

種々の集合値およびファジィ集合値最適化問題 に対するスカラー化手法

弘前大学 大学院 理工学研究科 金 正道 (Masamichi KON)

Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

本稿では、集合およびファジィ集合に対するスカラー化手法を提案する。そして、提案するスカラー化手法を目的関数が集合値またはファジィ集合値であるいくつかの最適化問題に対して応用する。集合値またはファジィ集合値最適化問題のスカラー化である実数値最適化問題の最適解が、もとの集合値またはファジィ集合値最適化問題の弱非劣解になることが導かれる。

1 はじめに

何らかの制約をもち実数値目的関数を最小化または最大化する問題を実数値最適化問題とよぶことにする。一方、実数値目的関数が複数ある場合、または目的関数がベクトル値である場合は、実数値多目的（多基準）最適化問題とよぶことにする。実数値多目的（多基準）最適化問題における解の最適性として、最小または最大の代わりにパレート性（有効性、非劣性）などの概念が用いられる。

実数値最適化問題または実数値多目的（多基準）最適化問題に対して、目的関数値に不確実性を考慮する定式化として、目的関数値を集合値またはファジィ集合値または確率変数値とすることが自然に考えられるが、本稿では集合値とファジィ集合値を扱う。そして、集合およびファジィ集合のスカラー化関数を用いたスカラー化手法を考察する。確率変数の代表的なスカラー化は期待値であるが、本稿では扱わない。

実数値最適化問題については多くの研究があり [8, 10]、区間値およびファジィ数値最適化問題についても、多くの研究がある [11, 13]。集合値最適化問題についても多くの研究があり、スカラー化手法も提案されている [2, 3, 4, 5, 6]。ファジィ集合値最適化問題についての研究は、まだ少ない（不十分である）と思われる [7]。

実数値目的関数 $f(x; a, b, \dots, c)$ をもつ実数値最適化問題が与えられているとする。ここで、 $a, b, \dots, c$ は実数値パラメータまたは係数であり、その実数値最適化問題は x に関して最適化する問題であるとする。このとき、実数値パラメータまたは係数を集合 $A, B, \dots, C$ またはファジィ集合 $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{c}$ で置き換えた集合値目的関数

$f(x; A, B, \dots, C)$ またはファジィ集合値目的関数 $f(x; \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{c})$ をもつ集合値またはファジィ集合値最適化問題を考える。集合値最適化問題のスカラー化の既存研究の多くは、すべての x について集合 $f(x; A, B, \dots, C)$ をスカラー化した実数値最適化問題を扱っている。ファジィ集合値最適化問題のファジィ集合 $f(x; \tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{c})$ をスカラー化した実数値最適化問題を扱っている研究は我々の知る限りない。我々の提案するスカラー化手法は、すべての x に対する集合またはファジィ集合をスカラー化するのではなく、パラメータまたは係数の集合またはファジィ集合のみをスカラー化した実数値最適化問題を扱う。そのため、提案するスカラー化手法は、すべての x に対する集合またはファジィ集合をスカラー化するより、スカラー化の手間が非常に軽減される。

本稿では、集合およびファジィ集合に対するスカラー化関数を用いたスカラー化手法を提案する。そして、提案するスカラー化手法を目的関数が集合値またはファジィ集合値であるいくつかの最適化問題に対して応用する。集合値またはファジィ集合値最適化問題のスカラー化である実数値最適化問題の最適解が、もとの集合値またはファジィ集合値最適化問題の弱非劣解になることが導かれる。

2 集合の演算と順序

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ および $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ とする。また、 $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ および $\mathbb{R}_-^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ とする。 $\mathbb{R}_+^1$ は $\mathbb{R}_+$ と表す。

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト部分集合すべての集合とする。 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 上の加法およびスカラー倍を、各 $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ および $\mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}, \quad \mu A = \{\mu \mathbf{x} : \mathbf{x} \in A\}$$

と定義する。 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 上の擬順序 $\leq$ (反射的, 推移的) および狭義半順序 $<$ (非反射的, 推移的) を、各 $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$A \leq B \stackrel{\text{def}}{\iff} B \subset A + \mathbb{R}_+^n, A \subset B + \mathbb{R}_-^n$$

$$A < B \stackrel{\text{def}}{\iff} B \subset A + \text{int}(\mathbb{R}_+^n), A \subset B + \text{int}(\mathbb{R}_-^n)$$

