

One dimensional sheaves on log Calabi-Yau surfaces

高橋 宣能 (広島大学)

1 はじめに

固有な代数多様体 X 上の接続層であって台が一次元であるようなもののモジュライ空間は、 X 上の曲線の数え上げ等に応用を持つ。固有でない代数多様体 U については、固有な多様体 X とその上の被約因子 D であって $X \setminus D$ が U と同型になるようなものを取り、「対数的」な対 (X, D) を考える。このとき、接続層と D との関係に条件を付けてモジュライ空間を考えることができる。

(X, D) を対数的 Calabi-Yau 曲面、すなわち曲面 X と被約因子 D の組で $K_X + D \sim 0$ となるものとする。 X 上の接続層 $\mathcal{F}$ で、台が曲線 C であって D と一点 P で交わるようなものであり、そのホモロジー類が β で、さらにもう少し追加の条件を満たすもののモジュライ空間 $MMI_\beta^P(X, D)$ を考える。このようなモジュライ空間は、 (X, D) 上の曲線、特に $\mathbb{A}^1$ -曲線の数え上げに応用を持つ (現在のところささやかなものだが)。また、数え上げを離れて、この空間の幾何学自体も興味深いものと考えられる。特に、その部分コンパクト $\overline{MMI}_\beta^P(X, D)$ がシンプレクティック特異点を持つか、という問題に現在興味を持っており、今回の講演ではこのことを中心として話した。

以下、 $\mathbb{C}$ 上で考える。動機付けとして $\mathbb{A}^1$ -曲線の数え上げへの $MMI_\beta^P(X, D)$ の応用について触れた後、 $\overline{MMI}_\beta^P(X, D)$ の特異点について述べる。

2 開多様体上の数え上げ、特に $\mathbb{A}^1$ -曲線

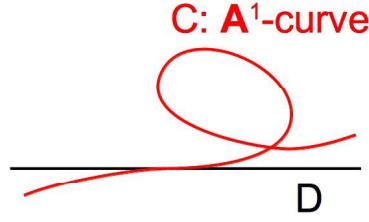
固有でない非特異多様体 U に対して、非特異射影多様体 X とその上の正規交叉因子 D で $U \cong X \setminus D$ となるものを考え、 (X, D) を対数的な対と呼ぶ。このとき、非特異射影的な場合の標準因子に対応するものは対数的標準因子 $K_X + D$ である。

固有 (または射影) 多様体上の有理曲線の数え上げは、曲線の数え上げの中で最も基本的な問題の一つと言える。(既約) 非特異射影的曲線 C が有理曲線である、すなわち $\mathbb{P}^1$ と同型であることは $\deg K_C < 0$ となることと同値だが、対象を対数的曲線 (C, D) (C は非特異射影的、 D は被約因子) に広げると、 $\deg(K_C + D) < 0$ となるものとしてもう一つ、 $(C, D) \cong (\mathbb{P}^1, pt)$ がある。これは $\mathbb{A}^1$ に対応するものと言える。

定義 2.1. X を固有代数多様体、 $D \subset X$ を被約因子とする。 (X, D) 上の $\mathbb{A}^1$ -曲線とは、(既約) 有理曲線 $C \subset X$ であって、正規化写像を $\nu: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ と書くとき $\#\nu^{-1}(D) = 1$ が成り立つようなもののことである。 $(X \setminus D)$ 上の $\mathbb{A}^1$ -曲線と呼ぶこともある。)

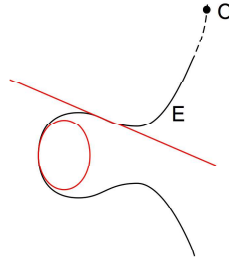
既約曲線 $C \subset X$ が (X, D) 上の $\mathbb{A}^1$ -曲線であることは、 $C \setminus D$ が正則写像 $\mathbb{A}^1 \rightarrow X \setminus D$ の像であるということと同値である。また、 $X \setminus D$ がアフィン空間の開部分多様体として表されている場合は、 $C \setminus D$ が定数でない多項式写像の像であると言っても良い。

