

シンプレクティック群のアフィン・グラスマン多様体の トーラス同変シューベルト類

池田岳（早稲田大学 基幹理工学部）

概要

シンプレクティック群のアフィン・グラスマン多様体のトーラス同変ホモロジー群におけるシューベルト類と対応する特殊関数を導入した．同変パラメーターを含む対称関数環にアフィン・ニルヘッケ代数の作用を定めることがこの構成の基礎である．Mark Shimozono と岩尾慎介との共同研究に基づく．

1 アフィン・シューベルト・カルキュラスとは

D. Peterson の理論が 1995 年に現れてから，アフィン・シューベルト・カルキュラスに興味を持たれている．この節ではその概要を述べる．

1.1 アフィン・グラスマン多様体

G を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された単純で単連結な線型代数群とする． $\mathbb{O} = \mathbb{C}[[t]]$ を 1 変数の形式的冪級数環とし， $\mathbb{F} = \text{Frac}(\mathbb{O})$ をその商体，すなわち形式的ローラン級数の環 $\mathbb{C}((t))$ とする． A を可換 $\mathbb{C}$ 代数とすると A 値点集合¹ $G(A)$ は群をなす．商集合 $G(\mathbb{F})/G(\mathbb{O})$ を G のアフィン・グラスマン多様体と呼ぶ．

T を G の極大トーラスとする． T の指標群²（加法群とみなす）を $\hat{T}$ とする． T 同変コホモロジー環 $H_T^*(\text{pt})$ は対称代数 $\text{Sym}(\hat{T})$ と同一視できる．以下，代数はすべて $\mathbb{C}$ に係数拡大したものを考える． T のリー代数を $\mathfrak{h}$ とするとき $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ （座標環）である．

1.2 アフィン・シューベルト・カルキュラス

以上の設定のもとで T 同変ホモロジー群 $H_T^*(\text{Gr}_G)$ を考える．これは自然に可換 S 代数の構造を持つ．また Gr_G のシューベルト部分多様体に対応する類の全体が自然な S 基底をなす．これをシューベルト基底と呼ぶ． (G, T) のワイル群を W とし， W_{af} をアフィン・ワイル群とする．シューベルト基底の自然な添字集合は，商集合 W_{af}/W の最短代表系 W_{af}^0 である．シューベルト基底を $\{\xi_w\}_{w \in W_{\text{af}}^0}$ と書くとき

$$\xi_w \xi_v = \sum_{u \in W_{\text{af}}^0} c_{wv}^u \xi_u$$

¹例えば $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ ならば $\text{SL}_n(A)$ は成分が A の n 次正方形列で行列式が 1 であるもののなす群．

² T から $\mathbb{C}^\times$ への群準同型を T の指標と呼ぶ． T の指標の集合は関数としての掛け算でアーベル群の構造を持つ．

によって「構造定数」 $c_{wv}^u \in S$ を定められる。この構造定数を求めようという問題は「シューベルト・カルキュラス」の類似であると考えられる。 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ の積はコホモロジー環もしくは Chow 環における交叉積とは異なるので「」(括弧)をつけた。

B を T を含む G のボレル部分群³とすると T 同変量子コホモロジー環 $QH_*^T(G/B)$ と $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ とは、適当な局所化を行うと同型であることが知られている。両者のシューベルト類同士の明示的な関係もある。これを Peterson 同型と呼ぶ。 $QH_*^T(G/B)$ の構造定数は交点数の一般化と考えられる Gromov-Witten 不変量を用いて定義されているので、 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ の構造定数を求める問題は、本来のシューベルト・カルキュラスと極めて非自明な形で関係しているのである。

1.3 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ の実現 — Peterson 代数

$H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ のシューベルト基底に関する構造定数を求めるという問題を考えるにあたって、環 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ の取り扱いやすい記述が望まれる。一般の G について適用可能な $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ の実現として、アフィン・ニルヘッケ環 $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ によるものが知られているので、ここで紹介しておく。この内容の原典は Peterson による講義 [18] であるが、[13] などでも学ぶことができる。

$\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ は「差分商作用素」で生成される非可換な S 代数である。 $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ には $w \in W_{\mathrm{af}}$ で添字づけられる S 基底 A_w が存在する。その構成を説明しよう。 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ に関する単純ルートの集合を $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ とする。最高ルートを θ とし $\alpha_0 = -\theta$ とおく。 S へのアフィン・ワイル群 $W_{\mathrm{af}} = \langle s_i \mid i \in \{0\} \cup I \rangle$ の作用を s_0 を s_θ として作用させることで定める (レベル 0 作用)。 S^{rat} を S の商体とし $S^{\mathrm{rat}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W_{\mathrm{af}}]$ における積を

$$(f \otimes w) \cdot (g \otimes v) = fw(g) \otimes wv \quad (f, g \in S^{\mathrm{rat}}, w, v \in W_{\mathrm{af}})$$

により定める。 $i \in \{0\} \cup I$ に対して

$$A_i = \frac{1}{\alpha_i}(1 - s_i) \quad (1.1)$$

とおく。 $w \in W_{\mathrm{af}}$ に対して $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を簡約表示とすると $A_w = A_{i_1} \cdots A_{i_r}$ は簡約表示の選び方によらない。 $\{A_w \mid w \in W_{\mathrm{af}}\}$ は S 上線型独立である。ここで $\mathbb{A}_{\mathrm{af}} = \bigoplus_{w \in W_{\mathrm{af}}} SA_w$ とおく。 $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ において S の元は一般には中心的ではなく

$$Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S) := \{a \in \mathbb{A}_{\mathrm{af}} \mid as = as \text{ for all } s \in S\}$$