と定義する。ここで、 $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ および $\text{int}(\mathbb{R}_-^n)$ はそれぞれ $\mathbb{R}_+^n$ および $\mathbb{R}_-^n$ の内部を表す。 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 上の狭義半順序 $<$ の非反射性は [7, 定理 6.6] 参照。

ここでは $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ を考えたが、必要に応じて、 $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n)$ や $\mathcal{C}(\text{int}(\mathbb{R}_+^n))$ などに変更し、制限して考えてもよい。

3 ファジィ集合の演算と順序

$\tilde{a} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ を $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合という。 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合とする。

$\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。各 $\alpha \in]0, 1]$ に対して

$$[\tilde{a}]_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \tilde{a}(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$$

を $\tilde{a}$ の α -レベル集合とよぶ。 $\tilde{a}$ が正規であるとは、 $[\tilde{a}]_1 \neq \emptyset$ であるときをいう。 $\tilde{a}$ がコンパクトであるとは、任意の $\alpha \in]0, 1]$ に対して $[\tilde{a}]_\alpha$ がコンパクトであるときをいう。

$\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ を正規かつコンパクトである $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合とする。 $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ 上の加法およびスカラー倍を、各 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ および $\mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} (\tilde{a} + \tilde{b})(\mathbf{x}) &= \sup_{\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}} \min\{\tilde{a}(\mathbf{y}), \tilde{b}(\mathbf{z})\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ (\mu\tilde{a})(\mathbf{x}) &= \sup_{\mathbf{x}=\mu\mathbf{y}} \tilde{a}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

と定義する。 $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ 上の擬順序 $\leq$ (反射的, 推移的) および狭義半順序 $<$ (非反射的, 推移的) を、各 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq \tilde{b} &\stackrel{\text{def}}{\iff} [\tilde{a}]_\alpha \leq [\tilde{b}]_\alpha, \forall \alpha \in]0, 1] \\ \tilde{a} < \tilde{b} &\stackrel{\text{def}}{\iff} [\tilde{a}]_\alpha < [\tilde{b}]_\alpha, \forall \alpha \in]0, 1] \end{aligned}$$

と定義する。 $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ 上の狭義半順序 $<$ の非反射性は [7, 定理 8.9] 参照。

任意の有限個の $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{c} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$, $\beta, \gamma, \dots, \delta \in \mathbb{R}$ および $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1]$ に対して

$$\mu(\tilde{a} + \tilde{b} + \dots + \tilde{c}) = \mu\tilde{a} + \mu\tilde{b} + \dots + \mu\tilde{c} \quad (3.1)$$

$$[\beta\tilde{a} + \gamma\tilde{b} + \dots + \delta\tilde{c}]_\alpha = \beta[\tilde{a}]_\alpha + \gamma[\tilde{b}]_\alpha + \dots + \delta[\tilde{c}]_\alpha \quad (3.2)$$

となる [7, 定理 8.1 および 8.5]。

$\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\text{supp}(\tilde{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \tilde{a}(\mathbf{x}) > 0\}$$

を $\tilde{a}$ のサポートとよぶ。ここでは正規かつコンパクトである $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合 $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ を考えたが、必要に応じて、正規, コンパクトかつサポートが $\mathbb{R}_+^n$ に含まれる $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合 $\mathcal{FC}(\mathbb{R}_+^n)$ や正規, コンパクトかつサポートが $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ に含まれる $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合 $\mathcal{FC}(\text{int}(\mathbb{R}_+^n))$ などに変更し、制限して考えてもよい。

4 スカラー化

各 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ および $\lambda \in [0, 1]$ に対して、スカラー化関数 $\psi_{\mathbf{k}, \lambda} : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ を各 $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\psi_{\mathbf{k}, \lambda}(A) = \lambda \max_{\mathbf{x} \in A} \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle + (1 - \lambda) \min_{\mathbf{x} \in A} \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle \quad (4.1)$$

と定義する。ここで、 $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle$ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{x}$ の標準内積である。

$\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ とし、 $\lambda \in [0, 1]$ とする。 $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$A < B \Rightarrow \psi_{\mathbf{k}, \lambda}(A) < \psi_{\mathbf{k}, \lambda}(B) \quad (4.2)$$

