

AHP における 4 次の一対比較行列の最大固有値と Newton 法

Convergence of Newton's method for the characteristic equation of a fourth-order
pairwise comparison matrix in the analytic hierarchy process
and Newton's method

大分大学・理工学部* 小畑 経史
広島工業大学・情報学部† 白石 俊輔

Tsuneshi Obata
Faculty of Science and Technology, Oita University
Shunsuke Shiraishi
Faculty of Applied Information Science, Hiroshima Institute of Technology

§1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process, 階層化分析法) が広く使われる理由に, 一対比較があげられる. 一対比較によって, 好ましいといった「選好」, 役に立つといった「経験」, かっこいいといった「フィーリング」などが数値化され, 質的データを量的データとして扱うことができるようになる. AHP では, n 個の比較対象を扱う際, 意思決定者の主観的選択 (言語表現) を, Saaty の離散スケール (表 1) を用いて数値化する.

表 1 Saaty の離散スケール

言語表現	値
同程度に重要	1
やや重要	3 or 1/3
ふつうに重要	5 or 1/5
かなり重要	7 or 1/7
絶対的に重要	9 or 1/9
中間の値	2, 4, 6, 8 or その逆数

こうしてできるのが一対比較行列である. いったん, 一対比較行列 A が与えられれば, 比較対象のウエイトは固有値法

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

で求められる. ここで, $\lambda_{\max}$ は行列 A の最大固有値である. 本論では, $n = 4$ のときに, 最大固有値 $\lambda_{\max}$ が Newton 法で求まることを示す. あわせて, Newton 法と, 二分法, セカント法の収束速度を比較したシミュレーションを提示する.

* 〒870-1192 大分市大字旦野原 700 t-obata@oita-u.ac.jp

† 〒731-5193 広島市佐伯区三宅 2-1-1 s.shiraishi.wx@it-hiroshima.ac.jp

§2. 一対比較行列

n 個の比較対象（本論では $n = 4$ ）, $C_i, i = 1, \dots, n$ に対して, AHP においては一対比較を行う. C_i と C_j の比較は前述の Saaty の離散スケール（表 1）を用いる.

C_i と C_j の比較において, C_i が C_j よりやや重要という判断をした場合, ij 成分とその対象要素 ji 成分には $a_{ij} = 3, a_{ji} = 1/3$ を割り当てる. この比較を $n(n-1)/2$ 回繰り返すことにより, n 次の一対比較行列 A が得られる:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

出来上がった一対比較行列は, 正値性 $a_{ij} > 0$, と逆数性 $a_{ij} = 1/a_{ji}$ を持つ. 理想的に一対比較が行われた場合を考察することで, 固有値法の考え方が得られる. もし, 重さとか面積とかのように各比較対象の真の値 $w_1, \dots, w_n$ が分かっているなら, 一対比較行列は,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となるはずである. 一方, AHP では Saaty の離散スケールを使うこともあり, かならずしも $A = W$ とはならないため^{*1}, $A \approx W$ であるとみなすことになる. いっぽう, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ に対し,

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

である. つまり, n は W の（最大）固有値である. $A \approx W$ なのだから, 固有値問題

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

を解けば, 一対比較によって比較対象のウェイトが（近似的に）得られるだろうと考えるのが, AHP における固有値法である [3, 5, 10, 14]. ここで $\lambda_{\max}$ は A の最大固有値である. 本論では Newton 法によって $\lambda_{\max}$ が求まることを示す. 固有値法の数理最適化による理論づけについては [11] で確立された.

$\lambda_{\max}$ には次の性質がある.

Theorem 1 (Saaty [10])

1. $\lambda_{\max} \geq n$,
2. $\lambda_{\max} = n \Leftrightarrow A$ が整合的.

ここで A が整合的であるとは, $i, k, j = 1, \dots, n$ に対し

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$$

^{*1} $n = 4$ のときに $A = W$ となるのは, Saaty の離散スケールで表現できる一対比較行列の 0.001421% にすぎない [7].