は $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の中の非自明な部分 S 代数をなす。これを **Peterson 代数** と呼ぶ。実はこれは可換であって $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ と同型であることが知られている。さらに、 $w \in W_{\mathrm{af}}^0$ に対して、同型 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G) \cong Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$ によって ξ_w に対応する元を j_w とするとき

$$j_w = A_w + \sum_{v \in W_{\mathrm{af}} \setminus W_{\mathrm{af}}^0} j_w^v A_v \quad (j_w^v \in S)$$

という姿をした $Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$ の元として一意的に定まる。また $Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$ には $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ が作用して

$$A_i \cdot j_w = \begin{cases} j_{s_i w} & (\ell(s_i w) = \ell(w) + 1) \\ 0 & (\ell(s_i w) = \ell(w) - 1) \end{cases}$$

が成り立つ。以上の記述はとても見事だが、定義通りに j_w を計算しようとしてもかなり困難である。実際、係数 j_w^v を決定することは構造定数を決定するのとはほぼ同じくらい難しい。しかも、 j_w が $\{A_v\}$ の線型結合として書き表せたとしても A_v たち同士は非可換なので、構造定数を計算するのはなおさら容易でない。

そこで、 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ を、より取り扱いの容易な環で置き換えて、その中でシューベルト基底を自由に計算できることが望ましい。つまり $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の場合に

³線型代数群 G の連結で可解な閉部分群のうち極大なものをボレル部分群 (Borel subgroup) と呼ぶ。

- $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ がある S 代数 $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ と同型であること
- 実現 $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ の中でシューベルト類を計算する方法

を示すことが本講演の目的である。 $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ はシューアの P 関数と関連して定まる S 代数であって、中川・成瀬 [17] により導入された**双対 Ivanov 関数**が生成する環の部分環として実現される。 $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ には $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の作用があり、シューベルト類に対応する元は帰納的に計算できる。

2 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の場合

講演の主な対象であるシンプレクティック群のアフィン・グラスマン多様体に関する結果を述べる。この場合のシューベルト類と同一視される関数はトーラス同変でない場合は Lam–Schilling–Shimozono [15] によって研究された。

2.1 基本設定 — ルート系, ワイル群

以下, $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とする。極大トーラス T のリー代数を $\mathfrak{h}$ とする。 $\mathfrak{h}^*$ の標準的な基底を $\{a_1, \dots, a_n\}$ とするときルート系 Φ の単純ルートは

$$\alpha_i = a_i - a_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad \alpha_n = 2a_n$$

と表せる。 S は多項式環 $\mathbb{C}[a_1, \dots, a_n]$ である。 α_i に関する鏡映 s_i が $\mathfrak{h}^*$ および S に自然に作用する。ワイル群 $W = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ は符号付き置換全体がなす群 $S_n \ltimes \{\pm 1\}^n$ と同型である。

アフィン・ワイル群 W_{af} は $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$ と表示される。特に $s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$, $s_0 s_i = s_i s_0$ ($2 \leq i \leq n$) などが成り立つ。 W_{af} は $W \ltimes Q^\vee$ と同型である。ここで $Q^\vee$ は coroot lattice である。今の場合, $Q^\vee \cong \mathbb{Z}^n$ であって、標準的な $\mathbb{Z}$ 基底 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ は $\{a_1, \dots, a_n\}$ の双対基底と同一視される。 $\gamma \in Q^\vee$ に対応する W_{af} の元は**平行移動元**と呼ばれ $t_\gamma \in W_{\mathrm{af}}$ と書かれる。 Φ の最高ルートは $\theta = 2a_1$ であって、これに対応するコルート $\theta^\vee$ は ε_1 である。 $W_{\mathrm{af}} \cong W \ltimes Q^\vee$ という実現において

$$s_0 = t_{\theta^\vee} s_\theta$$

という関係が基本的である。 θ で定まる鏡映 s_θ は $a_1 \mapsto -a_1$, $a_i \mapsto a_i$ ($2 \leq i \leq n$) と S に (あるいは $\mathfrak{h}^*$ に) 作用する。

以下では W_{af} の平行移動元が S に自明に作用するものとして S への W_{af} 作用を考える。これは**レベル 0 作用**と呼ばれる。いわゆるヌル・ルート δ を 0 とすることによってアフィン・ルートを $\mathfrak{h}^*$ に射影して同じ記号で表す。特に

$$\alpha_0 = -\theta = -2a_1$$

である。

2.2 アフィン・グラスマン元の記述

放物商 W_{af}/W の最短代表系を考える。すなわち $\ell: W_{\mathrm{af}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を**長さ関数**とするとき

$$W_{\mathrm{af}}^0 := \{w \in W_{\mathrm{af}} \mid \ell(ws_i) > \ell(w) \text{ for } i \in \{1, \dots, n\}\} \quad (2.1)$$

