Borsuk-Ulamの定理の最適化への応用
An application of Borsuk-Ulam's theorem to optimization

川崎英文，九州大学大学院数理学研究院 *
Hidefumi Kawasaki †
Faculty of Mathematics, Kyushu University

Abstract

Borsuk-Ulam の定理は n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への任意の連続写像 f に対して，$f(x) = f(-x)$ を満たす点 $x \in S^n$ が存在することを主張する．応用としては，ハムサンドイッチ定理，ネックレス定理，Lovász による Kneser 予想の解決等が有名である．本稿では Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用を図る．

1 序

Borsuk-Ulam の定理 [1] は代数トポロジーの重要な定理であり，n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への任意の連続写像 f に対して，$f(x) = f(-x)$ を満たす点 $x \in S^n$ が存在することを主張する．Borsuk-Ulam の定理と同値な定理がいくつかある．組合せ版の Tucker の補題や，集合被覆版の LSB 定理などである（Matoušek [4]）．Brouwer の不動点定理にも組合せ版の Sperner の補題や集合被覆版の KKM 補題などがあり，Borsuk-Ulam の定理から Brouwer の不動点定理を導くことはできるが，その逆は知られていない．

Borsuk-Ulam の定理の応用としては，ハムサンドイッチ定理，ネックレス定理，Lovász [3] による Kneser 予想の解決等が有名であり，本研究ではハムサンドイッチ定理の手法を取り入れる．

μ を $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度とし，$A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ を有限の測度をもつ集合とする．ハムサンドイッチ定理は $A_i (i = 1, \ldots, n)$ の体積を同時に 2 等分する超平面 H が存在することを主張する．すなわち，H で定まる閉半空間を H^+, H^- とするとき

$$\mu(A_i \cap H^+) = \mu(A_i \cap H^-) \ (i = 1, \ldots, n)$$

が成立する．

本論文では，Borsuk-Ulams の定理の最適化への応用を図る．2 節でパラメータ $\boldsymbol{u} \in S^n$ のパレメトリックな非線形計画問題を導入し，最適値関数の $\boldsymbol{u}$ に関する連続性を議論する．3 節で 2 節の結果を検証し，最適値関数の改良をおこない，Borsuk-Ulams の定理を適用する．4 節で目的関数が内積で与えられる場合を考察し，$A_1, \ldots, A_n$ の幅を同時に 2 等分する超平面の存在を示す．本稿を通して A_i の内部を $\operatorname{int} A_i$，凸包を $\operatorname{co} A_i$ で表す．

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

†本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている．

2　パラメトリックな非線形計画問題

パラメータ $\boldsymbol{u} \in S^n$ をもつパレメトリックな非線形計画問題を以下のように与える．

S^n の元 $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ に対し，最初の n 次元ベクトルを $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ で表すと，$\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1})$ と書くことができる．$\langle u, x \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の内積 $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ として，各 $\boldsymbol{u} \in S^n$ に対して，超平面 $H_{\boldsymbol{u}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = u_{n+1}\}$ と 2 つの閉半空間

$$H_{\boldsymbol{u}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \geq u_{n+1}\}, \quad H_{\boldsymbol{u}}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq u_{n+1}\}$$

をとると，$H_{-\boldsymbol{u}}^+ = H_{\boldsymbol{u}}^-$ が成立することが容易に分かる．$u \neq \mathbf{0}$ の場合は $H_{\boldsymbol{u}}^+$ も $H_{\boldsymbol{u}}^-$ も非空であり，$u = \mathbf{0}$ の場合は $H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $H_{\boldsymbol{u}}^-$ の一方は $\mathbb{R}^n$ で，他方は空である．

$A_i \subset \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクト凸集合，$f_i : \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．パラメトリックな最適値関数

$$F_i(\boldsymbol{u}) := \max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u})$$

は，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ が非空から空に変わる点で連続性を保証できない（図 1）．Borsuk-Ulam の定理を

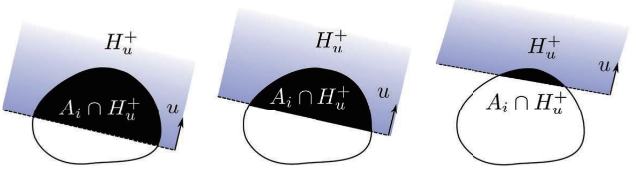

図 1: 最適値関数 $F_i(\boldsymbol{u})$ の不連続性.