条件のうち、 $\#\nu^{-1}(D) = 1$ を最大接触条件という。これは、 $\#(C \cap D) = 1$ より少し強い。



3次元 Calabi-Yau 多様体 X 上では、各ホモロジー類 β および非負整数 g に対して、 β に属する種数 g の曲線のモジュライ空間の「仮想次元」、すなわちパラメータの数の計算から予想される次元が 0 になる。これと同様のことを対数的多様体上の $\mathbb{A}^1$ -曲線で考えると、 (X, D) 上の $\mathbb{A}^1$ -曲線のモジュライの仮想次元が 0 になるためには、 (X, D) が対数的 Calabi-Yau 曲面、すなわち $\dim X = 2$ および $K_X + D \sim 0$ を満たすようなものであれば良いことがわかる。

この条件を満たすものとして、非特異 3 次曲線 $E \subset \mathbb{P}^2$ に対する対 $(\mathbb{P}^2, E)$ がある。変曲点 $O \in E$ をとり、これを単位元とする群構造を考える。



C を $(\mathbb{P}^2, E)$ 上の d 次 $\mathbb{A}^1$ -曲線とすると、最大接触性から特に $C \cap E = \{P\}$ がある $P \in E$ について成り立つ。このとき $C|_E = 3dP$ となっているから、 P は群構造について $3d$ -トーションである。例として、 E の変曲点における接線は 1 次の $\mathbb{A}^1$ -曲線である。

$\mathbb{A}^1$ -曲線の数え上げでは、(他の数え上げ問題と同様に) 適切な重複度付きで数えるのが自然である。

例 2.2. $(\mathbb{P}^2, E)$ 上の 3 次の $\mathbb{A}^1$ -曲線 C で E と変曲点 $P \in E$ で交わるものは以下の通り。

- $E \cong (y^2 = x^3 + 1)$ のとき、cusp を持つものが 1 つ。 $E : y^2 = x^3 + 1$ で P が無限遠点ならば、 $y^2 = x^3$ で与えられる。
- そうでないとき、node を持つものが 2 つ。

node をもつ (あるいはより一般に immersed な) $\mathbb{A}^1$ -曲線 C は重複度 1 を持つべきであると言える。そこで、 E の変形に関する不変性が成り立つためには、cusp を持つ 3 次の $\mathbb{A}^1$ -曲線は重複度 2 を持つべきということになる。

これに関連し、射影 K3 曲面上の有理曲線の話思い出しておく。Yau-Zaslow は次の「公式」を与えた: S を K3 曲面、 D を S 上の ample な因子として、 g を D の算術種数とする。このとき $|D|$ に含まれる有理曲線の数、適切に数えると g のみに依存し、これを $n(g)$ と書くとき (ただし $n(0) = 1$ として)

$$\sum_{g=0}^{\infty} n(g)q^g = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{24}}.$$

Yau-Zaslow の議論、および Beauville による、ある定式化のもとでの証明では、 $|D|$ 上の tautological family の相対 compactified Jacobian が用いられる。その議論から、 $C \in |D|$ が (既約) 有理曲線のとき、 C の寄与は compactified Jacobian $\overline{JC}$ のオイラー標数 $e(\overline{JC})$ であるべきことが分かる。実際これは、安定写像のモジュライ空間から得られる重複度に等しいことが証明された。

定理 2.3 ([FGS]). 有理曲線 $C \subset S$ の、安定写像のモジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(S, [C])$ における重複度は $e(\overline{JC})$.

証明には、K3 曲面上の単純層のモジュライ空間の非特異性 ([Mu]) が用いられた。

相対的な場合にも、同様の議論でこの定理と同様のことが言える。 X を非特異射影曲面とし、簡単のため regular ($h^1(\mathcal{O}_X) = 0$) とする。 $D \subset X$ を非特異曲線、 $\beta \in H_2(X)$, $w := \beta \cdot D > 0$ とする。

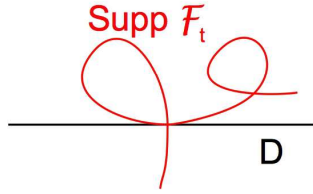
定義 2.4. $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ (modules with maximal intersection) を以下のような関手の層化とする。

$$(\text{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow (\text{Set}); T \mapsto \{ \text{接続層 } \mathcal{F}/X \times T \text{ で (a), (b) を満たすもの} \} / \cong$$

