ゴナリティー型不変量と 3 次元代数ファイバー空間のスロープ不等式

赤池広都

Abstract. 代数ファイバー空間には、スロープと呼ばれる数値不変量が定まる。ファイバーの幾何学的性質とスロープの関係を明らかにすることは、代数ファイバー空間の地誌学における主要な問題の一つである。代数ファイバー空間の地誌学的観点から、3 次元代数ファイバー空間に対して成立する新たなスロープ不等式を紹介する。

1. 代数ファイバー空間の地誌学

代数ファイバー空間 $f : X \to B$ とは、正規射影多様体 X から非特異射影曲線 B への全射正則写像であって、連結なファイバーを持つものである。一般ファイバーを F であらわす。**相対極小な代数ファイバー空間** $f : X \to B$ とは、X が $\mathbb{Q}$ 分解的かつ端末特異点のみを持ち、標準因子 K_X が f-ネフとなるものである。本稿で代数ファイバー空間といえば、一般ファイバー F は一般型多様体と仮定する。代数ファイバー空間 $f : X \to B$ に対し、**相対標準因子** $K_f := K_X - f^*K_B$ 及び**相対オイラー数** $\chi_f := (-1)^{\dim(X)}(\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_F)\chi(\mathcal{O}_B))$ が定義される。

代数ファイバー空間の地誌学は、ファイバーの幾何学的性質と数値不変量の間の関係を明らかにすることを目標の一つとする。具体的には、次の問題が提起される。

問題 1.1. ファイバーの幾何学的性質 $(\mathcal{P})$ を固定する。この時、性質 $(\mathcal{P})$ のみから定まるような以下を満たす正の有理数 $\lambda_{(\mathcal{P})}$ を与えることはできるか*:*

一般ファイバーが幾何学的性質 $(\mathcal{P})$ を満たす任意の相対極小な代数ファイバー空間 $f : X \to B$ に対して、

$$K_X^{\dim(X)} \geq \lambda_{(\mathcal{P})} \cdot \deg f_*\mathcal{O}(K_f)$$

が成立する。この不等式を性質 $(\mathcal{P})$ に関する**スロープ不等式**と呼ぶ。

すると、スロープ不等式が等号成立する時に何が起こるのか、ということに興味が出てくる。より詳しく、スロープ不等式の差を与えるものはなんなのかを理解したくなる。これは地誌学におけるもう一つの基本的な問題に他ならない。具体的に次の問題が提起される。

問題 1.2. ファイバーの幾何学的性質 $(\mathcal{P})$ を固定する。この時、以下を満たす関数 $\mathrm{Ind}_{(\mathcal{P})} : B \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ を与えることはできるか：

- 点 $p \in B$ に対して、$\mathrm{Ind}_{(\mathcal{P})}(p)$ はファイバー芽 F_p のみの情報から定まる。
- 一般の点 $p \in B$ に対して、$\mathrm{Ind}_{(\mathcal{P})}(p) = 0$ となる。
- $K_X^{\dim(X)} = \lambda_{(\mathcal{P})} \cdot \deg f_*\mathcal{O}(K_f) + \sum_{p \in B} \mathrm{Ind}_{(\mathcal{P})}(p)$ が成立する。

このような関数を、性質 $(\mathcal{P})$ の**堀川指数**と呼ぶ。

堀川指数の一つ目の条件について補足しておく。値 $\mathrm{Ind}_{(\mathcal{P})}(p)$ は、ファイバー芽 F_p が埋め込まれている代数ファイバー空間には依らない。従って、ファイバー芽 F_p が異なる二つの代数ファイバー空間内に存在していたとしても、堀川指数の値は変わらない。

問題 1.1, 1.2 に対して、X が 2 次元の場合は数多くの結果が知られている。Table 1 は、さまざまなファイバーの幾何学的性質 $(\mathcal{P})$ に対して、スロープ不等式および堀川指数の存在に関してまとめたものである。

ファイバーの幾何学的性質 $(\mathcal{P})$	$\lambda_{(\mathcal{P})}$	Horikawa 指数	
種数 2	2	存在	[14]
種数 g の超楕円曲線	$4(g-1)/g$	存在	[22]
種数 3 の非超楕円曲線	3	存在	[20]
種数 4 の非超楕円曲線, ランク 3	$24/7$	存在	[11]
種数 4 の非超楕円曲線, ランク 4	$7/2$	存在	[4]
平面 d 次曲線	$6(d-3)/(d-2)$	存在	[10]

Table 1. ファイバー曲面のスロープ不等式

種数 4 の非超楕円曲線のランクについて補足しておく。種数 4 の非超楕円曲線は、その標準写像により $\mathbb{P}^3$ の次数 $(2,3)$ 完全交叉となる。種数 4 の曲線のランクが 3 (または 4) であるとは、対応する 2 次曲面のランクが 3 (または 4) となることをいう。