適用するには S^n 全体での連続性が必要なので，次の写像 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : S^n \to \mathbb{R}^n$ を考える．

$$\psi_i(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ \neq \emptyset), \\ 0 & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ = \emptyset). \end{cases} \tag{1}$$

定理 1 $i = 1, \dots, n$ として，$A_i \subset \mathbb{R}^n$ を内部が非空なコンパクト凸集合，$f_i : \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．A_i の任意の境界点 x とその点での A_i の任意の支持超平面 H に対して，$A_i \cap H$ は 1 点集合と仮定する．このとき，ψ は S^n 全体で連続である．

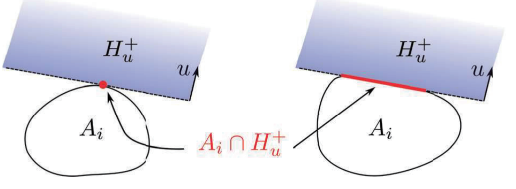

図 2: 左は狭義凸性の仮定を満たす．右は満たさないので ψ_i は不連続になる．

本定理を含めて，本稿の命題の証明は Kawasaki [2] にある．なお，定理 1 の A_i の境界点に関する仮定を集合 A_i の狭義凸性の仮定とよぶことにする．

3　最適値関数の改良

本節では例を挙げて最適値関数 ψ が十分でないことを示し，その改良版を提示する．

例 1 $n=1$. 関数 $f:\mathbb{R}\times S^1\to\mathbb{R}$ として $f(x_1,\boldsymbol{u})=u_1x_1$ をとり，コンパクト凸集合として $A=[-1,1]$ をとる．点 $\boldsymbol{u}\in S^1$ を $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)=(u_1,u_2)$ と極座標表示すると，

$$A\cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}=\{x_1\in[-1,1]\mid x_1\cos\theta\geq\sin\theta\}=\begin{cases}\emptyset & (\theta=\pi/2)\\ [-1,1] & (\theta=3\pi/2)\\ [-1,1]\cap[\tan\theta,\infty) & (\cos\theta>0)\\ [-1,1]\cap(-\infty,\tan\theta] & (\cos\theta<0).\end{cases}$$

よって，$A\cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}=\emptyset\ \Leftrightarrow\ \tan\theta\notin[-1,1]\ \Leftrightarrow\ \pi/4<\theta<3\pi/4$. $A\cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}$ が空でないとき，

$$A\cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}=\begin{cases}[\tan\theta,1] & (-\pi/4\leq\theta\leq\pi/4)\\ [-1,\tan\theta] & (3\pi/4\leq\theta\leq5\pi/4)\\ [-1,1] & (5\pi/4\leq\theta\leq7\pi/4).\end{cases}$$

最適値関数は以下のようになる．

$$\max_{x\in S(\boldsymbol{u})}f(x,\boldsymbol{u})-\min_{x\in S(\boldsymbol{u})}f(x,\boldsymbol{u})=\begin{cases}\cos(\theta)-\sin(\theta) & (-\pi/4\leq\theta\leq\pi/4)\\ \sin(\theta)-\cos(\theta) & (3\pi/4\leq\theta\leq5\pi/4)\\ 2|\cos(\theta)| & (5\pi/4,7\pi/4).\end{cases}$$

$$\psi(\boldsymbol{u})=\begin{cases}|\cos(\theta)-\sin(\theta)| & \text{on }[-\pi/4,\pi/4]\cup[3\pi/4,5\pi/4]\\ 0 & \text{on }[\pi/4,3\pi/4]\\ 2|\cos(\theta)| & \text{on }[5\pi/4,7\pi/4].\end{cases}\tag{2}$$