となる。任意の有限個の $A, B, \dots, C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ および $\beta, \gamma, \dots, \delta \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\beta \psi_{\mathbf{k}, \lambda}(A) + \gamma \psi_{\mathbf{k}, \lambda}(B) + \dots + \delta \psi_{\mathbf{k}, \lambda}(C) = \psi_{\mathbf{k}, \lambda}(\beta A + \gamma B + \dots + \delta C) \quad (4.3)$$

となる。また、(3.2) および (4.3) より、任意の $\alpha \in]0, 1]$ 、任意の有限個の $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots, \tilde{c} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ および $\beta, \gamma, \dots, \delta \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\beta \psi_{\mathbf{k}, \lambda}([\tilde{a}]_\alpha) + \gamma \psi_{\mathbf{k}, \lambda}([\tilde{b}]_\alpha) + \dots + \delta \psi_{\mathbf{k}, \lambda}([\tilde{c}]_\alpha) = \psi_{\mathbf{k}, \lambda}([\beta \tilde{a} + \gamma \tilde{b} + \dots + \delta \tilde{c}]_\alpha) \quad (4.4)$$

となる。

5 最短路問題

$G = (V, E)$ をグラフとする。ここで、 V は頂点の集合であり、 $E \subset (V \times V) \setminus \{(i, i) : i \in V\}$ は辺の集合である。各辺 $(i, j) \in E$ は長さ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ をもつか、または各辺 $(i, j) \in E$ は長さ $A_{ij} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ をもつか、または各辺 $(i, j) \in E$ は長さ $\tilde{a}_{ij} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ をもつとする。2 つ以上の頂点の列 $P = (s, i, j, \dots, k, t)$ で $(s, i) \in E$, $(i, j) \in E$, $\dots$, $(k, t) \in E$ をみたすものを s から t への路といい、 P が経由する辺の長さの総和を P の長さとして定義する。

$s, t \in V, s \neq t$ とし、 $\mathcal{P}_{st}$ を s から t へのすべての路の集合とし、 $P^* \in \mathcal{P}_{st}$ とする。また、各 $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して、 $\ell(P)$ を P の長さとする。 P^* が s から t への最短路であるとは、任意の $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して $\ell(P^*) \leq \ell(P)$ となるときをいう。 P^* が s から t への弱非劣路であるとは、 $\ell(P) < \ell(P^*)$ となる $P \in \mathcal{P}_{st}$ が存在しないときをいう。

ある $s \in V$ から他の $t \in V$ への最短路または弱非劣路を求める問題を最短路問題という。特に、辺の長さが $\mathbb{R}$ の要素で与えられている最短路問題を実数値最短路問題とよび、

辺の長さが $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている最短路問題を集合値最短路問題とよび、辺の長さが $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている最短路問題をファジィ集合値最短路問題とよぶことにする。

有向または無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、辺の単位流量あたりの費用が $\mathbb{R}$ または $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ または $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている最小費用流問題 [12, p.234] を実数値または集合値またはファジィ集合値最小費用流問題とよび、辺の長さが $\mathbb{R}$ または $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ または $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている最小全域木問題 [12, pp.182,202] を実数値または集合値またはファジィ集合値最小全域木問題とよび、辺の長さが $\mathbb{R}$ または $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ または $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている巡回セールスマン問題 [12, p.185] を実数値または集合値またはファジィ集合値巡回セールスマン問題とよび、辺の容量が $\mathbb{R}$ または $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ または $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている最小カット問題 [12, pp.227,230] を実数値または集合値またはファジィ集合値最小カット問題とよび、辺長さが $\mathbb{R}$ または $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ または $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ の要素で与えられている最大カット問題 [12, p.268] を実数値または集合値またはファジィ集合値最大カット問題とよぶ。また、最小費用流問題に対する最小費用流および弱非劣費用流、最小全域木問題にたいする最小全域木および弱非劣全域木、巡回セールスマン問題に対する最短巡回路および弱非劣巡回路、最小カット問題に対する最小カットおよび弱非劣カット、および最大カット問題に対する最大カットおよび（最大化に対応する）弱非劣カットを最短路問題の場合と同様に定義する。

6 確定的動的計画

- $N \geq 2$: 段の総数
 $X = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$: 有限状態空間
 $U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$: 有限決定空間
 $f: X \times U \rightarrow X$: 推移関数 ($f(x, u)$ は第 n 段で状態 x , 決定 u のときの第 $n+1$ 段での状態)