と定める。 W_{af}^0 の元を**アフィン・グラスマン元**と呼ぶ。例えば id は長さ 0 の唯一のアフィン・グラスマン元, s_0 は長さ 1 の唯一のアフィン・グラスマン元, $s_1 s_0$ は長さ 2 の唯一のアフィ

ン・グラスマン元であることなどは容易にわかる． $n \geq 2$ のとき長さ 3 のアフィン・グラスマン元は $s_2 s_1 s_0, s_0 s_1 s_0$ の 2 つである．母関数 $\sum_{w \in W_{\text{af}}} q^{\ell(w)}$ は表示

$$\frac{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)}{(1-q^{n+1})\cdots(1-q^{2n})} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})} \quad (2.2)$$

を持つ．左側の表示から，

$$x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} x_{n+1}^{m_{n+1}} \cdots x_{2n}^{m_{2n}} \quad (m_1, \dots, m_n \in \{0, 1\}, m_{n+1}, \dots, m_{2n} \geq 0)$$

という単項式であって $\sum_{i=1}^{2n} im_i = d$ をみたすもの全体は長さ d の W_{af}^0 の元と個数が等しいことがわかる．

後ほど重要な役割を果たすアフィン・グラスマン元を定義しておく．**ピエリ元**と呼ばれる

$$\rho_i = \begin{cases} s_{i-1} \cdots s_1 s_0 & (1 \leq i \leq n), \\ (s_{2n+1-i} \cdots s_{n-1} s_n)(s_{n-1} \cdots s_1 s_0) & (n+1 \leq i \leq 2n). \end{cases} \quad (2.3)$$

である．対応するシューベルト類 ξ_{ρ_i} ($1 \leq i \leq 2n$) は S 代数として $H_*^T(\text{Gr}_G)$ の生成元になっていることがわかる．

2.3 シューアの P 関数

$y = (y_1, y_2, \dots)$ を無限個の変数の列とする． u を不定元として

$$\Omega(u|y) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + y_i u}{1 - y_i u}$$

とおく．これは**シューアの P 関数 (Q 関数)** の母関数として知られている．実際

$$\Omega(u|y) = 1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} P_k(y) u^k$$

により $P_k(y)$ を定める．これらが生成する環

$$\Gamma := \mathbb{C}[P_1(y), P_2(y), P_3(y), \dots]$$

は strict partitions の集合 $\mathcal{SP}$ で添字付けられる特別な基底 $\{P_\lambda(y) \mid \lambda \in \mathcal{SP}\}$ を持つ． $\mathcal{SP}$ の元は非負整数の列 $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ であって， $\lambda_j = 0$ ($j \gg 1$) を満たし， $\lambda_k > 0$ ($k \geq 2$) ならば $\lambda_{k-1} > \lambda_k$ が成り立つものである． $\lambda_j > 0$ である最大の j を λ の**長さ**といい $\ell(\lambda)$ で表す．長さが 1 の元，つまり $\lambda = (i, 0, \dots)$, $i \geq 1$ の場合は $P_\lambda(y) = P_i(y)$ である． $P_\lambda(y)$ の定義や基本的な性質については [16, Chap. III, §8] を参照されたい．なお $Q_\lambda(y) = 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda(y)$ とおき**シューア Q 関数**と呼ぶ．

2.4 Factorial Q -functions

双対 Ivanov 関数 ([17]) というものを説明するために，そのもとになる factorial Q -functions (Ivanov 関数) と，そのシューベルト・カルキュラスにおける意味について説明する．

$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の等質空間 (有限次元) であって，シューア Q 関数と密接な関係にあるのがラグランジアン・グラスマン多様体 $\text{LG}(n)$ である． $\mathbb{C}^{2n}$ に非退化で交代的な双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

与える. $\mathbb{C}^{2n}$ の n 次元線型空間 V が $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V \implies \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ をみたすとき V はラグランジアン部分空間であるという. $\mathbb{C}^{2n}$ のラグランジアン部分空間全体の集合は $n(n+1)/2$ 次元の射影多様体 $\mathrm{LG}(n)$ をなす. $\mathrm{LG}(n)$ には $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ が推移的に作用する. T 同変コホモロジー環 $H_T^*(\mathrm{LG}(n))$ のシューベルト類は [5] によって調べられた.

$W = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ を引き続き $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ のワイル群とすると, $\mathrm{LG}(n)$ のシューベルト類は商集合 W/S_n の最短代表系で添字付けられる. ここで $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ とみている. 最短代表系は $\mathrm{SP}(n) := \{\lambda \in \mathrm{SP} \mid \lambda_1 \leq n\}$ と自然に全単射になる. $H_T^*(\mathrm{LG}(n))$ の記述, およびシューベルト類 $\sigma_w \in H_T^*(\mathrm{LG}(n))$ の記述が知りたいとする. $S = \mathbb{C}[a_1, \dots, a_n]$ を思い出す. $\lambda \in \mathrm{SP}$, $\ell(\lambda) \leq n$ をみたすものに対して環 $S \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma$ の元 $Q_\lambda(x|a)$ が定義される (Okounkov, Ivanov による). S 代数の全射

$$\pi_n : S \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma \rightarrow H_T^*(\mathrm{LG}(n))$$

であって

$$\pi_n(Q_\lambda(x|a)) = \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda \in \mathrm{SP}(n)) \\ 0 & (\lambda \notin \mathrm{SP}(n)) \end{cases}$$

をみたすものが存在する ([5]).