ただし

- (a) $\mathcal{F}$ は T 上平坦、かつ T の任意の geometric point t に対しある integral curve $C_t \in |\beta|$, $C_t \not\subset D$ があり、 $\mathcal{F}_t$ は C_t 上の torsion-free, rank 1 の層。
- (b) section $\sigma : T \rightarrow D \times T$ であって、 $\mathcal{F}|_{D \times T} \cong \mathcal{O}_{w \cdot \sigma(T)}$ となるものがある。

$\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ は大体以下のような曲線上の torsion-free, rank 1 の層をパラメータ付けする。ただし、 $\mathcal{F}_t$ は台 C_t と D との交点では C_t 上の可逆層である (主に条件 (b) から)。



$\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ は (固有と限らない) スキームで表現される (これも $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ と書く)。

点 $P \in D$ で $\beta|_D \sim wP$ を満たすものについて、 $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ の部分スキーム $\mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ を $\mathcal{F}|_D \cong \mathcal{O}_{wP}$ となるような $\mathcal{F}$ をパラメータ付けするものと定める。

また、maximal intersection を持つ曲線のパラメータ空間

$$\Lambda_{\beta, P} := \{C \in |\beta| : C \text{ は integral, } C \not\subset D \text{ かつ } C|_D = wP\},$$

を考える。これは、射影空間 $|\beta|$ の (局所閉) 部分多様体と考えることができる。

ここで、 X は非特異有理射影曲面として、 D を非特異反標準曲線とする。例えば $(\mathbb{P}^2, (\text{cubic}))$ は条件を満たす。

定理 2.5 ([CGKT]). (1) $\mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ は $\Lambda_{\beta, P}$ 上の相対 compactified Jacobian の開部分スキームと同一視できる。

(2) $\mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ は $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ の開かつ閉部分スキームである。

(3) $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ および $\mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ は $2p_a(\beta)$ 次元の非特異多様体である。

[FGvS] の議論により、以下が従う。

定理 2.6 ([CGKT]). C を (X, D) 上の $\mathbb{A}^1$ -曲線で $P = C \cap D$ では非特異なものとする。このとき C の ($\mathbb{A}^1$ -曲線の然るべきモジュライ空間における) 重複度は $e(\overline{J}(C))$ 。

3 $\overline{\mathcal{MMI}}_\beta(X, D)$ の幾何、余次元 2 の特異点

以上、 $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ の $\mathbb{A}^1$ -曲線の数え上げへの応用について述べてきたが、 $\mathcal{MMI}_\beta(X, D)$ 自体も興味深いものと思われる。

[Mu] により、K3 曲面上の単純層のモジュライ空間にはシンプレクティック構造が入るのだった。ここでの状況でも、 D を定める $s \in H^0(X, \omega_X^{-1})$ を取っておくと、Serre 双対性を用いて $T_{[\mathcal{F}]} \mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ に非退化双線形形式が入る。Tyurin, Bottacin らによる [Mu] の一般化に従うと、もう少し空間を広げて、以下のよう考えることができる。

$D = \text{div}(s)$ は非特異であるとする。次のように置く：

$$\begin{aligned}\Lambda_\beta &:= \{C \in |\beta| : C \text{ は integral, } C \not\subseteq D\}, \\ \mathcal{M}_\beta &:= \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ は } X \text{ 上の接続層、ある } C \in \Lambda_\beta \text{ 上 torsion-free, rank } 1\}, \\ \mathcal{M}_\beta^\circ &:= \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ は } X \text{ 上の接続層、ある } C \in \Lambda_\beta \text{ 上可逆}\}.\end{aligned}$$

自然な射

$$\mathcal{M}_\beta \rightarrow \Lambda_\beta; \mathcal{F} \mapsto \text{Supp}(\mathcal{F})$$

が定まり、これは相対 compactified Jacobian と見ることができる。また、

$$\Lambda_\beta \rightarrow \text{Sym}^w(D); C \mapsto C \cap D$$

が定まる。ここで、 $\text{Sym}^w(D)$ を D 上の w 次有効因子の集合と同一視している。これらの射の合成を

$$\varphi : \mathcal{M}_\beta \rightarrow \text{Sym}^w(D); \mathcal{F} \mapsto \text{Supp}(\mathcal{F}) \cap D$$