が成り立つときをいう。整合的であることと、 $A = W$ となることは同値である。この事実をもとに提案された工夫が、AHP における整合度 (consistency index) C.I. である。

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

C.I. ≤ 0.1 が Saaty による整合度の判定基準である [3, 5, 10, 14]。整合度の導入が、AHP をメジャーにした最も大きな理由であると考えられる。なお、AHP における多様な整合度指標については、[4] のサーベイを参照されたい。

§3. 一対比較行列の固有多項式

一対比較行列が正値逆数行列であることを使って、われわれは次の結果を得ている。

Theorem 2 (Shiraishi-Obata-Daigo [13]) $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を A の固有多項式とする。

1. $P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + 0 \cdot \lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \det A.$
2. $c_3 = \sum_{i < k < j} \left(2 - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{ij}} - \frac{a_{ij}}{a_{ik}a_{kj}} \right) \leq 0,$
3. $\text{C.I.} = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0.$

Corollary 1 (小畑・白石 [8]) $n = 3$ のとき、

1. $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \det A,$
2. $c_3 = -\det A \leq 0,$
3. $\text{C.I.} = 0 \Leftrightarrow \det A = 0.$

この事実を元に、われわれは、3 次の一対比較行列に対し、最大固有値が Newton 法でもとまることを示した [12]。3 次の一対比較行列の固有方程式 $P_A(\lambda) = 0$ の実数解は、次の Newton 法の反復を用いて求めることができる。

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 3, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

固有多項式が解析的表現を持つことがポイントである。Theorem 2 より、4 次の一対比較行列に対しても、固有多項式は解析的表現を持つ。次節ではこの事実を用いて、4 次の一対比較行列に対する、Newton 法の収束を示す。

Corollary 2 (Obata-Shiraishi [7]) $n = 4$ のとき、

1. $P_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + c_3\lambda + \det A,$
2. $\text{C.I.} = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0.$

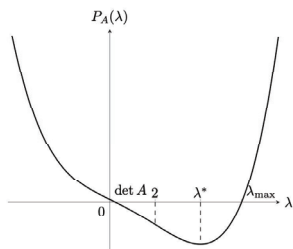


図1 不整合な A に対する $P_A(\lambda)$ のグラフ

§4. Newton 法

3 次の場合に倣って, 4 次の一対比較行列の固有方程式 $P_A(\lambda) = 0$ の実数解を, 次の Newton 法の反復を用いて求めようとした.

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 4, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

しかし, この場合, 初期点 $\lambda_0 = 4$ の取り方は必ずしも適切ではない. $\lambda_{\max}$ に収束せず, 一般にふたつある $P_A(\lambda) = 0$ のうち, 小さい方に収束してしまうことがある.

ここでいったん理論的技巧を行なった. $P_A(\lambda)$ は不整合な A に対しては, invex 関数になるので, 停留点が最小点になる. この最小点を λ^* とすると次の事実が言える.

Theorem 3 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \lambda^* + \varepsilon, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

で生成される点列は, $\lambda_{\max}$ に収束する.

Remark 1 $P_A(\lambda^*) < 0, P'_A(\lambda^*) = 0$ なので, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し, $\lambda_1 > \lambda_{\max}$ となることが, この定理の技巧である. 翻って, そもそも $\lambda_0 > \lambda_{\max}$ が取ればよいことに気付く. これを与えるのが次の Aupetit-Genest の上界である.

Theorem 4 (Aupetit-Genest [1]) $1/S \leq a_{ij} \leq S$ に対し,

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{upper}} &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)(S+1/S), \\ n &\leq \lambda_{\max} \leq \lambda_{\text{upper}}.\end{aligned}$$

Remark 2 ここでは $n = 4, S = 9$ なので, $\lambda_{\text{upper}} = \frac{132}{9} = 14.66\dots$

$\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ とすると次のことが言える.

Lemma 1 λ_k は下に有界である.

Lemma 2 λ_k は減少列である.

下に有界な減少列は収束するので^{*2}、以下の結果が得られる。

Theorem 5 初期値 $\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ に対し、Newton 法で生成した点列は最大固有値 λ_{max} に収束する。

Newton 法によって、いったん λ_{max} が求まれば、連立 1 次方程式 $Aw = \lambda_{\text{max}}w$ から、ウェイト w を求めるのには、次の最小二乗化問題を、たとえば Excel の Solver で、解けばよい [2]。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (a_{ij}w_j - \lambda_{\text{max}}w_j)^2 \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^4 w_j = 1, \quad w_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

§5. 収束速度と数値実験

Newton 法なので、収束は 2 次収束である。

Proposition 1 (Shiraishi-Obata [12] と同様)

$$\lambda_{k+1} - \lambda_{\text{max}} \approx \frac{1}{2} \frac{P''_A(\lambda_{\text{max}})}{P'_A(\lambda_{\text{max}})} (\lambda_k - \lambda_{\text{max}})^2.$$