上の Table 1 を見てわかる通り、X が 2 次元の場合は数多くの結果が知られている。X が 3 次元以上の代数ファイバー空間についてはどうか。実は、3 次元以上代数ファイバー空間の地誌学はまだまだ発展途上なのである。問題 1.1 のスロープ不等式は、数少ないがいくつか知られている。しかし、問題 1.2 の堀川指数の存在に関しては全く知られていない。ここでは、現在知られている 3 次元代数ファイバー空間のスロープ不等式を紹介する。一つ目は、Hu-Zhang [15] によるスロープ不等式である。

定理 1.3 (Hu-Zhang [15]). 相対極小な 3 次元代数ファイバー空間 $f : X \to B$ を考える。この時、次が成立する。

(1) 最良なスロープ不等式 $K_X^3 \geq \frac{4}{3}\mathrm{deg}f_*\mathcal{O}_X(K_f)$ が成立する。更に、$\mathrm{deg}f_*\mathcal{O}_X(K_f) > 0$ かつ等号成立する時、ファイバー F は $(K_F^2, p_g(F)) = (1,2)$ なる曲面である。
(2) ファイバー F が $(K_F^2, p_g(F)) = (1,2)$ なる曲面でない時、最良なスロープ不等式 $K_X^3 \geq 2\mathrm{deg}f_*\mathcal{O}_X(K_f)$ が成立する。
(3) スロープ不等式 $K_X^3 \geq \frac{4K_F^2}{K_F^2+4}\mathrm{deg}f_*\mathcal{O}_X(K_f)$ が成立する。

Hu-Zhang [15] によるスロープ不等式は、ファイバーが一般型曲面であることしか仮定していない。次に紹介するのは、Barja [5] によるスロープ不等式である。

定理 1.4 (Barja [5]). 相対極小な 3 次元代数ファイバー空間 $f : X \to B$ を考える。一般ファイバー F の標準線形系はペンシルでなく、相対オイラー数 χ_f が正かつ被覆ゴナリ

ティー $\mathrm{cov.gon}(F) \geq 6$ と仮定する。この時、スロープ不等式

$$K_X^3 \geq 9\left(1-\frac{17}{3p_g(F)+10}\right)\cdot \mathrm{deg} f_*\mathcal{O}(K_f)$$

が成立する。

仮定にある被覆ゴナリティーという不変量は、2 節にて定義する。定理 1.4 では、一般ファイバー F の標準線形系はペンシルでなく被覆ゴナリティー $\mathrm{cov.gon}(F) \geq 6$ と仮定されている。これは、標準線形系の正値性に関する条件であり、曲線の場合における非超楕円性と解釈することができる。

3 次元代数ファイバー空間の場合は、上述した通り問題 1.1 のスロープ不等式でさえも確立されたものはごくわずかである。そこで筆者は、3 次元代数ファイバー空間の地誌学的研究を推進させるべく問題 1.1 に取り組み、3 次元代数ファイバー空間の新たなスロープ不等式を確立した。着目した幾何学的性質 $(\mathcal{P})$ は、被覆ゴナリティーと最小被覆次数により記述される。2 節では、被覆ゴナリティーと最小被覆次数を導入して主結果を説明する。

2. 主結果

筆者の主結果を説明するべく、被覆ゴナリティーと最小被覆次数を導入する。本稿では、これら二つの不変量をゴナリティー型の不変量と呼んでいる。射影曲線のゴナリティーの定義を振り返っておく。**ゴナリティー**とは、射影曲線 X に対し

$$\mathrm{gon}(X) := \min\{\deg(\varphi) \mid \text{有理被覆 } \varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1\}$$

で定義される古典的な数値不変量であった。それでは、被覆ゴナリティーと最小被覆次数を導入しよう。

定義 2.1 (ゴナリティー型の双有理不変量). 射影多様体 X を考える。ゴナリティー型の双有理不変量として、次の二つを定義する。

(1) **被覆ゴナリティー** (covering gonality)

$$\mathrm{cov.gon}(X) := \min\{c \geq 1 \mid \text{一般の点 } x \in X \text{ に対し}, \exists \text{既約曲線 } x \in C_x \ s.t. \ \mathrm{gon}(C_x) = c\}$$

(2) **最小被覆次数** (minimal covering degree)

$$\mathrm{mcd}(X) := \min\{\deg\varphi \geq 2 \mid \varphi : X \dashrightarrow Y : \text{生成点で有限な有理写像}\}$$