とする。また

- $r_n: X \times U \rightarrow \mathbb{R}$: 実数値第 n 利得関数 ($1 \leq n \leq N$)
 $r_G: X \rightarrow \mathbb{R}$: 実数値終端利得関数

または

- $r_n: X \times U \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: 集合値第 n 利得関数 ($1 \leq n \leq N$)
 $r_G: X \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: 集合値終端利得関数

または

$r_n : X \times U \rightarrow \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$: ファジィ集合値第 n 利得関数 ($1 \leq n \leq N$)

$r_G : X \rightarrow \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$: ファジィ集合値終端利得関数

とする。

このとき、次の確定的動的計画問題を考える。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \cdots + r_N(x_N, u_N) + r_G(x_{N+1}) \\ \text{s.t.} & f(x_n, u_n) = x_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N \\ & u_n \in U, \quad 1 \leq n \leq N \end{array} \right. \quad (6.1)$$

ここで、 $x_1 \in X$ である。問題 (6.1) を N 段過程ともよぶ。特に、 r_n, r_G が実数値の場合は問題 (6.1) を実数値確定的動的計画問題 [1] とよび、 r_n, r_G が集合値の場合は問題 (6.1) を集合値確定的動的計画問題とよび、 r_n, r_G がファジィ集合値の場合は問題 (6.1) をファジィ集合値確定的動的計画問題とよぶ。問題 (6.1) は、各 $x_1 \in X$ に対して、一般政策（定義は後述）の範囲で最適一般政策または弱非劣一般政策（定義は後述）を求める問題であると解釈する場合と、マルコフ政策（定義は後述）の範囲で最適マルコフ政策または弱非劣マルコフ政策（定義は後述）を求める問題であると解釈する場合がある。それらの場合を区別して、一般政策の範囲で考えた問題 (6.1) を一般問題とよび、マルコフ政策の範囲で考えた問題 (6.1) をマルコフ問題とよぶ。

$$\sigma_1 : X \rightarrow U, \quad \sigma_2 : X \times X \rightarrow U, \quad \cdots, \quad \sigma_N : \underbrace{X \times \cdots \times X}_{N \text{ 個}} \rightarrow U \quad (6.2)$$

のとき、 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N)$ を問題 (6.1) に対する一般政策という。問題 (6.1) に対するすべての一般政策の集合を $\mathcal{G}$ とする。

$$\pi_1 : X \rightarrow U, \quad \pi_2 : X \rightarrow U, \quad \cdots, \quad \pi_N : X \rightarrow U \quad (6.3)$$

のとき、 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$ を問題 (6.1) に対するマルコフ政策という。問題 (6.1) に対するすべてのマルコフ政策の集合を $\mathcal{M}$ とする。

問題 (6.1) において、 $x_1 \in X$ を任意に固定する。このとき、一般政策 $\sigma \in \mathcal{G}$ またはマルコフ政策 $\pi \in \mathcal{M}$ を与えると

$$u_1, u_2, \cdots, u_N \quad \text{および} \quad x_2, \cdots, x_N, x_{N+1}$$

が定まり、目的関数の値

$$g(x_1; \sigma) \quad \text{または} \quad g(x_1; \pi) = r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \cdots + r_N(x_N, u_N) + r_G(x_{N+1})$$

が定まる。

定義 6.1 問題 (6.1) を考える。

- (i) $\sigma^* \in \mathcal{G}$ が問題 (6.1) の最適一般政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$g(x_1; \sigma^*) \geq g(x_1; \sigma), \quad \forall \sigma \in \mathcal{G}$$

となるときをいう。

- (ii) $\sigma^* \in \mathcal{G}$ が問題 (6.1) の弱非劣一般政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$\nexists \sigma \in \mathcal{G} \text{ s.t. } g(x_1; \sigma) > g(x_1; \sigma^*)$$

となるときをいう。

- (iii) $\pi^* \in \mathcal{M}$ が問題 (6.1) の最適マルコフ政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$g(x_1; \pi^*) \geq g(x_1; \pi), \quad \forall \pi \in \mathcal{M}$$

となるときをいう。

- (iv) $\pi^* \in \mathcal{M}$ が問題 (6.1) の弱非劣マルコフ政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$\nexists \pi \in \mathcal{M} \text{ s.t. } g(x_1; \pi) > g(x_1; \pi^*)$$