Newton 法の収束速度を確認するために、二分法^{*3}、セカント法^{*4}と比較する数値実験も行った。表 2、図 2 に、Saaty の離散スケールによる 5,000 個のランダムな 4 次の一対比較行列に対する、各手法の収束までの反復回数の分布を示す。なお、ここでは、反復で得られた値と λ_{max} との差が 10^{-12} 以下になった時点で、収束した、とみなすことにした。

表 2 集計結果

	最小	中央値	最頻値	平均	最大
Newton	5	8	9	8.1720	10
secant	7	13	11	16.8810	100
bisection	28	42	42	41.3664	42

なお、セカント法では λ_{max} に収束しないケースがある（小さい方の実数解に収束）。その場合は反復を 100 回で打ち切っているため、そのデータとしてセカント法の最大反復数が 100 回となっている。

一例として、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 9 \\ 1/9 & 1/3 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

に対する各手法での収束の様子を図 3 に表している。この行列に対しては、Newton 法では 8 回、セカント法では 13 回、二分法では 42 回で解に収束した。これは各手法での反復回数のいずれも中央値であり、今回の数値実験での典型例といえる。

^{*2} https://encyclopediaofmath.org/wiki/Decreasing_sequence

^{*3} https://encyclopediaofmath.org/wiki/Dichotomy_method

^{*4} https://encyclopediaofmath.org/wiki/Secant_method

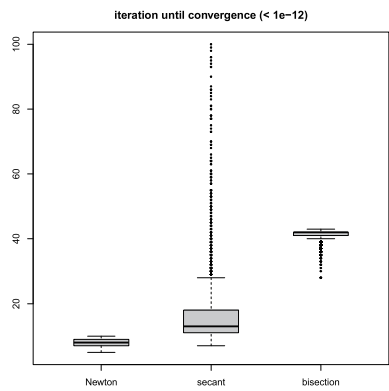


図 2 収束までの反復回数の分布（箱ヒゲ図）

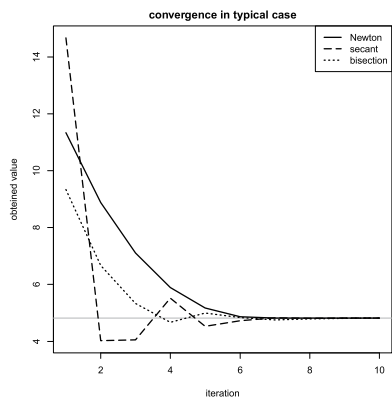


図 3 収束までの様子（典型例）

参考文献

[1] B. Aupetit, C. Genest: On some useful properties of the Perron eigenvalue of a positive reciprocal matrix in the context of the analytic hierarchy process, EJOR, Vol.70, Issue 2,1993, 263–268.

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe: *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.

[3] M. Brunelli: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*, Springer, 2014.

[4] M. Brunelli: A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons, International Journal of General Systems, 47, 2018, 751–771.

[5] K Kulakowski: *Understanding the Analytic Hierarchy Process*, CRC Press, 2021.

[6] T. Obata, S. Shiraishi: Consistency index less affected by the size of pairwise comparison matrix in AHP, Proceedings of the 18th Asia Pacific Management Conference, 2016, 369–377.

[7] T. Obata, S. Shiraishi: Computational study of characteristic polynomial of 4th order PCM in AHP,

- Bulletin of Informatics and Cybernetics, 53(3), 2021, 1–12.
- [8] 小畑経史, 白石俊輔: AHP の 3 次の一対比較行列の最大固有値の計算法—二分法, セカント法, ニュートン法の比較—, 大分大学理工学部研究報告, 69, 2022.
 - [9] T. Obata, S. Shiraishi, M. Daigo, N. Nakajima: Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: Computational experiments, Proceedings of The Fifth International Symposium on The Analytic Hierarchy Process, 1999, 200–205.
 - [10] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
 - [11] K. Sekitani, N. Yamaki: A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, 42(2), 1999, 219–232.
 - [12] S. Shiraishi, T. Obata: On a maximum eigenvalue of third-order pairwise comparison matrix in analytic hierarchy process and convergence of Newton's method, SN Operations Research Forum, 2(3), 2021, Article No. 30.
 - [13] S. Shiraishi, T. Obata, M. Daigo: Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, 41(3), 1998, 404–414.
 - [14] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, 1986.