$Q_\lambda(x|a)$ は任意の $\lambda \in \mathrm{SP}$ に対して定義される $\mathbb{C}[a] \otimes \Gamma$ の元であって $\{Q_\lambda(x|a) \mid \lambda \in \mathrm{SP}\}$ は $\mathbb{C}[a] \otimes \Gamma$ の $\mathbb{C}[a]$ 上の基底をなす. $x = (x_1, x_2, \dots)$ を有限変数 $(x_1, \dots, x_n)$ に特殊化するとき, 表式

$$Q_\lambda(x_1, \dots, x_n|a) := \frac{1}{(n - \ell(\lambda))!} \sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} ((x_i|a))^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=i+1}^n \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.4)$$

が知られている. ここで $((x|a))^k := 2x(x - a_1) \cdots (x - a_{k-1})$ for $k \geq 1$ である.

2.5 双対 Ivanov 関数

双対 Ivanov 関数は SP で添字つけられる冪級数の族 $\{\hat{P}_\lambda(y|a)\}$ であって

$$\prod_{i,j} \frac{1 - x_i y_j}{1 + x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathrm{SP}} Q_\lambda(x|a) \hat{P}_\lambda(y|a) \quad (2.5)$$

という等式で特徴づけられる. $\hat{P}_\lambda(y|a)$ は $\mathbb{C}[a]$ の元を係数とする $P_\mu(y)$ の無限和 ($\lambda = 0$ でない限り) である (明示的な展開公式も知られている). 特に

$$\hat{P}_i(y|a) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(a_1, \dots, a_i) P_{i+k}(y)$$

である. ここに h_k は完全対称多項式であり k 次の単項式を (係数 1 で) 全て足し合わせたものである.

2.6 対称関数による実現

$k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 2n$ に対して

$$a_{2nk+i} \mapsto \begin{cases} a_i & 1 \leq i \leq n \\ -a_{2n+2-i} & n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

により定まる特殊化によって環準同型 $\mathbb{C}[a] \rightarrow S$ を定める. $a = (a_1, a_2, \dots)$ の像を $a^{(n)}$ と書く. ここで

$$\hat{\Gamma}_{(n)}^S := S[\hat{P}_i(y|a^{(n)}) \ (1 \leq i \leq 2n)] \quad (2.6)$$

とおく. 以上で準備ができたので最初の主な構成について述べる.

定理 2.1 ([7]). S 代数の同型 $\kappa : H_*^T(\mathrm{GrSp}_{2n}) \rightarrow \hat{\Gamma}_{(n)}^S$ が存在する. $w \in W_{\mathrm{af}}$ に対して $\kappa(\xi_w) = \hat{P}_w^{(n)}(y|a)$ とおくと

$$\hat{P}_{\rho_i}^{(n)}(y|a) = \hat{P}_i(y|a^{(n)}) \quad (1 \leq i \leq 2n)$$

が成り立つ.

なぜこのような同型が存在するのか, あるいは見つけることができたのか, を理解する方法を, 以下では 2 通りの見方で説明を試みる.

2.7 シューベルト類の計算

$\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ の上に W_{af} の作用を定義しよう. $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ の元は y に関して対称な形式的冪級数であって, その係数が S の元であるから $f = f(y|a) = f(y|a_1, \dots, a_n)$ などと書こう.

定理 2.2. 以下の式

$$(s_i f)(y|a) = \begin{cases} \Omega(a_1|y)f(y|-a_1, a_2, \dots, a_n) & (i=0) \\ f(y|a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) & (1 \leq i \leq n-1) \\ f(y|a_1, \dots, a_{n-1}, -a_n) & (i=n) \end{cases} \quad (2.7)$$

によって W_{af} の $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ 上の作用が定まる. 各 $0 \leq i \leq n$ に対して $\delta_i : \hat{\Gamma}_{(n)}^S \rightarrow \hat{\Gamma}_{(n)}^S$ を

$$\delta_i f = \frac{f - s_i f}{\alpha_i} \quad \text{for } f \in \hat{\Gamma}_{(n)}^S \quad (2.8)$$

と定めることができる. このとき, $w \in W_{\mathrm{af}}, 0 \leq i \leq n$ に対して

$$\delta_i \hat{P}_w^{(n)} = \begin{cases} \hat{P}_{s_i w}^{(n)} & (\ell(s_i w) = \ell(w) + 1) \\ 0 & (\ell(s_i w) = \ell(w) - 1) \end{cases}$$

が成り立つ (なお $(\ell(s_i w) = \ell(w) + 1$ ならば $s_i w \in W_{\mathrm{af}}^0$ である).