但し、最小被覆次数を定義する min は、X と同次元の射影多様体 Y 及び、X と Y の間の (非双) 有理写像も全てにわたって、次数の最小値をとる。

被覆ゴナリティーは、射影曲線のゴナリティーの高次元への一般化の一つである。代数多様体の有理性を測る量として Bastianelli 氏によって研究され始めた ([6])。さまざまな射影多様体に関して、被覆ゴナリティーの取りうる値が研究されている。例えば、Bastianelli 氏は非特異射影曲線の 2 次対称積に関して、曲線のゴナリティーと対称積の被覆ゴナリ

ティーの関係を明らかにした ([6])。また [7] は、射影空間の超曲面について次数と被覆ゴナリティーの間の関係を明らかにしている。

最小被覆次数は、筆者が [1] で新たに導入した双有理不変量である。最小被覆次数は見かけ上ゴナリティーに似た定義であるが、ゴナリティの一般化ではないことに注意する。例えば、X が曲線の時に限っても最小被覆次数とゴナリティーは異なる概念である。しかし、モジュライ空間 $M_g(g \geq 2)$ 上で十分一般の点に対応する射影曲線 X については、最小被覆次数とゴナリティーは一致する ([3, Theorem 8.23])。

これで主結果を述べる準備が整った。筆者は、一般ファイバーの被覆ゴナリティーと最小被覆次数が下からおさえられている 3 次元代数ファイバー空間について、以下のスロープ不等式 (定理 2.2) が成り立つことを示した ([1])。

定理 2.2 ([1], 2024)**.** 相対極小な 3 次元代数ファイバー空間 $f : X \to B$ を考える。一般ファイバー F は幾何種数 $p_g(F) \geq 1$ なる一般型曲面とし、c は 4 以上の整数とする。一般ファイバー F に関して cov.gon(F) 及び mcd(F) がともに c 以上であるなら、

$$K_f^3 \geq \left(1 - \frac{4}{c}\right) \frac{K_F^2}{K_F^2 + 24\left(1 - \frac{4}{c}\right)} \left(10 \cdot \deg f_* \mathcal{O}_X(K_f) - 2l(2)\right)$$

が成立する。但し、$l(2)$ は *Reid-Fletcher* の多重種数公式の補正項である ([12, Definition 2.6])。

主定理の仮定に関して補足する。一般ファイバー F に関して cov.gon(F) 及び mcd(F) がともに c 以上という仮定がある。この仮定を満たすような曲面の存在は、簡単にはわからない。なぜなら最小被覆次数が大きい曲面を具体的に構成することが難しいからである。存在は以下のようにして確かめられる。Bastianelli([6]) 及び Lee-Pirola([17]) から、次がわかる。種数 $g \geq 10$ の曲線のモジュライ空間 M_g の十分一般の点に対応する曲線 C について、その 2 次対称積を $C^{(2)}$ とすると、mcd$(C^{(2)})$ 及び cov.gon$(C^{(2)})$ は gon(C) 以上である。これにより、任意の正の整数 m に対して、被覆ゴナリティー及び最小被覆次数がともに m 以上となる曲面の存在が保証される。

3. 証明の準備

この節では、主結果の証明で用いる概念及び事実をまとめておく。まずは非特異射影曲線上の局所自由層の $\mathbb{Q}$ ツイストを紹介する。非特異射影曲線 B を考える。曲線 B 上の局所自由層 $\mathcal{E}$ 及び $\mathbb{Q}$ 因子 δ の対を $\mathcal{E}\langle\delta\rangle$ と書き、$\mathcal{E}$ の δ による $\mathbb{Q}$ **ツイスト**と呼ぶ。それでは、局所自由層の $\mathbb{Q}$ ツイストに付随する諸概念を振り返る。

- $\deg(\mathcal{E}\langle\delta\rangle) := \deg(\mathcal{E}) + \mathrm{rk}(\mathcal{E}) \cdot \deg(\delta)$
- 局所自由層 $\mathcal{E}$ に付随する B 上の射影空間束を $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to B$ とする。$\mathbb{Q}$ ツイスト $\mathcal{E}\langle\delta\rangle$ が**ネフ**であるとは、$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の $\mathbb{Q}$ 可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\delta$ がネフであることを言う。
- $\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{E}) := \max\{\deg(\delta) \mid \mathcal{E}\langle -\delta\rangle$ がネフ $\}$

次に、主結果である定理 2.2 の証明で用いる事実を証明なしでまとめておく。まずは、いわゆる Clifford-Plus 定理と呼ばれるものを紹介する。Clifford-Plus 定理は射影曲線の線形系に関する古典的な定理であるが、射影曲面の線形系に関しても拡張できる。従って、曲面の場合に拡張したものも、同様に Clifford-Plus 定理と呼んでしまうことにする。それでは、射影曲線の場合から紹介する。