とする。

定理 3.1 ([Tyu], [Bot]). s は $\mathcal{M}_\beta$ 上のポアソン構造を

$$T_{[\mathcal{F}]}^* \mathcal{M}_\beta = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \omega_X) \xrightarrow{s} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = T_{[\mathcal{F}]} \mathcal{M}_\beta$$

により定める。

定理 3.2 ([BG]). $\varphi|_{\mathcal{M}_\beta^\circ} : \mathcal{M}_\beta^\circ \rightarrow \text{Sym}^w(D)$ のファイバーはシンプレクティック葉である。

$\mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ は非特異シンプレクティック多様体であって、

$$\varphi^{-1}([wP]) \cap \mathcal{M}_\beta^\circ \subseteq \mathcal{MMI}_\beta^P(X, D) \subseteq \varphi^{-1}([wP])$$

となっている。そこで、 $\overline{\mathcal{MMI}}_\beta^P(X, D) := \varphi^{-1}([wP])$ と定めよう。 $\mathcal{MMI}_\beta^P(X, D)$ との差は、台曲線上の層として P で可逆でない層が入っていることである。 $\Lambda_{\beta, P} \subset \Lambda_\beta$ は $C|_D = wP$ となる曲線 C をパラメータ付けしていることを思い出すと、 $\overline{\mathcal{MMI}}_\beta^P(X, D)$ は $\Lambda_{\beta, P}$ 上の相対 compactified Jacobian とも言える。

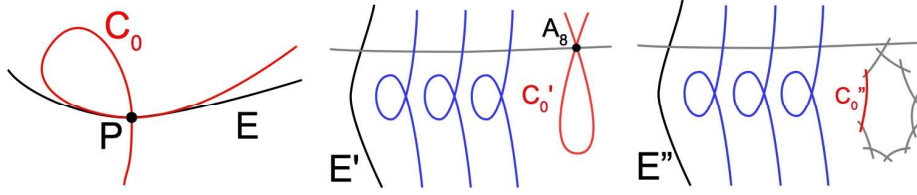
問題 3.3. $\overline{\mathcal{MMI}}_\beta^P(X, D)$ の特異点はどのようなものか。シンプレクティック特異点だろうか。シンプレクティック解消を持つだろうか。

例 3.4. $E \subset \mathbb{P}^2$ を一般の非特異 3 次曲線、 h を直線の類、 $P \in E$ を位数 9 の点として

$$\Lambda_{3h,P} = \{C: 3 \text{ 次曲線}, C \cap E = 9P\}$$

は P で node を持つような C_0 をちょうど 1 つ含み、 C_0 の P での 2 つの枝は E と重複度 1 および 8 で交わる。

$[I_{P \subset C_0}] \in \mathcal{M}_{3h}$ は $\overline{\mathcal{MMI}}_{3h}^P(\mathbb{P}^2, E)$ の特異点になっている。 $[I_{P \subset C_0}]$ を含む $\overline{\mathcal{MMI}}_{3h}^P(\mathbb{P}^2, E)$ の連結成分は曲線族 $\Lambda_{3h,P}$ の全空間 $\coprod_{C \in \Lambda_{3h,P}} C$ と同一視でき、 $[I_{P \subset C_0}]$ の定める点は A_8 特異点であることが分かる。また、 Λ の固定点の解消がクレパント特異点解消を与える。



一般の場合には、以下のようなアプローチを考えている。

A. ヒルベルトスキームを用いる。以下の状況を考える。

- $\mathcal{C} \rightarrow S$ は算術種数 g の連結被約曲線の固有な族で、中心ファイバーは C であり、
- $\mathcal{F}$ は C 上の単純、torsion free, rank 1 の層である。

このとき、 S 上解析的 (または étale または形式的) な意味で局所的に、 $\mathcal{C}$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ であって、ある開集合 $U \subseteq \text{Hilb}^g(\mathcal{C}/S)$ 上で定義された $\mathcal{L}$ -twisted Abel 写像

$$A_{\mathcal{L}} : U \rightarrow \bar{J}(\mathcal{C}/S); (Z \subset \mathcal{C}_s) \mapsto I_{(Z \subset \mathcal{C}_s)} \otimes \mathcal{L}$$