Proof. W_{af} の関係式が成立することのみ示す. まず $s_0^2 = 1$ は以下のように示せる:

$$\begin{aligned} (s_0^2 f)(y|a) &= s_0(\Omega(a_1|y)f(y|-a_1, a_2, \dots, a_n)) \\ &= \Omega(a_1|y)\Omega(-a_1|y)f(y|a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= f(y|a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

s_0 が s_i ($2 \leq i \leq n$) と可換であることは明らかで $s_i^2 = 1$ for $1 \leq i \leq n$ も容易である. また $s_{n-1}s_n s_{n-1}s_n = s_n s_{n-1}s_n s_{n-1}$ をチェックすることも簡単. $s_0 f = \Omega(a_1|y)s_\theta f$ に注意してお

と同一視される．ここで a_i は $\mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数) の元であることに注意しよう． $\mathfrak{h}$ の元 h を与えるごとに a_i は $a_i(h) \in \mathbb{C}$ という値をとり， L_0 は $\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ の元と見なせる． $B^\vee$ は $M_{2n+1}(\mathbb{C})$ の上三角の元 b で ${}^t b J b = J$ をみたすものからなる． J は $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ を定める $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上の非退化な対称双一次形式 $(\cdot, \cdot)$ を与える行列であり，ここでは

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と選んでいる ($n=2$ の場合)．このとき対称双一次形式を $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t \mathbf{u} J \mathbf{v}$ によって定める．

$B^\vee$ の座標関数を z_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq 2n+1$) とするとき $\mathrm{Ad}^*(b)(-E+h) = -E+h$ という条件は行列 $Z = (z_{ij})$ に対する $L_0 Z = Z L_0$ という等式に書き換えられるので，具体的には

$$(b_i - b_j)z_{ij} + z_{i,j-1} - z_{i+1,j} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq 2n+1. \quad (2.10)$$

と書かれる．ここで

$$(b_1, \dots, b_{2n+1}) = (a_1, \dots, a_n, 0, -a_n, \dots, -a_1) \quad (2.11)$$

とした． a_i を用いて書き換えると

$$a_i z_{i,n+1} + z_{i,n} - z_{i+1,n+1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.12)$$

$$(a_i + a_{2n-j+2})z_{ij} + z_{i,j-1} - z_{i+1,j} \quad 1 \leq i < n, n+1 \leq j \leq 2n+1-i, \quad (2.13)$$

$$2a_i z_{i,2n+2-i} + z_{i,2n+1-i} - z_{i+1,2n+2-i} \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.14)$$

となる． z_{ij} はこれらの関係式以外に ${}^t Z J Z = J, \det(Z) = 1$ をみたしている．

以上で $\mathcal{Z}_{G^\vee}$ の説明をしたわけだが $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ や $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ との関係は以下のようにして理解できる．Peterson は $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ の上に W_{af} および $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の作用を定義する．その際に必要なステップとして以下の結果がある．

定理 2.3 ([18])． $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ は S 加群として平坦である．

Peterson は $\mathcal{Z}_{G^\vee}$ と関連して定義されるいわゆる Peterson 多様体を用いて幾何学的に上記の平坦性を証明した．我々は方程式の具体系を用いて代数的な証明を与えた (詳細は [7] 参照)．

平坦性の一つの帰結は以下の通りである． G の正ルートのすべての積を Δ と表そう．具体的には

$$\Delta = 2^n \prod_{i=1}^n a_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(a_i + a_j)$$

である． $S^\Delta := S[\Delta^{-1}]$ とおく．また S 加群 M に対して $S^\Delta \otimes_S M$ を M^Δ と書く．平坦性から単射

$$\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}] \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]^\Delta$$

が導かれる． $\mathrm{Spec}(S^\Delta)$ は $\mathfrak{h}$ の “regular part” $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}$ である．Peterson は $\mathcal{Z}_{G^\vee} \rightarrow \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}$ 上に制限すると自明な $T^\vee$ 束であることを示している．ここで $T^\vee$ は $B^\vee$ に含まれる $G^\vee$ の極大トーラスである．したがって $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]^\Delta$ は S^Δ 上のローラン多項式環 $S^\Delta[z_{ii}^{\pm 1} (1 \leq i \leq n)]$ に過ぎない．ここで $B^\vee$ の座標の対角成分を $T^\vee$ の座標と同一視している．

$\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ を $S^\Delta[z_{ii}^{\pm 1} (1 \leq i \leq n)]$ に埋め込んで扱うことができるので計算が簡単で， W_{af} や $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の作用なども定義できるのである (詳細は [7])．特に W_{af} の平行移動元 t_γ ($\gamma \in \mathbb{Q}^\vee$) の作用はわかりやすいので説明しておく． $\{a_i\} \subset \mathfrak{h}^*$ の双対基底を $\{\varepsilon_i\}$ とするとき $Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ という同一視ができる．

命題 2.4 ([18]). W_{af} の $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ への自然な作用がある. 特に $t_{\varepsilon_i} \in W_{\text{af}}$ の $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ への作用は z_{ii} による掛け算により与えられる.

$Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)$ の局所化 $Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)^\Delta$ もまた簡単な記述を持つ. W_{af} は $s_i \mapsto 1 - \alpha_i A_i$ によって $\mathbb{A}_{\text{af}}$ に含まれている. 特に平行移動元 t_γ は $Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)$ に属す. さらに

$$Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)^\Delta = \bigoplus_{\gamma \in Q^\vee} S^\Delta t_\gamma$$

が成り立つことが知られている. このように見ると $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]^\Delta$ と $Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)^\Delta$ は S^Δ 代数として明らかに同型である. これは, それぞれの “ S -integral parts” の同型を導く.

定理 2.5 ([18]). S 代数の同型 $\phi : Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S) \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ が存在する.