命題 3.1 (射影曲線の Clifford Plus)**.** 射影曲線 C を考える。可逆層 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C)$ 及び $(r+1)$ 次元部分ベクトル空間 $V \subset H^0(C, \mathcal{L})$ について、付随する射 $\varphi_V : C \to \mathbb{P}(V)$ は閉埋め込みと仮定する。このとき、

$$\mathrm{rank}\left(V \otimes V \to H^0(C, \mathcal{L}^2)\right) \geq \min\{3r, p_a(C) + 2r + 1\},$$

が成立する。ただし、$V \otimes V \to H^0(C, \mathcal{L}^2)$ は掛け算写像である。

証明は例えば [2, §III.2] に書いてある。次に射影曲面の Clifford Plus を紹介する。

命題 3.2 (射影曲面の Clifford Plus)**.** 射影曲面 S を考える。可逆層 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$ 及び $(r+1)$ 次元部分ベクトル空間 $V \subset H^0(S, \mathcal{L})$ について、付随する射 $\varphi_V : S \to \mathbb{P}(V)$ は閉埋め込みと仮定する。このとき、

$$\mathrm{rank}\left(V \otimes V \to H^0(S, \mathcal{L}^2)\right) \geq \begin{cases} 4r - 2 & (p_g(S) \geq 1), \\ 3r & (p_g(S) = 0), \end{cases}$$

が成立する。但し $V \otimes V \to H^0(S, \mathcal{L}^2)$ は掛け算写像である。

証明の本質的な部分は今野氏 [16, Lemma 1.2] にて示されている。

最後に、被覆ゴナリティーに関する事実を紹介してこの節を終える。

命題 3.3. 幾何種数 $p_g(S) \geq 2$ の極小 (非特異) 一般型曲面 S を考える。$(r+1)$ 次元部分ベクトル空間 $V \subset H^0(K_S)$ について、付随する有理写像 $\varphi_V : S \dashrightarrow \mathbb{P}V$ はペンシルとし、Γ を像のザリスキ閉包とする。有理写像 φ_V の不確定点解消を $\mu : \widetilde{S} \to S$ とし、射 $\iota_V = \varphi_V \circ \mu : \widetilde{S} \to \Gamma$ のシュタイン分解を $\widetilde{\iota}_V : \widetilde{S} \to \widetilde{\Gamma}$ とする。

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S} \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\iota_V"] & \\ S \arrow[r, dashed, "\varphi_V"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

このとき、もし $\mathrm{cov.gon}(S) \geq c$ であれば $(\mu^* K_S \cdot \iota_V^* \mathcal{O}(1)) \geq 2r(c-2)$ が成立する。

4. 証明のアウトライン

本節では、主結果である定理 2.2 の証明をする。3 次元代数ファイバー空間 $f : X \to B$ は、相対極小かつ一般ファイバーの幾何種数 $p_g \geq 1$ と仮定する。定理 2.2 を示す上でカギとなるのは、命題 4.2, 4.4 である。本説では二つの命題 4.2, 4.4 のアウトラインを証明し、これらを用いて定理 2.2 を示す。被覆ゴナリティー及び最小被覆次数に関する仮定を必要とするのは、命題 4.4 である。

局所自由層 $f_*\mathcal{O}_X(K_f)$ の Harder-Narasimhan フィルトレーションを考える。

$$0=\mathcal{E}_0\subset\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2\subset\cdots\subset\mathcal{E}_n=f_*\mathcal{O}_X(K_f),$$
$$r_i=\mathrm{rank}\mathcal{E}_i,\quad \mu_i:=\frac{\deg(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})}{\mathrm{rank}(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})}$$

Harder-Narasimhan フィルトレーションに付随する射影空間束に関して、大野氏 ([19]) による次の事実を用いる。

事実 4.1 ([19], §1)**.** 以下を満たす非特異射影多様体 Y 及び双有理射影射 $\mu: Y\to X$ が存在する。各 $i=1,\cdots,n$ に対して、自然な写像 $f^*\mathcal{E}_i\to\mathcal{O}_X(K_f)$ が引き起こす有理写像を $\varphi_i: X\dashrightarrow\mathbb{P}_B(\mathcal{E}_i)$ とすると、任意の $i=1,\cdots,n$ に関して、$\mu: Y\to X$ は $\varphi_i: X\dashrightarrow\mathbb{P}_B(\mathcal{E}_i)$ の不確定点解消となる。

(4.1)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\ X \arrow[r, dashed, "\varphi_i"'] & \mathbb{P}_B(\mathcal{E}_i) \end{tikzcd}$$