となるときをいう。

7 確率的動的計画

$N \geq 2$: 段の総数

$X = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$: 有限状態空間

$U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$: 有限決定空間

p : マルコフ推移法則

$$p(y|x, u) \geq 0, \forall (x, u, y) \in X \times U \times X$$

$$\sum_{y \in X} p(y|x, u) = 1, \forall (x, u) \in X \times U$$

$y \sim p(\cdot|x, u)$ は、第 n 段で状態 x , 決定 u のとき、第 $n+1$ 段で状態 y になる確率が $p(y|x, u)$ であることを表す。

とする。また

$r_n : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$: 実数値第 n 利得関数 ($1 \leq n \leq N$)

$r_G : X \rightarrow \mathbb{R}$: 実数値終端利得関数

または

$r_n : X \times U \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: 集合値第 n 利得関数 ($1 \leq n \leq N$)

$r_G : X \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: 集合値終端利得関数

または

$r_n : X \times U \rightarrow \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$: ファジィ集合値第 n 利得関数 ($1 \leq n \leq N$)

$r_G : X \rightarrow \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$: ファジィ集合値終端利得関数

とする。このとき、次の確率的動的計画問題を考える。

$$\begin{cases} \max & E[r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \cdots + r_N(x_N, u_N) + r_G(x_{N+1})] \\ \text{s.t.} & x_{n+1} \sim p(\cdot | x_n, u_n), \quad 1 \leq n \leq N \\ & u_n \in U, \quad 1 \leq n \leq N \end{cases} \quad (7.1)$$

ここで、 $x_1 \in X$ である。問題 (7.1) を N 段過程ともよぶ。特に、 r_n, r_G が実数値の場合は問題 (7.1) を実数値確率的動的計画問題 [1] とよび、 r_n, r_G が集合値の場合は問題 (7.1) を集合値確率的動的計画問題とよび、 r_n, r_G がファジィ集合値の場合は問題 (7.1) をファジィ集合値確率的動的計画問題とよぶ。問題 (7.1) は、一般政策（定義は後述）の範囲で最適一般政策または弱非劣一般政策（定義は後述）を求める問題であると解釈する場合と、マルコフ政策（定義は後述）の範囲で最適マルコフ政策または弱非劣マルコフ政策（定義は後述）を求める問題であると解釈する場合がある。それらの場合を区別して、一般政策の範囲で考えた問題 (7.1) を一般問題とよび、マルコフ政策の範囲で考えた問題 (7.1) をマルコフ問題とよぶ。

$$\sigma_1 : X \rightarrow u, \quad \sigma_2 : X \times X \rightarrow U, \quad \cdots, \quad \sigma_N : \underbrace{X \times \cdots \times X}_{N \text{ 個}} \rightarrow U \quad (7.2)$$

のとき、 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N)$ を問題 (7.1) に対する一般政策という。問題 (7.1) に対するすべての一般政策の集合を $\mathcal{G}$ とする。

$$\pi_1 : X \rightarrow u, \quad \pi_2 : X \rightarrow U, \quad \cdots, \quad \pi_N : X \rightarrow U \quad (7.3)$$

のとき、 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$ を問題 (7.1) に対するマルコフ政策という。問題 (7.1) に対するすべてのマルコフ政策の集合を $\mathcal{M}$ とする。

問題 (7.1) において、 $x_1 \in X$ を任意に固定する。このとき、一般政策 $\sigma \in \mathcal{G}$ またはマルコフ政策 $\pi \in \mathcal{M}$ を与えると

$$u_1, u_2, \dots, u_N \quad \text{および} \quad x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$$

が確率的に定まり、目的関数の値

$$\begin{aligned} & g(x_1; \sigma) \text{ または } g(x_1; \pi) \\ &= E[r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \dots + r_N(x_N, u_N) + r_G(x_{N+1})] \\ &= \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{N+1}) \in X \times X \times \dots \times X} \{[r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \dots + r_N(x_N, u_N) \\ &\quad + r_G(x_{N+1})]p(x_2|x_1, u_1)p(x_3|x_2, u_2) \cdots p(x_{N+1}|x_N, u_N)\} \end{aligned}$$

