

The convergence of the sequence of conditional expectations

岩手大学 本田 卓

Takashi Honda

Faculty of Education, Iwate University, Japan

E-mail address: thonda7@iwate-u.ac.jp

概要 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において、 $\mathcal{F}$ の部分代数の列 $\{\mathcal{G}_n\}$ が単調なら、任意の実数値確率変数 $X \in L^p(\Omega)$ の条件付き期待値の列 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ が L^p ノルムに関して収束することが知られている。(ここで、 $1 \leq p < \infty$ を定数とする。) これは、Lévy の定理といわれている。 $1 < p < \infty$ のとき、 $L^p(\Omega)$ は滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間とみなすことができる。従って、そのような Banach 空間での線形射影の収束定理より、Lévy の定理の一般化が可能であるように思われる。本論文では、筆者の最新の研究 [7] での厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間での線形射影の収束定理に触れ、Lévy の定理の一般化とその具体例について言及する。

1 はじめに

本論文では、基本的に実 Banach 空間を扱う。また、特に断りがなければ、滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間とする。筆者の研究より、Banach 空間の直交補空間分解を用いて示すことにする。以下では、 E を実 Banach 空間とする。 E を滑らかな Banach 空間、 J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) とすると、以下のような汎関数 $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ を定義できる。

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2.$$

正規化双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像で、どんな Banach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる。さらに、 E が滑らかな Banach 空間の場合は一価写像である。その他詳細は [15] を参照。 C を E の閉凸部分集合とし、写像 $T : C \rightarrow C$ が不動点を持ち、不等式

$$\phi(Tx, y) \leq \phi(x, y)$$

をすべての C の要素 x と T の不動点 $y \in F(T)$ とにおいて満たすとき、この写像を一般化非拡大 (generalized nonexpansive) 写像と呼ぶ。茨木-高橋 [10] を参照。もし E の、空でないある部分集合の上への冪等写像 R がこの性質を持つとき、 R を一般化非拡大射影 (generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ。さらに、すべての $x \in E$ 、 $t \geq 0$ において等式 $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ が成り立つとき、 R を sunny generalized nonexpansive retraction と呼ぶ。 E の非空閉部分集合 C の上への冪等写像 R_C が sunny generalized nonexpansive retraction であることと、任意の $x \in E$ 、 $y \in C$ において、不等式 $\langle x - R_Cx, Jy - JR_Cx \rangle \leq 0$ が成り立つことが同値である。逆に、 E のある部分集合が E からその集合上への sunny generalized nonexpansive retraction を持つとき、その集合を E

の sunny generalized nonexpansive retract と呼ぶ。\$E\$ が滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間のとき、\$E\$ の非空部分集合 \$C\$ が \$E\$ の sunny generalized nonexpansive retract になるための必要十分条件は、高阪-高橋 [11] により、\$C\$ の正規双対写像 \$J\$ による像 \$JC\$ が \$E\$ の共役空間 \$E^*\$ での閉凸集合であることが知られている。またこれは \$E\$ の一般化非拡大レトラクト (generalized nonexpansive retract) である必要十分条件でもあり、このとき、\$E\$ の \$C\$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction \$R_C\$ は、\$R_C = J^{-1}\Pi_{JC}J\$ と表現できる。ここで、\$\Pi_{JC}\$ は \$E^*\$ の \$JC\$ の上への一般化射影である。

そこで、滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間 \$E\$ の非空部分集合 \$C\$ において、\$JC = Y^*\$ が \$E^*\$ での閉部分空間である場合を考える。このとき、任意の \$x \in E\$ は、

$$x = P_{Y^*}x + R_{J^{-1}Y^*}x$$

と表現できる。ここで、\$Y^*_{\perp} = \{x \in E : \text{任意の } y^* \in Y^* \text{ において } \langle x, y^* \rangle = 0\}\$、\$P_{Y^*_{\perp}}\$ は \$E\$ の \$Y^*_{\perp}\$ の上への距離射影を表す。また逆に、\$Y\$ を \$E\$ の閉部分空間とすると、任意の \$x \in E\$ は、

$$x = P_Yx + R_{J^{-1}Y^*_{\perp}}x$$

と表現できる。ここで、\$Y^{\perp} = \{x^* \in E^* : \text{任意の } y \in Y \text{ において } \langle y, x^* \rangle = 0\}\$ とし、\$Y^{\perp}\$ は \$E^*\$ の閉部分空間なので、\$E\$ の \$J^{-1}Y^{\perp}\$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction \$R_{J^{-1}Y^{\perp}}\$ が存在する。これを、Banach 空間における直交補空間分解と呼び、Hilbert 空間では通常の直交補空間分解になっている。詳細は [2, 3, 8, 9] を参照。