但し、$\lambda_i:=\varphi_i\circ\mu$ である。

閉点 $p\in B$ 上の図式 (4.1) のファイバーを

$$\begin{tikzcd} \widetilde{F}_p \arrow[d, "\mu|_{\widetilde{F}_p}"'] \arrow[dr, "\iota_i"] & \\ F \arrow[r, dashed] & \mathbb{P}(V_i) \end{tikzcd}$$

であらわす。更に、

$$l_2:=\min\{i\mid \iota_i\text{は双有理写像}\},$$
$$l_1:=\min\{i\mid \iota_i\text{は次数 2 以上の生成点有限な写像}\}$$

とおく。もし ι_i が双有理写像となる i が存在しないときは、$l_2:=n+1$ とおき、もし ι_i が次数 2 以上の生成点有限な写像となる i が存在しないときは、$l_1:=l_2$ とおく。

命題 4.2. 3 次元代数ファイバー空間 $f: X\to B$ は相対極小かつ一般ファイバーの幾何種数 $p_g\geq 1$ と仮定する。このとき、

$$K_f^3+2l(2)\geq\sum_{i=1}^{l_1-1}(2r_i-4)(\mu_i-\mu_{i+1})+\sum_{i=l_1}^{l_2-1}(6r_i-12)(\mu_i-\mu_{i+1})+\sum_{i=l_2}^{n}(10r_i-24)(\mu_i-\mu_{i+1})$$

が成立する。

命題 4.2 の証明　局所自由層 $f_*\mathcal{O}_X(K_f)$ の Harder-Narasimhan フィルトレーションの各 $\mathcal{E}_i$ について、相対的な掛算写像の像を

$$\mathcal{F}_i:=\mathrm{Im}(\mathcal{E}_i\otimes\mathcal{E}_i\to f_*\mathcal{O}_X(2K_f))$$

とおく。すると B 上の局所自由層 $\mathcal{F}_i$ は次の数値的な性質を持つ。

補題 4.3. 上記の $\mathcal{F}_i \subset f_*\mathcal{O}_X(2K_f)$ $(i = 1, \cdots, n)$ は、次の性質を持つ。

- $l_2 \le i \le n$(*i.e.* ι_i は双有理写像) のとき、$\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i) \ge 2\mu_i$ かつ $\mathrm{rank}(\mathcal{F}_i) \ge 4r_i - 6$ が成立する。
- $l_1 \le i \le l_2 - 1$(*i.e.* ι_i 次数 2 以上の生成点有限な有理写像) のとき、$\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i) \ge 2\mu_i$ かつ $\mathrm{rank}(\mathcal{F}_i) \ge 3r_i - 3$ が成立する。
- $1 \le i \le l_1 - 1$ のとき, $\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i) \ge 2\mu_i$ かつ $\mathrm{rank}(\mathcal{F}_i) \ge 2r_i - 1$ が成立する。

証明. 各 i に対する不等式 $\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i) \ge 2\mu_i$ は、

$$\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i) \ge \mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{E}_i) = 2\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{E}_i) = 2\mu_i$$

から得られる。次に、各 i に対する $\mathrm{rank}(\mathcal{F}_i)$ の不等式を示す。一般の点 $p \in B$ をとる。局所自由層 $\mathcal{F}_i$ を点 $p \in B$ 上の図式

$$\begin{tikzcd} \widetilde{F}_p \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\iota_i"] & & \\ F \arrow[r, dashed] & \Gamma_i \arrow[r, hook, "\tau_i"'] & \mathbb{P}V_i \end{tikzcd}$$

に制限すると、$\mathrm{rank}\,(V_i \otimes V_i \to H^0(\Gamma_i, \mathcal{O}_{\Gamma_i}(2))) = \mathrm{rank}(\mathcal{F}_i)$ が成立する。ただし $\mathcal{O}_{\Gamma_i}(2) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_i)}(2)|_{\Gamma_i}$ とおいた。以下、各 i ごと 3 つの場合に分けて議論する。
(1) $l_2 \le i \le n$ (i.e. ι_i は双有理写像) のとき、閉埋め込み $\Gamma_i \hookrightarrow \mathbb{P}V_i$ に関して命題 3.2 を用いる。仮定より $p_g(S) \ge 1$ であるから、

$$\mathrm{rank}\left(V_i \otimes V_i \to H^0(\Gamma_i, \mathcal{O}_{\Gamma_i}(2))\right) \ge 4r_i - 6$$