が定まる。

定義 7.1 問題 (7.1) を考える。

- (i) $\sigma^* \in \mathcal{G}$ が問題 (7.1) の最適一般政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$g(x_1; \sigma^*) \geq g(x_1; \sigma), \quad \forall \sigma \in \mathcal{G}$$

となるときをいう。

- (ii) $\sigma^* \in \mathcal{G}$ が問題 (7.1) の弱非劣一般政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$\nexists \sigma \in \mathcal{G} \text{ s.t. } g(x_1; \sigma) > g(x_1; \sigma^*)$$

となるときをいう。

- (iii) $\pi^* \in \mathcal{M}$ が問題 (7.1) の最適マルコフ政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$g(x_1; \pi^*) \geq g(x_1; \pi), \quad \forall \pi \in \mathcal{M}$$

となるときをいう。

- (iv) $\pi^* \in \mathcal{M}$ が問題 (7.1) の弱非劣マルコフ政策であるとは、任意の $x_1 \in X$ に対して

$$\nexists \pi \in \mathcal{M} \text{ s.t. } g(x_1; \pi) > g(x_1; \pi^*)$$

となるときをいう。

8 n 人非協力ゲーム

まず、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合とする。次に、各 $i \in N$ に対して、 $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ をプレイヤー i のすべての純戦略の集合とし

$$X_i = \left\{ (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{m_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{k=1}^{m_i} x_k^{(i)} = 1 \right\}$$

をプレイヤー i のすべての混合戦略の集合とする。さらに、 $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ とし、 $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ とする。また、各 $i \in N$ に対して、 $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ または $u_i : S \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ または $u_i : S \rightarrow \mathcal{FC}(\mathbb{R}^\ell)$ とし、 u_i をプレイヤー i の（実数値または集合値またはファジィ集合値）利得関数とよび、各 $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S$ に対して、 $u_i(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}$ または $\mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ または $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^\ell)$ は、各プレイヤー $j \in N$ が純戦略 $k_j \in S_j$ をとったときのプレイヤー i の利得を表す。さらに、各 $i \in N$ に対して、 $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ または $f_i : X \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ または $f_i : X \rightarrow \mathcal{FC}(\mathbb{R}^\ell)$ を各 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ に対して

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S} x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} \dots x_{k_n}^{(n)} u_i(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

と定義し、 f_i をプレイヤー i の（実数値または集合値またはファジィ集合値）期待利得関数とよぶ。ここで、 $\mathbf{x}_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)})$, $j \in N$ である。各プレイヤー $i \in N$ は、実数順序または集合順序またはファジィ集合順序 $\leq$ に関して $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を最大にしたい（なるべく大きくしたい）ということを仮定する。そして、 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ とする。このとき、 $\Gamma = (N, X, \mathbf{f})$ を n 人非協力ゲームとよぶ。特に、各プレイヤーの利得関数が実数値ならば実数値 n 人非協力ゲームとよび、各プレイヤーの利得関数が集合値ならば集合値 n 人非協力ゲームとよび、各プレイヤーの利得関数がファジィ集合値ならばファジィ集合値 n 人非協力ゲームとよぶ。

各 $i \in N$ に対して

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{x}_{-i})^< = \{ \mathbf{x}_i \in X_i : \nexists \mathbf{y}_i \in X_i \text{ s.t. } f_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_{-i}) > f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}) \}$$

とする。ここで、 $\mathbf{x}_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i} = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$ であり、 $(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_{-i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{y}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X$, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X$ である。

定義 8.1 ([9, Definition 4.1]) $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$ がゲーム Γ の Nash 均衡戦略 (Nash equilibrium strategy) であるとは、任意の $i \in N$ に対して

$$f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X_i$$

となるをいう。ここで、 $\mathbf{x}_{-i}^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \in X_{-i}$ であり、 $(x_i, \mathbf{x}_{-i}^*) = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \in X$, $(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}^*) = \mathbf{x}^*$ である。このとき、 $(f_1(\mathbf{x}^*), f_2(\mathbf{x}^*), \dots, f_n(\mathbf{x}^*))$ をゲーム Γ の値 (value) とよぶ。

定義 8.2 ([9, Definition 4.4]) $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$ がゲーム Γ の弱非劣 Nash 均衡戦略 (weak non-dominated Nash equilibrium strategy) であるとは

$$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathcal{F}_1(x_{-1}^*)^< \times \mathcal{F}_2(x_{-2}^*)^< \times \dots \times \mathcal{F}_n(x_{-n}^*)^<$$