さて, $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ については $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}]$ との直接的な対応が存在するので説明しよう. $t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}$ をパラメーターとし

$$\exp \left(2 \sum_{i=1}^n t_{2i-1} L_0^{2i-1} \right) \quad (2.15)$$

を考える. L_0 は $\mathfrak{h}$ でパラメトライズされた $\mathfrak{g}^\vee$ の元である. $B^\vee$ のリー代数 $\mathfrak{b}^\vee$ に属することもわかる. さらに $L_0^{2i-1} \in \mathfrak{b}^\vee$ であることが容易にわかる. そこで (2.15) で与えられる $B^\vee$ の元を b とすると $(b, h) \in \mathcal{Z}_{G^\vee}$ である. なぜなら行列 b は構成から L_0 と可換であるからである.

b の成分を詳しく調べてみよう. $y = (y_1, y_2, \dots)$ に関する $(2i-1)$ 次の冪和関数 $p_{2i-1}(y)$ と $(2i-1)t_{2i-1}$ とを対応させるのは戸田方程式の文脈では自然である. t_{2i-1} は $(i \geq 2$ ならば高次の) 時間変数の役割を果たす. 行列 (2.15) の成分はパラメーター $a_1, \dots, a_n$ と $t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}$ の関数だが, $t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}$ の多項式は $t_{2i-1} \mapsto (2i-1)^{-1} p_{2i-1}(y)$ によって y の関数と見なせる. 実際 y の形式的冪級数として (2.15) の (i, j) 成分は

$$(-1)^{j-i} \sum_{k=0}^{\infty} h_k(b_i, \dots, b_j) Q_{j-i+k}(y)$$

と書ける. ここで b_i は (2.11) で定めたものである. $Q_i(y)$ は Q 関数であり $2P_i(y)$ のことである. 特に $1 \leq i \leq n$ に対して (i, i) 成分は $h_k(a_i) = a_i^k$ に注意すれば

$$1 + 2a_i Q_1(y) + 2a_i^2 Q_2(y) + \dots = \Omega(a_i | y)$$

である! これらの級数が $\hat{\Gamma}_{(n)}^S$ に属することが確かめられる. つまり写像

$$\kappa : \mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}] \longrightarrow \hat{\Gamma}_{(n)}^S \quad (2.16)$$

が構成できたことになる. κ は S 代数としての射である.

以上のような状況から次の結果を期待するのは自然であろう.

定理 2.6 ([7]). 以下の可換図式が存在する. 写像 ϕ, β, κ はすべて S 代数として, および左 $\mathbb{A}_{\text{af}}$ -加群としての同型である:

$$\begin{array}{ccc} H_*^T(\text{Gr}_G) \cong Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S) & & \\ \downarrow \kappa & \searrow \phi & \\ \hat{\Gamma}_{(n)}^S & \xleftarrow{\beta} & \mathbb{C}[\mathcal{Z}_{G^\vee}] \end{array}$$

また, 次が成り立つ

$$\phi(z_{\pm \varepsilon_i}) = z_{ii}^{\pm 1}, \quad \kappa(t_{\pm \varepsilon_i}) = \Omega(\pm a_i | y) = \beta(z_{ii}^{\pm 1}).$$

2.9 今後の問題

関連して、今後に研究したいことはたくさんある。まず、そもそも A 型のアフィン・グラスマン多様体についても、本稿で述べたような扱いをした文献はない。現在、同変 K -homology $K_*^T(\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_n})$ におけるシューベルト類と対応する特殊多項式 (double K -theoretic k -Schur functions) に関する論文 [8] を準備中である。この結果は、[6] で調べた可積分系と量子 K 理論の関係をトラス同変に拡張する際に基本的な道具になる。また、本稿で扱った $C_n^{(1)}$ 型アフィン・グラスマン多様体の同変 K -homology についても特殊関数の構成法がわかっている ([10])。また、同変コホモロジー $H_*^T(\mathrm{Gr}_{\mathrm{SL}_n})$ に関する結果は以前の講義録 [3] に書いたまま未発表であったが、現在論文 [9] を準備中である。コホモロジーとホモロジーは互いに双対なホップ代数の構造を持つことがわかっているので、特殊関数の観点から、そのペアリングを記述することも重要である。それと関連して、階数が無限の理論の基礎を確立しておくべきである。このようなことについて、基本的なアイデアはあるけれども、実行し切るにはまだ時間がかかりそうである。大きな目標としては、 K -Peterson 同型を背景として $QK_T(G/P)$ を「相対論的戸田方程式」を用いて記述するという問題がある。これは [11] の自然な拡張である。

3 背景 — シューベルト・カルキュラス — についてもう少し

論理的には必要ないかもしれないが、特に若い方々にこの分野 (シューベルト・カルキュラス) に興味を持っていただくために、もう少し背景 (細かい技術的に見えることも含め) を説明しておく。私の個人的な趣味や、思い込みも多分に含まれるので、適当に割り引いて参考にしていただければと思う。

