t\right) = \left(\frac{1}{2}\left((s+|t|) - |t|\right), \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}s, \frac{1}{2}t\right).
\end{aligned}$$

が成立する．このことから，次のことが確認できる；

- D は $\mathbb{R}^2$ の空ではないコンパクトな閉凸部分集合である；
- $F(T_1) \not\subset A(T_1)$ であるから，T_1 は擬非拡大写像ではない；
- $F(T_2) \not\subset A(T_2)$ であるから，T_2 は擬非拡大写像ではない；
- T_1, T_2 は連続なので，$I - T_1$ と $I - T_2$ は原点でデミ閉である；
- $T_1T_2 = T_2T_1$ と $\emptyset \neq F \subset A$ が成立する．

すなわち，T_1, T_2 はともに擬非拡大写像ではなく，定理 3.2 の条件が満たされている．これより，定理 3.2 の手順で点列 $\{y_n\}$ を生成すると，この点列は $(0,0) \in F \subset A$ に収束する．

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 19K03632, 19H01479 ,23H00815 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlonear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[2] S. Atushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[3] S. Atsushiba, S. Iemoto, R. Kubota and Y. Takeuchi, *Convergence theorems for some classes of nonlinear mappings in Hilbert space*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 125–153.

[4] J. B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans unespace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser., A-B 280 (1975), 1511-1514.

[5] L. P. Belluce and W. A. Kirk, *Fixed-point theorems for families of contraction mappings*, Pacific J. Math. **18** (1966), 213–217.

[6] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 59–71.

[7] R. E. Bruck *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces* Israel J. Math. **38** (1981), 304-314.

[8] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J Math. **13**(1963), 1139–1141.

[9] J. G. Falset, E. L. Fuster and T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, J.Math. Anal. Appl. **375** (2011), 185–195.

[10] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1976), 959–961.

[11] T.Ibaraki, S. Kajiba and Y. Takeuchi, *A weak convergence theorem for common fixed points of two nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Abstr. Appl. Anal., **2022** (2022), Article ID 9568060, 9 pages.

[12] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *New convergence theorems for common fixed points of a wide range of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Anal. and Optim. **9** (2018), 95–114.

[13] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *A mean convergence theorem finding a common attractive point of two nonlinear mappings*, Yokohama Math. J. **66** (2020), 61–77.

[14] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **80** (1979), 493–501.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi *Fixed point theorems for class of nonlinear mappings related to maximal monotone operator in Banach spaces*, Arch. Math. (Besel) **91** (2008), 166–177.

[16] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[17] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.

[18] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[19] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J. **14** (2003), 43–54.

[20] W. Takahashi, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.

[21] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.

[22] W. Takahashi and J. -C. Yao, *Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 457–472.

[23] Y. Takeuchi, *An iteration scheme finding a common fixed point of commuting two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Linear and Nonlinear Anal. **2** (2016), 317–327.