のときをいう。

9 スカラー化手法の応用

前節までに挙げたすべての問題を実数値または集合値またはファジィ集合値最適化問題とよび、実数値最適化問題の最短路や最適（一般またはマルコフ）政策や Nash 均衡戦略などを最適解とよび、集合値またはファジィ集合値最適化問題の弱非劣路や弱非劣（一般またはマルコフ）政策や弱非劣 Nash 均衡戦略などを弱非劣解とよぶ。

$\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ および $\lambda \in [0, 1]$ に対して、集合値最適化問題の定式化に現れる集合それぞれをスカラー化関数 $\psi_{\mathbf{k}, \lambda}$ によってスカラー化した実数で置き換えた問題を $\mathbf{k}$ および λ に関する集合値最適化問題のスカラー化問題とよぶ。 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\lambda \in [0, 1]$ および $\alpha \in]0, 1]$ に対して、ファジィ集合値最適化問題の定式化に現れるファジィ集合それぞれを、 α -レベル集合をスカラー化関数 $\psi_{\mathbf{k}, \lambda}$ によってスカラー化した実数で置き換えた問題を $\mathbf{k}$, λ および α に関するファジィ集合値最適化問題のスカラー化問題とよぶ。

(4.2) および (4.3) より次の定理が成り立つ。

定理 9.1 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ および $\lambda \in [0, 1]$ に関する集合値最適化問題のスカラー化問題の最適解は、もとの集合値最適化問題の弱非劣解になる。

(3.1), (4.2) および (4.4) より次の定理が成り立つ。

定理 9.2 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\lambda \in [0, 1]$ および $\alpha \in]0, 1]$ に関するファジィ集合値最適化問題のスカラー化問題の最適解は、もとのファジィ集合値最適化問題弱非劣解になる。

10 結論

本稿では、集合およびファジィ集合に対するスカラー化手法を提案した。そして、提案するスカラー化手法を目的関数が集合値またはファジィ集合値であるいくつかの最適化問題に対して応用した。その結果、集合値またはファジィ集合値最適化問題のスカラー化問題（実数値最適化問題）の最適解が、もとの集合値またはファジィ集合値最適化問題の弱非劣解になることを導いた。

参考文献

- [1] T. Fujita, Re-examination of Markov policies for additive decision process, Bulletin of Informatics and Cybernetics, Vol.29, 1997, pp.51–65
- [2] E. Hernández and L. Rodríguez-Marín, Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.325, 2007, pp.1–18
- [3] E. Hernández, B. Jiménez, V. Novo, Weak and proper efficiency in set-valued optimization on real linear spaces, Journal of Convex Analysis, Vol.14, 2007, pp.275–296
- [4] E. Karaman, İ. A. Güvenç, M. Soyertem, D. Tozkan, M. Küçük, Y. Küçük, A vectorization for nonconvex set-valued optimization, Turkish Journal of Mathematics, Vol. 42, 2018, pp.1815–1832
- [5] A. A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu, Set-Valued Optimization, Springer-Verlag Berline Heidelberg, 2015
- [6] Khushboo and C. S. Lalitha, Scalarization and convergence in unified set optimization, RAIRO Operations Research, Vol.55, 2021, pp.3603–3616
- [7] 金正道, ファジィ集合最適化, 弘前大学出版会, 2019
- [8] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己 (編), 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002
- [9] T. Maeda, On Characterization of Nash Equilibrium Strategy in Bi-Matrix Games with Set Payoffs, in *Set Optimization and Applications – The State of the Art* (A. H. Hamel et al. Eds.) (Springer-Verlag Berline Heidelberg, 2015), pp.313–331
- [10] G. L. ネムハウザー, A. H. G. リンヌイカン, M. J. トッド (編), 伊理正夫, 今野浩,

刀根薫（監訳），最適化ハンドブック，朝倉書店，1995

[11] 坂和正敏，石井博昭，西崎一郎，ソフト理最適化，朝倉書店，1995

[12] 梅谷俊治，しっかり学ぶ数理最適化，講談社，2020

[13] F. R. Villanueva, V. A. de Oliveira, T. M. Costa, Optimality conditions for interval valued optimization problems, Fuzzy Sets and Systems, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.06.020>