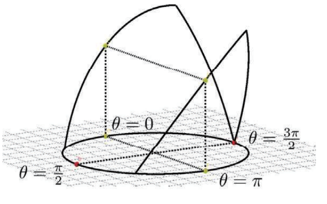

図 3: ψ の S^1 上でのグラフ．

この例では，$\psi(\boldsymbol{u})=\psi(-\boldsymbol{u})$ を満たす点 $\boldsymbol{u}\in S^1$ が 2 組存在する．ひとつは $\boldsymbol{u}=(1,0)$，$\psi(\boldsymbol{u})=\psi(-\boldsymbol{u})=1$，極座標は $\theta=0,\pi$ である．他方は $\boldsymbol{u}^*=(0,1)$，$\psi(\boldsymbol{u}^*)=\psi(-\boldsymbol{u}^*)=0$ で，極座標は $\theta=\pi/2,3\pi/2$ である．この 2 対を詳しく見ていこう．

- $\boldsymbol{u} = (1,0)$ で $S(\boldsymbol{u}) = A \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+} = [0,1]$ かつ $S(-\boldsymbol{u}) = A \cap H_{-\boldsymbol{u}}^{+} = [-1,0]$ なので，等式 $\psi(1,0) = \psi(-1,0) = 1$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\max_{x_1 \in A \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}} u_1 x_1 - \min_{x_1 \in A \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}} u_1 x_1 &= \max_{x_1 \in A \cap H_{-\boldsymbol{u}}^{+}} (-u_1 x_1) - \min_{x_1 \in A \cap H_{-\boldsymbol{u}}^{+}} (-u_1 x_1) \\ &= \max_{x_1 \in A \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-}} u_1 x_1 - \min_{x_1 \in A \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-}} u_1 x_1 = 1\end{aligned}$$

- $\boldsymbol{u}^* = (0,1)$ で $S(\boldsymbol{u}^*)$ は空なので，ψ が連続になるように $\psi(0,1) = 0$ と定義した．さらに，$u_1^* = 0$ と $A \cap H_{-\boldsymbol{u}^*}^{+} = A$ から，$\psi(0,-1) = 0$ は自明な等式

$$\max_{x_1 \in A \cap H_{-\boldsymbol{u}^*}^{+}} (-u_1^* x_1) - \min_{x_1 \in A \cap H_{-\boldsymbol{u}^*}^{+}} (-u_1^* x_1) = \max_{x_1 \in A} 0 - \min_{x_1 \in A} 0 = 0$$

  になる．この意味で，$(\boldsymbol{u}^*, -\boldsymbol{u}^*)$ は自明な対である．

そこで，自明な対を排除するために ψ を改良する．写像 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : S^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\varphi_i(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \displaystyle\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}} f_i(x,\boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}} f_i(x,\boldsymbol{u}) & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+} \neq \emptyset), \\ (1 - \varepsilon - u_{n+1})/\varepsilon & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+} = \emptyset,\ u_{n+1} > 1 - \varepsilon), \\ 0 & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+} = \emptyset,\ u_{n+1} \leq 1 - \varepsilon) \end{cases} \tag{3}$$

で定義する．ここで，$\varepsilon > 0$ は十分小さいものとする．φ_i と ψ_i の違いは第 2 の場合分けである．また，$N_\varepsilon := \{\boldsymbol{u} \in S^n \mid u_{n+1} > 1 - \varepsilon\}$ を北極 $\boldsymbol{u}^* := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ の ε-近傍とよぶことにする．

補題 1 ε を十分小さな正数とする．定理 1 の仮定の下で以下が成り立つ．

(1) φ_i の北極 $\boldsymbol{u}^* = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ における値は -1 である．

(2) 任意の $\boldsymbol{u} \in N_\varepsilon$ で $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{+}$ は空である．