「数え上げ幾何学」は 19 世紀において代数幾何学の一つのトピックスとして盛り上がった (?) 分野である。H. Schubert が書いた本が有名で、シューベルト・カルキュラスと呼ばれている。拙書 [4] をご覧いただけると雰囲気はわかると思う。元々は、グラスマン多様体をはじめとする射影多様体 X の Chow 環あるいはコホモロジー環の「シューベルト基底」の基づく代数的な計算によって、ある条件をみたす図形 (直線や 2 次曲線など) の個数を計算する「数え上げ」の問題を解くことを指した。現代では、量子コホモロジーや、さらに量子 K 理論が発見され「数え上げ」の意味合いがより深められるとともに、リー理論的な一般化にも興味を持たれるようになった。グラスマン多様体は一般線型群が推移的に作用するので、より一般に一般線型群の閉部分群 G が推移的に作用する射影多様体が興味の対象である。正確には、代数的な閉部分群、すなわち、 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の代数多様体としての閉部分集合になっている群を考えて、それらを線型代数群と呼ぶ。

線型代数群の研究は 1950 年代に A. Borel が本格的に開始した。任意の体 k に対して、 $\mathrm{GL}_n(k)$ の Zariski 閉部分群 G を線型代数群と呼ぶ (本来の定義は [21] 参照)。以下、 k を代数的閉体とする。線型代数群 G に対して、極大な連結可解閉部分群のことを Borel 部分群と呼ぶ (もっとも、ボレルが自身の論文でボレル部分群と呼んだわけではないが、 B と書いているので、そう呼びなさいということか...)。重要な結果として、任意の Borel 部分群は共役であることをボレルは示した ([21, Thm 6.2.7])。一つ Borel 部分群 B を選ぶ (存在は次元を考えれば簡単) とき、商空間 G/B は G のボレル部分群全体の集合 $\mathcal{B}$ と全単射になる。 $\mathcal{B} \cong G/B$ は自然に射影多様体の構造を持つ。 $\mathcal{B}^4$ は旗多様体と呼ばれる。旗多様体は G およびそのリー代数 $\mathfrak{g}$ の (幾何学的) 表現論において基本的な役割を果たす。例えば Borel-Weil 理論や Kazhdan-Lusztig 理論など⁵である。それらはとても重要だが、ここでは深く立ち入らず... 一般に B を含む (閉) 部分群 P を放物型部分群と呼ぶ。 G/P には射影多様体の構造

⁴佐武一郎先生が東北大学を退官される最後の年に線型代数群の基礎について講義をしてくださった。最終回に、黒板に大きく筆記体の $\mathcal{B}$ を書かれて「これが大切ですよ」とおっしゃったのがとても印象に残っている。

⁵ここで論じる余裕はないので調べてください。前者は [19]、後者は [2] など。

が入る。現代のシューベルト・カルキュラスの基本的な舞台は G/P である。いわゆる普通のグラスマン多様体⁶は G/P と表せる空間の典型である。

もっとも基本的な場合はコホモロジー環 $H^*(G/P, \mathbb{Z})$ を考える。これより先は、リー理論の基礎としてルート系、ワイル群の知識は必須である。リー代数の教科書、線型代数群の教科書などで慣れてほしい。ただし、本研究や、その発展において、必要なのはルート系やワイル群の具体例に慣れているということである。

シューベルト・カルキュラスにおいて特に重要なのはワイル群の放物商である。これはワイル群の部分集合であってシューベルト類の自然な添字集合であるからである。これについての説明を試みる。まず、ワイル群の理解の仕方は何通りかあって、自由に見方を変えることが大切である。一つめはリー代数的なもので $\mathfrak{g}$ (G のリー代数) のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ に作用する群としての理解である。二つめは G における T の正規化群を $N_G(T)$ とするとき $N_G(T)/T$ を (G, T) によって定まるワイル群という。三つめは Coxeter 群としての理解である。ルート系の単純ルートの集合 $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ を一つ選ぶ。 s_i を α_i で定まる $\mathfrak{h}^*$ の超平面に関する鏡映とする。ワイル群は s_i ($i \in I$) で生成される。その基本関係式がいわゆる Coxeter 群のスタイルで記述される。3つの見方がまとめて説明されている教科書はなかなか無いので学生諸君は苦勞⁷するようである。ついでに言うと、アフィン・ワイル群にもぜひとも慣れてほしいのだが、まとめて勉強できる適当な教科書が思いつかない。挙げるなら Kac の教科書が第一だが Kleshchev の講義録 [12] も良い。これらはアフィン・リー代数の文脈の文献だが、純粋に組合せ論 (あるいは群論) 的に書かれた教科書としては [1] がある。

放物商の典型的として $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ のワイル群である対称群 S_n を考えよう。 $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ を単純鏡映 (あるいは Coxeter 群としての) による表示とする。 s_i ($1 \leq i \leq n-1, i \neq d$) が生成する部分群を W_P と書こう。 P という添字をつけたのは G の放物型部分群 P に対応しているという意味合いである。 $W_P \cong S_d \times S_{n-d}$ がわかる。ここでいう放物商とは W/W_P のことである。今の例では $S_n/(S_d \times S_{n-d})$ の完全代表系として

$$w(1) < \dots < w(d), w(d+1) < \dots < w(n)$$

をみたと $w \in S_n$ の集合が選べる。このような置換は d -グラスマン置換と呼ばれる。このような置換に対してヤング図形を対応させることがとても便利である (詳しくは [4, §2.2] 参照)。一般に W を単純鏡映 s_i ($i \in I$) で生成されるものとみたとき $\{s_i \mid i \in I\}$ の部分集合 J で生成される W の部分群を (ワイル群の意味の) 放物型部分群と呼ぶ。それを W_J と書いて、放物商 W/W_J を考える。“最短代表系” W^J が

$$W^J = \{w \in W \mid \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \text{ for all } i \in J\}$$