さらに以下の定理より、ノルムが 1 の線形射影は sunny generalized nonexpansive retraction であると言える。

Theorem 1.1 ([8]). \$Y^*\$ を共役空間 \$E^*\$ の閉部分空間とする。もし、\$E\$ の \$J^{-1}Y^*\$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction が quasi-nonexpansive ならば、それは線形射影である。逆に、すべての縮小線形射影は sunny generalized nonexpansive かつ quasi-nonexpansive である射影である。

従って、\$E\$ 上の任意のノルムが 1 の線形射影 \$T\$ において、\$I - T\$ は \$Y^*_{\perp}\$ の上への距離射影である。ここで、\$Y^*\$ は線形射影 \$T\$ による \$E\$ の像 \$Y\$ において、

$$Y^* = JY$$

をみたす \$E^*\$ の部分集合 (部分空間) である。

2 Banach 空間での線形射影の収束条件

\$E\$ を Banach 空間とし、\$\{C_n\}\$ を \$E\$ の非空閉凸部分集合の列とする。\$s\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n\$ で、各 \$n \in \mathbb{N}\$ において \$x_n \in C_n\$ をみたす点列 \$\{x_n\} \subset E\$ の強収束による極限で構成される集合とし、\$w\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n\$ で、各 \$n \in \mathbb{N}\$ において \$y_n \in C_n\$ をみたす点列 \$\{y_n\} \subset E\$ の弱収束する部分列 \$\{y_{n_i}\}\$ の極限で構成される集合とする。一般に、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n \subset s\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n \subset w\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} C_n$$

が成り立つ。集合 C が

$$\text{s-liminf}_{n \rightarrow \infty} C_n = C = \text{w-limsup}_{n \rightarrow \infty} C_n$$

を満たすとき、 $\{C_n\}$ が C に Mosco 収束すると言い、

$$C = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$$

と書く。一般に C が $\{C_n\}$ の Mosco 極限であるとき、 C は E の閉凸部分集合である。詳細は [4, 13, 16] を参照。

1984 年に以下の定理より、Banach 空間の距離射影の収束定理が得られた。

Theorem 2.1 ([16]). E を E^* が Frechét 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とし、 $\{C_n\}$ を E の非空閉凸部分集合の列とする。このとき、以下は同値である。

- (i) $\{C_n\}$ が E の非空部分集合に Mosco 収束する;
- (ii) E の非空閉凸部分集合 C が存在し、すべての $x \in E$ において、 $d(x, C_n)$ が $d(x, C)$ に収束する;
- (iii) すべての $x \in E$ において、 $\{P_{C_n}x\}$ がノルム収束する,

ここで、 $d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ 、 P_{C_n} は E の C_n の上への距離射影を表す。さらにこのとき、 $C = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$ で、すべての $x \in E$ において、 $\{P_{C_n}x\}$ は P_Cx にノルム収束する。

この定理と、前節の線形射影による Banach 空間の直行補空間分解を用いると、以下の定理が得られる。

Theorem 2.2 ([7]). E を Banach 空間とし、 $P_n, n \in \mathbb{N}$ を E のノルムが 1 の線形射影とし、 M_n を E のその像とする。今、 E と E^* が Frechét 微分可能なノルムを持つと仮定する。

もし、 $\{JM_n\}$ が閉部分空間 JM に E^* で Mosco 収束するなら ($JM = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} JM_n$)、 M は E の 1-complemented subspace であり、各 $x \in E$ において $\{P_nx\}$ は Px に強収束する。ここで、 P は E のノルムが 1 の線形射影で M は E のその像である。

逆に、各 $x \in E$ において $\{P_nx\}$ が強収束するなら、 $\{JM_n\}$ は E^* の閉部分空間 JM に Mosco 収束する ($JM = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} JM_n$)。また、 Px に強収束する。 $\{P_nx\}$ の極限は Px である。ここで、 P は E の M の上へのノルムが 1 の線形射影である。

3 条件付き期待値への応用

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 E を実 $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ とする。このとき、 E と E^* を Frechét 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とみなすことができる。詳細は [6] を参照。また、正規化双対写像 $J: E \rightarrow E^*$ は $x(\omega) \in E$ において、以下のように表現される。

$$Jx(\omega) = |x(\omega)|^{p-1} \frac{\text{sign } x(\omega)}{\|x\|^{p-2}};$$

[5] を参照。 $x \in E$ を $\mathcal{F}$ の部分代数 $\mathcal{G}$ に関して可測な関数とすると、 $Jx \in E^*$ も $\mathcal{G}$ 可測である。 M^p を E での $\mathcal{G}$ 可測な関数で構成された E の閉部分空間、 M^q を E^* での $\mathcal{G}$ 可測な関数で構成さ

れた E^* の閉部分空間とする。このとき、 $JM^p = M^q$ が成り立つ。 $x \in E$ の $\mathcal{G}$ に関する条件付き期待値 $E[x|\mathcal{G}]$ は、 E の M^p の上へのノルムが 1 の線形射影である。よって、上の定理 2.2 より、以下の定理が得られる。