を得る。
(2) $l_1 \le i \le l_2 - 1$(i.e. ι_i 次数 2 以上の生成点有限な有理写像) のときは、(1) と同様に命題 3.2 から

$$\mathrm{rank}\left(V_i \otimes V_i \to H^0(\Gamma_i, \mathcal{O}_{\Gamma_i}(2))\right) \ge 3r_i - 3$$

を得る。
(3) $1 \le i \le l_1 - 1$ のとき、像 Γ_i が 0 次元である場合の主張は明らかなので Γ_i は曲線と仮定してよい。閉埋め込み $\Gamma_i \hookrightarrow \mathbb{P}V_i$ に関して命題 3.1 を用いると

$$\mathrm{rank}\left(V_i \otimes V_i \to H^0(\Gamma_i, \mathcal{O}_{\Gamma_i}(2))\right) \ge 2r_i - 1$$

を得る。 □

補題 4.3 を用いて、命題 4.2 を導出する。局所自由層 $f_*\mathcal{O}_X(2K_f)$ の Harder-Narasimhan フィルトレーションを考える。

$$0 = \mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}'_1 \subset \mathcal{E}'_2 \subset \cdots \subset \mathcal{E}'_m = f_*\mathcal{O}_X(2K_f)$$
$$r'_i = \mathrm{rank}\ \mathcal{E}'_i, \quad \mu'_i := \frac{\deg(\mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1})}{\mathrm{rank}(\mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1})}$$

すると、次が成立する。

$$\frac{1}{2}K_f^3+3\chi_f+l(2)=\deg f_*\mathcal{O}_X(2K_f)=\sum_{i=1}^{k}r_i'(\mu_i'-\mu_{i+1}').$$

一つ目の等式は、Reid-Fletcher の多重種数公式の相対版である。Harder-Narasimhan フィルトレーションの性質 ([21, Theorem 2]) から、

$$\sum_{i=1}^{k}r_i'(\mu_i'-\mu_{i+1}')\geq\sum_{i=1}^{k}\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i)\left(\mathrm{rk}(\mathcal{F}_i)-\mathrm{rk}(\mathcal{F}_{i+1})\right)$$

を示すことができる。従って、

$$\frac{1}{2}K_f^3+3\chi_f+l(2)\geq\sum_{i=1}^{k}\mu_{\mathrm{nef}}(\mathcal{F}_i)\left(\mathrm{rk}(\mathcal{F}_i)-\mathrm{rk}(\mathcal{F}_{i+1})\right)$$

を得る。右辺を補題 4.3 で評価し、$\sum_{i=1}^{k}r_i(\mu_i-\mu_{i+1})\geq\chi_f$ ([5, Lemma 1.1]) を組み合わせて、所望の不等式

$$K_f^3+2l(2)\geq\sum_{i=1}^{l_1-1}(2r_i-4)(\mu_i-\mu_{i+1})+\sum_{i=l_1}^{l_2-1}(6r_i-12)(\mu_i-\mu_{i+1})+\sum_{i=l_2}^{n}(10r_i-24)(\mu_i-\mu_{i+1}).$$

を得る。これで命題 4.2 の証明が完了した。

命題 4.4. 3 次元代数ファイバー空間 $f:X\to B$ は相対極小かつ一般ファイバーの幾何種数 $p_g\geq 1$ と仮定する。一般ファイバー F に関して $\mathrm{cov.gon}(F)$ 及び $\mathrm{mcd}(F)$ がともに c 以上であるなら、

$$K_f^3\geq\sum_{i=1}^{l_1-1}(3c-4)(r_i-1)(\mu_i-\mu_{i+1})+\sum_{i=l_1}^{l_2-1}c(r_i-2)(\mu_i-\mu_{i+1})$$

が成立する。

証明. まず、大野氏 [19] による次の事実を引用する。

事実 4.5. ([19, p 651]) 記号は命題 4.1 と同じとする。ファイバー空間 $Y\to B$ の一般ファイバー $\widetilde{F}$ に対して、$d_i:=(\mu|_{\widetilde{F}}^*K_F\cdot M_i|_{\widetilde{F}})$ とおく。このとき、

$$K_f^3\geq\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\mu_{i+1})\left(d_i+d_{i+1}\right)$$

が成立する。

事実 4.5 により、

$$d_i\geq\begin{cases}0 & \text{if } l_2\leq i\leq n,\\ c(r_i-2) & \text{if } l_1\leq i\leq l_2-1,\\ 2(c-2)(r_i-1) & \text{if } 1\leq i\leq l_1-1.\end{cases}\tag{4.2}$$

を示せば十分であることがわかる。一般の点 $p \in B$ をとり、その上の図式 (4.1) のファイバーを考える。

$$\begin{tikzcd} \widetilde{F}_p \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\iota_i"] & & \\ F \arrow[r, dashed] & \Gamma_i \arrow[r, hook, "\tau_i"'] & \mathbb{P}V_i \end{tikzcd}$$