(3) φ_i の境界 ∂N_ε 上での値は 0 である．

(4) φ_i の N_ε 上での値は負である．

(5) φ_i は S^n 上で連続である．

補題 2 各 $f_i(x,\boldsymbol{u})$ は $\boldsymbol{u}$ に関して対心的とする．すなわち，$f_i(x,-\boldsymbol{u}) = -f_i(x,\boldsymbol{u})$ がすべての $(x,\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n \times S^n$ で成立すると仮定する．このとき，

$$\varphi_i(-\boldsymbol{u}) = \begin{cases} \displaystyle\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-}} f_i(x,\boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-}} f_i(x,\boldsymbol{u}) & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-} \neq \emptyset), \\ (1 - \varepsilon + u_{n+1})/\varepsilon & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-} = \emptyset,\ -u_{n+1} > 1 - \varepsilon), \\ 0 & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^{-} = \emptyset,\ -u_{n+1} \leq 1 - \varepsilon). \end{cases} \tag{4}$$

Borsuk-Ulam の定理を $\varphi : S^n \to \mathbb{R}^n$ に適用することにより，次の定理を得る．

定理 2 定理 1 と補題 2 の仮定の下で，ある $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在して，各 $i = 1, \ldots, n$ に対して (i) か (ii) のいずれかが成立する．

(i) $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ は非空で，

$$\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) = \max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x, \boldsymbol{u}). \tag{5}$$

(ii) $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ の一方は空で，他方は A_i であり，$f_i(\cdot, \boldsymbol{u})$ は A_i 上で定数関数である．

$f_i(x, \boldsymbol{u})$ として双線形関数をとると，定理 2 の (ii) は排除される．

定理 3 定理 1 の仮定が満たされているとする．Q_i を n 次の正則行列として，$f_i(x, \boldsymbol{u}) = \langle u, Q_i x \rangle$ とする．このとき，ある $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在して，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ は非空で，次の等式がすべての $i = 1, \ldots, n$ で成立する．

$$\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) = \max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x, \boldsymbol{u}). \tag{6}$$

4　特別な $f_i(x, \boldsymbol{u})$

２節と３節において A_i の狭義凸性を仮定したが，$f_i(x, \boldsymbol{u}) = \langle u, x \rangle = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ をとると，その仮定は不要になる．

補題 3 $f_i(x, \boldsymbol{u}) = \langle u, x \rangle$ とすると，φ_i は S^n 全体で連続である．

定理 4 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ を内部が非空なコンパクト凸集合とすると，ある $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在して，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ は非空であり

$$\delta^*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+) = \delta^*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-) \tag{7}$$

がすべての $i = 1, \ldots, n$ で成立する．ただし，$\delta^*(u \mid X) := \max_{x \in X} \langle u, x \rangle$, $\delta_*(u \mid X) := \min_{x \in X} \langle u, x \rangle$.

コンパクト集合の凸包はコンパクト凸集合なので，A_i の凸包をとることにより，A_i から凸性の仮定を外すことができる．そのため，A_i は有限集合でもよいことになる．

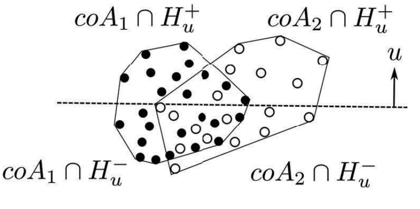

図 4: 2 次元データ A_1, A_2 の幅の等分割．A_1 は黒丸．A_2 は白丸．

系 1 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ をコンパクト集合で，その凸包の内部は非空とすると，ある $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在して，すべての $i = 1, \ldots, n$ で $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ は非空であり，次の等式が成立する．

$$\delta^*(u \mid \operatorname{co} A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+) - \delta_*(u \mid \operatorname{co} A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+) = \delta^*(u \mid \operatorname{co} A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-) - \delta_*(u \mid \operatorname{co} A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-). \tag{8}$$

5 謝辞

本研究は科学研究費 JSPS KAKENHI Grant Number 16K05278 の支援を受けている.

参 考 文 献

[1] K. Borsuk, Drei Sätze üver die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae*, **20** (1933), 177–190.

[2] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam's theorem to nonlinear programming, https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.13748 (2023).

[3] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theorey, Ser. A*, **25** (1978), 319–324.

[4] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer, Berlin Heidelberg, (2008).