Theorem 3.1 ([7]). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、 $\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N}$ を $\mathcal{F}$ の部分代数とする。 $1 < p < \infty, 1 < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とすると、 M_n^q は実 $L^q(\Omega)$ の閉部分空間である。ここで、 M_n^q は実 $L^q(\Omega)$ の $\mathcal{G}_n$ 可測関数すべての集合とする。

もし $\{M_n^q\}$ が実 $L^q(\Omega)$ のある閉部分空間 M^q に Mosco 収束するなら ($M^q = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} M_n^q$)、任意の実数値確率変数 $X \in L^p(\Omega)$ において、条件付き期待値の列 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ は $L^p(\Omega)$ のある確率変数に L^p ノルムで収束する。

逆に、もし、任意の実数値確率変数 $X \in L^p(\Omega)$ において、条件付き期待値の列 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ が $L^p(\Omega)$ のある確率変数に L^p ノルムで収束するなら、 $\{M_n^q\}$ は実 $L^q(\Omega)$ のある閉部分空間 M^q に Mosco 収束する ($M^q = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} M_n^q$)。

もし $\{\mathcal{G}_n\}$ がフィルターなら、 $\{M_n^q\}$ は単調列になり $L^q(\Omega)$ のある閉部分空間に Mosco 収束する。[13] を参照。一方、 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ は L^p 有界なマルチンゲールとなり、 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ は $L^p(\Omega)$ のある確率変数に L^p ノルムで収束する。詳細は [17] を参照。つまり、この定理は Lévy の定理の一般化になっている。

Example 3.1. 可測集合 $A_n \in \mathcal{F}$, $P(A_n) > 0$, $P(A_n^c) > 0$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ と A_n により生成された $\mathcal{F}$ の部分代数 $\mathcal{G}$ を考える。ここで、 A_n^c は A_n の補集合を表すとする。確率変数 $X \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ において、条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}_n]$ は

$$X_n = E[X|\mathcal{G}_n] = \frac{\int_{A_n} X dP}{P(A_n)} \mathbf{1}_{A_n} + \frac{\int_{A_n^c} X dP}{P(A_n^c)} \mathbf{1}_{A_n^c}$$

と表現される。ここで、 $\mathbf{1}_{A_n}$ と $\mathbf{1}_{A_n^c}$ は各々 A_n と A_n^c の特性関数である。もし $\omega \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ なら、十分大きな自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の $n > N$ において、 $\omega \in A_n^c$ が成り立つようにできる。そのような $n > N$ において、

$$X_n(\omega) = \frac{\int_{A_n^c} X dP}{P(A_n^c)}$$

が成り立つ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n^c} X dP = \int X dP$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c) = 1$ が成り立つので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \int X dP$$

が言える。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \int X dP \mathbf{1}_\Omega \text{ a.s.}$$

が得られる。つまり、 $\mathcal{G}_\infty = \{\Omega, \emptyset\}$ とすると、列 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ は $E[X|\mathcal{G}_\infty]$ にほとんど確実に収束する。

また、 $|X|^p$ は可積分なので、任意の $\varepsilon > 0$ において、 $\delta > 0$ が存在し、

$$\int_F |X|^p dP < \varepsilon$$

が任意の $F \in \mathcal{F}$, $P(F) < \delta$ で成り立つようにできる。 $K > 0$, $K^{-1} \int |X|^p dP < \delta$ とすると、Jensen の不等式より、

$$|X_n|^p = |E[X|\mathcal{G}_n]|^p \leq E[|X|^p|\mathcal{G}_n]$$

が得られる。それ故、

$$\int |X_n|^p dP \leq \int |X|^p dP$$

が、任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。

$$KP(|X_n|^p > K) \leq \int |X_n|^p dP \leq \int |X|^p dP$$

より、

$$P(|X_n|^p > K) < \delta$$

が、任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。これは、列 $\{|X_n|^p\}$ 一様可積分であることを意味し、上と合わせて、列 $\{E[X|\mathcal{G}_n]\}$ が $E[X|\mathcal{G}_\infty]$ に L^p ノルムで収束することが得られた。

M_n^q は $\mathcal{G}_n$ 可測な関数で構成された $L^q(\Omega)$ の閉部分空間である。よって、定理 3.1 より、列 $\{M_n^q\}$ は $L^q(\Omega)$ の閉部分空間に Mosco 収束する。

Acknowledgment

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

- [1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.
- [2] Ya. I. Alber, *Generalized Projections, Decompositions, and the Pythagorean-Type Theorem in Banach Spaces*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), 115–121.
- [3] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.
- [4] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.
- [5] I. Cioranescu *Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.
- [6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. M. Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [7] T. Honda, *Convergence theorems of conditional expectations by using contractive projections on Banach spaces*, to appear.

- [8] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), 303–313.
- [9] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 2169–2193.
- [10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.
- [11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.
- [12] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1998.
- [13] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. Math. **3** (1969), 510–585.
- [14] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
- [15] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, 2000.
- [16] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.
- [17] D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.