以下、各 i ごと 3 つの場合に分けて議論する。

(1) $l_2 \leq i \leq n$ (i.e. ι_i は双有理写像) のとき、曲面 F_p は極小モデルであることから、標準因子 K_{F_p} はネフである。従って曲面 $\widetilde{F}_p$ 上の因子 $\mu|_{\widetilde{F}}^* K_F$ はネフとわかる。$M_i|_{\widetilde{F}}$ は有効因子であるから、$d_i \geq 0$ と分かる。

(2) $l_1 \leq i \leq l_2 - 1$(i.e. ι_i 次数 2 以上の生成点有限な写像) のとき、$\iota_i : \widetilde{F} \to \Gamma_i$ は次数 2 以上の生成点有限射である。$d_i \geq M_i|_{\widetilde{F}}^2$ であるから、

$$M_i|_{\widetilde{F}}^2 \geq c(r_i - 2)$$

を示せば十分である。最小被覆次数の仮定 $\mathrm{mcd}(\widetilde{F}) \geq c$ から、$\deg(\iota_i) \geq c$ である。曲面 $\Gamma_i \subset \mathbb{P}V_i = \mathbb{P}^{r_i - 1}$ は非退化であるから、$\deg \Gamma_i \geq (r_i - 2)$ がわかる。従って、

$$d_i \geq M_i|_{\widetilde{F}}^2 = \deg(\iota_i) \cdot \deg \Gamma_i \geq c(r_i - 2)$$

が成立する。

(3) $1 \leq i \leq l_1 - 1$ のとき、像 Γ_i が 0 次元である場合の主張は明らかなので、Γ_i は曲線と仮定してよい。射 ι_i のシュタイン分解を $\widetilde{\iota}_i : \widetilde{F} \to \widetilde{\Gamma}_i$ とする。

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\Gamma} \arrow[d] \\ \widetilde{F} \arrow[ur, "\widetilde{\iota}_i"] \arrow[r, "\iota_i"'] & \Gamma_i \end{tikzcd}$$

被覆ゴナリティーに関する仮定 $\mathrm{cov.gon}(\widetilde{F}) \geq c$ 及び命題 3.3 により、

$$d_i = (\mu|_{\widetilde{F}}^* K_F \cdot M_i|_{\widetilde{F}}) \geq 2(c-2)(r_i - 1)$$

が成立する。

従って (1),(2),(3) から、d_i の評価 (4.2) を得られた。事実 4.5 と (4.2) を合わせて、所望の不等式

$$K_f^3 \geq \sum_{i=1}^{l_1 - 1} (3c-4)(r_i - 1)(\mu_i - \mu_{i+1}) + \sum_{i=l_1}^{l_2 - 1} c(r_i - 2)(\mu_i - \mu_{i+1})$$

が得られた。 □

これで主結果である定理 2.2 の証明の準備が整った。もう一度、定理 2.2 を振り返る。

定理 4.6 (=定理 2.2)**.** 相対極小な 3 次元代数ファイバー空間 $f : X \to B$ を考える。一般ファイバー F は $p_g(F) \geq 1$ なる一般型曲面とし、c は 4 以上の整数とする。一般ファイ

バー F に関して cov.gon(F) 及び mcd(F) がともに c 以上であるなら、

$$K_f^3 \geq \left(1-\frac{4}{c}\right)\frac{K_F^2}{K_F^2+24\left(1-\frac{4}{c}\right)}\left(10\cdot \mathrm{deg} f_*\omega_f - 2l(2)\right)$$

が成立する。但し、$l(2)$ は *Reid-Fletcher* の多重種数公式の補正項である ([12, Definition 2.6])。

証明. 命題 4.2, 4.4 より、

$$\begin{aligned}K_f^3+\frac{2(c-4)}{c}l(2) \geq & \sum_{i=1}^{l_1-1}\left(\frac{c-4}{c}(2r_i-4)+\frac{4}{c}(3c-4)(r_i-1)\right)(\mu_i-\mu_{i+1}) \\ & +\sum_{i=l_1}^{l_2-1}\left(\frac{c-4}{c}(6r_i-12)+4(r_i-2)\right)(\mu_i-\mu_{i+1}) \\ & +\sum_{i=l_2}^{n}\frac{c-4}{c}\left(10r_i-24\right)(\mu_i-\mu_{i+1})\end{aligned}$$