と定義される。 $\ell: W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は“長さ”関数である。 J に対応する G の“standard”な放物型部分群 P が存在して、その文脈では W^J は W^P と書かれる。

W^J は W の持つブリュア順序から自然に半順序集合の構造を持ち、それ自体、組合せ論的に興味深い対象である。後述のようにアフィン・ワイル群に拡張するとなおさら面白い対象である。

ワイル群のことで話が長くなってしまった。シューベルト・カルキュラスでは W^P で添字つけられた $H^*(G/P, \mathbb{Z})$ の基底 $\{\sigma_w \mid w \in W^P\}$ に興味を持つ。積の展開

$$\sigma_w \sigma_v = \sum_{u \in W^P} c_{wv}^u \sigma_u \quad (3.1)$$

によって $c_{wv}^u \in \mathbb{Z}$ を定めるとき、この値 c_{wv}^u がさまざまな数え上げの問題の答えを導くのに用いられる。この構造定数 c_{wv}^u が一般的に非常によくわかっている場合は限られており、グラ

⁶グラスマン多様体は射影空間の自然な一般化であり、例えばチャーン類の理解にも欠かせない。それなのに代数幾何学の教科書であまり扱われていないのはどうしてだろうねと、最近、同僚と話していた。

⁷私自身は、表現論の話を聞く機会が多く、いろんな場面で目にしていたので、そういうものかと思って自然に身に付いた。教科書でまとめて勉強したわけではなく。

スマン多様体の場合と、極大等方グラスマン多様体（直交型、およびシンプレクティック型）の場合だけである。これらの場合は特に、シューベルト類とシューア関数（シューア Q あるいはシューア P 関数）とが綺麗に対応していることから、表現論におけるテンソル積表現の既約分解の問題と等価になる。このように、シューベルト構造定数の決定問題は表現論の問題と密接に関係している。その関係を深いレベルで理解するには、通常のコホモロジー環だけではなく、量子 K 理論にまで“シューベルト・カルキュラス”を拡張する必要があった。これは比較的最近の知見である。

私個人としては、シューア Q 関数、およびその拡張版を見出し、それらが幾何学において果たす役割に特に興味を持ってきた。今回の研究もその線上にある。一般化された“コホモロジー環”を良い性質を持つ環によって置き換えるとき、シューベルト類は表現の既約表現の指標に似た特徴を持つ特殊関数として現れてくる。その有り様を可能な限りつぶさに観察したいのである。

参考文献

- [1] A. Bjorner, F. Brenti, “Combinatorics of Coxeter groups” Springer GTM 231.
- [2] 堀田良之, 谷崎俊之「 D 加群と代数群」シュプリンガー現代数学シリーズ
- [3] 池田岳, Symplectic affine Grassmannian の同変 Schubert 類, 数理解析研究所講究録 No. 1870, 2013 年
- [4] 池田岳, 数え上げ幾何学講義 — シューベルト・カルキュラス入門 —, 東京大学出版会
- [5] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, Adv. Math. 215, 1–23 (2007)
- [6] T. Ikeda, S. Iwao, and T. Maeno, K -theoretic Peterson isomorphism and relativistic Toda lattice, Int. Math. Res. Notices **2020**, Issue 19, 2020, 6421–6462.
- [7] T. Ikeda, S. Iwao, M. Shimozono, Equivariant homology of the affine Grassmannian of the symplectic group, in preparation
- [8] T. Ikeda, S. Iwao, M. Shimozono, and K. Yamaguchi, Equivariant K -homology of the symplectic affine Grassmannian, in preparation
- [9] T. Ikeda, Y. Nakayama, and M. Shimozono, Equivariant Schubert Calculus of Affine Grassmannians of Symplectic Groups, in preparation
- [10] T. Ikeda, M. Shimozono, and K. Yamaguchi, K -theoretic double k -Schur functions, in preparation
- [11] B. Kim. Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices. Ann. of Math. (2) **149** (1999), no. 1, 129–148.
- [12] A. Kleshchev, <https://darkwing.uoregon.edu/~klesh/teaching/IDLALN3.pdf>
- [13] T. Lam and M. Shimozono. Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, Acta Math. **204** (2010) 49–90.
- [14] T. Lam and M. Shimozono. From double quantum Schubert polynomials to k -double Schur functions via the Toda lattice. arXiv:1109.2193.
- [15] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono. Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group. Math. Z. **264** (2010), no. 4, 765–811.
- [16] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, second edition.

- [17] M. Nakagawa and H. Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions. (English summary) Schubert calculus—Osaka 2012, 337–417, Adv. Stud. Pure Math., **71**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016.
- [18] D. Peterson. MIT lecture notes, 1997.
- [19] 小林俊行, 大島利雄 「リー群と表現論」 岩波書店
- [20] K. Rietsch, A mirror symmetric construction of $qH_T^*(G/P)_{(q)}$, Adv. Math. **217** (2008) 2401–2442.
- [21] T. A. Springer, “Linear algebraic groups” Second Edition, Modern Birkhäuser Classics