が成り立つ。各 i に対して、

$$\left(1-\frac{4}{c}\right)(10r_i-24) \leq \begin{cases}\left(1-\frac{4}{c}\right)(10r_i-24) & \text{if } l_2 \leq i \leq n, \\ \left(1-\frac{4}{c}\right)(6r_i-12)+4(r_i-2) & \text{if } l_1 \leq i \leq l_2-1, \\ \left(1-\frac{4}{c}\right)(2r_i-4)+\frac{4}{c}(3c-4)(r_i-1) & \text{if } 1 \leq i \leq l_1-1,\end{cases}$$

を示せる。従って、

$$K_f^3+\frac{2(c-4)}{c}l(2) \geq 10\left(1-\frac{4}{c}\right)\mathrm{deg} f_*\omega_f - 24\left(1-\frac{4}{c}\right)\mu_1 \tag{4.3}$$

を得る。一方で、$K_f^3 \geq K_F^2\mu_1$ が成り立つ。不等式 (4.3) と $K_f^3 \geq K_F^2\mu_1$ を併せて、所望の不等式

$$K_f^3 \geq \left(1-\frac{4}{c}\right)\frac{K_F^2}{K_F^2+24\left(1-\frac{4}{c}\right)}\left(10\cdot \mathrm{deg} f_*\omega_f - 2l(2)\right).$$

が得られる。 □

References

[1] H. Akaike, On the gonality type invariants and the slope of a fibered 3-fold, arXiv:2404.05216.v1[mathAG].

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, Geometry of Algebraic Curves, Vol. I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. **267**, Springer-Verlag, New York, (1985).

[3] E. Arbarello, M. Cornalba, and P. A. Griffiths, Geometry of algebraic curves. Volume II, Grundlehren-der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. **268**, Springer, Heidelberg, (2011).

[4] T. Ashikaga, and K.-I. Yoshikawa, A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces (with an Appendix by K. Konno). Advanced Studies in Pure Mathematics, **56** (2007) 1–39.

[5] M. A. Barja, On the slope of fibred threefolds, Internat. J. Math., **11** (2000), 461–491.

[6] F. Bastianelli, On symmetric products of curves, Tran. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 2493–2519
[7] F. Bastianelli, P. De Poi, L. Ein, R. Lazarsfeld, B. Ullery, Measures of irrationality for hypersurfaces of large degree. Compos. Math. **153**, (2017), 2368–2393. Michigan Math. J. **66** (2017), 125–154.
[8] M. Enokizono, On local invariants for fibered surfaces, 第 17 回代数曲線論シンポジウム報告集, (2019),13–25.
[9] M. Enokizono, Slope inequality of fibered surfaces, Morsification conjecture and moduli of curves, arXiv:2307.04311.v2[mathAG].
[10] M. Enokizono, Slope equality of plane curve fibrations and its application to Durfee's conjecture, Asian J. Math. **26** (2022), no. 1, 119–135.
[11] M. Enokizono, Slope equality of non-hyperelliptic Eisenbud-Harris special fibrations of genus 4, Glasg. Math. J. **65** (2023), no. 2, 284–287.
[12] A. R. Fletcher, Contributions to Riemann-Roch on projective 3-folds with only canonical singularities and applications, Proc. Sympos. Pure Math., **46** (1987), 221–231.
[13] J. Harris and I. Morrison, Slopes of effective divisors on the moduli space of stable curves, Invent. Math. **99** (1990), 321–355.
[14] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, in "Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K. Kodaira (W. Baily and T. Shioda eds.)," Iwanami Shoten, Publishers and Cambridge Univ. Press, Tokyo and Cambridge, (1977), 79–90.
[15] Y. Hu and T. Zhang, Fibered varieties over curves with low slope and sharp bounds in dimension three, J. Algebraic Geom. **30** (2021), no. 1, 57–95.
[16] K. Konno, On the quadric hull of a canonical surface. In: Beltrametti, M.C. et al. (eds.) Algebraic geometry. A volume in memory of Paolo Francia. Berlin: de Gruyter, (2002) 217–235.
[17] Y. Lee and G. P. Pirola, On rational maps from the product of two general curves, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **16** (2016), 1139–1152.
[18] X. Lu and K. Zuo, On the gonality and the slope of a fibered surface, Adv. Math., **324** (2018), 336–354.
[19] K. Ohno, Some inequalities for minimal fibrations of surfaces of general type over curves, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 643–666.
[20] M. Reid, Problems on pencils of small genus, Preprint 1990.
[21] S. S. Shatz, The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles, Comp. Math. **35**, no. 2, (1977), 163–187.
[22] G. Xiao, π_1 of elliptic and hyperelliptic surfaces, Internat. J. Math. **2** (1991), 599–615.

赤池広都
東北大学理学研究科数学専攻
980-8578, 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3
e-mail: hiroto.akaike.c6[at]tohoku.ac.jp