が $[\mathcal{F}] \in \bar{J}(\mathcal{C}/S)$ の近くで étale 全射になっている (integral な場合には Altman-Iarrobino-Kleiman あたりによると思われ、reduced な場合には Melo-Rapagnetta-Viviani による)。

B. $\Lambda_{\beta,P}$ の固定点の解消を $\tilde{X} \rightarrow X$ として、

- (i) $\tilde{X}$ 上の単純層のモジュライ空間を用いる。
- (ii) $\tilde{X}$ 上の stable pair のモジュライ空間を用いる。

3.1 余次元 2

X, D など一般にとると、以下の状況が期待される:

- $\text{Sing } \overline{\mathcal{MMI}}_{\beta}^P(X, D)$ は余次元 2 以上である。
- 余次元 2 の一般の特異点 $[\mathcal{F}_0] \in \overline{\mathcal{MMI}}_{\beta}^P(X, D)$ は以下のように与えられる。
 - まず、 P で node を持つ $C_0 \in \Lambda_{\beta,P}$ を取る (これは $\Lambda_{\beta,P}$ において余次元 1 の条件)
 - $\mathcal{F}_0$ を C_0 上の torsion free, rank 1 の層で、 $(\mathcal{F}_0)_P \cong (I_{P \subset C_0})_P$ かつ P 以外では C_0 上可逆であるものとする。

ヒルベルトスキームを用いる方法では、以下ようになる。

$\Lambda_{\beta,P}$ 上の曲線族を $\mathcal{C}_{\beta,P}$ と書く。局所的に、 $([\mathcal{F}_0] \in \overline{\mathcal{MMI}}_{\beta}^P(X, D))$ は $Z = P \cup ((g-1) \text{ smooth points}) \subset C_0$ として $([Z] \in \text{Hilb}^g(\mathcal{C}_{\beta,P}/\Lambda_{\beta,P}))$ と同型である。

$([Z] \in \text{Hilb}^g(\mathcal{C}_{\beta,P}/\Lambda_{\beta,P}))$ は局所的に $(P \in \mathcal{C}_{\beta,P}) \times \mathbb{C}^{g-1}$ と同型であり、 $(P \in \mathcal{C}_{\beta,P})$ は局所的に $(A_{w-1}\text{-特異点}) \times \mathbb{C}^{g-1}$ である。したがって $([F_0] \in \overline{\text{MMT}}_{\beta}^P(X, D))$ はシンプレクティック特異点であり、かつシンプレクティック解消を持つ。

固定点の解消を使う方法では、以下ようになる。ただし、先に断っておくと、こちらは余次元 2 を越えたところではどのようにすればよいのか分かっていない。

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を $\Lambda_{\beta,P}$ の固定点解消とする。 π は P およびそれに対応する D の proper transform 上の点を w 回 blow-up することにより得られる。 E_i および $\tilde{E}_i$ を、それぞれ i 回目の blow-up の例外曲線の proper transform および total transform とする。 $C \in \Lambda_{\beta,P}$ に対して $\tilde{C} = \pi^*C - \sum \tilde{E}_i$ において

$$\tilde{\Lambda}_{\beta,P} = \{\tilde{C} \mid C \in \Lambda_{\beta,P}\}.$$

とする。これは $\tilde{X}$ 上の固定点の無い曲線族 $\tilde{\mathcal{C}}_{\beta,P}/\tilde{\Lambda}_{\beta,P}$ を与える。一般の C は P で非特異であり $\tilde{C}$ はその proper transform であるが、 C_0 に対しては

$$\tilde{C}_0 = C'_0 + E_1 + \cdots + E_{w-1}$$

となる。ただし C'_0 は種数 $g-1$ の曲線である。したがって、 $\Lambda_{\beta,P}$ と異なり $\tilde{\Lambda}_{\beta,P}$ は reducible な元を持つ。

$\tilde{D}$ を D の proper transform とする。このとき $(\tilde{X}, \tilde{D})$ は対数的 Calabi-Yau 曲面であり、 $\tilde{C}$ は $\tilde{D}$ と交わらない。したがって $\tilde{X}$ は $\tilde{C}$ の近くで Calabi-Yau である。

$\tilde{\Lambda}_{\beta,P}$ は既約とは限らない被約曲線を含んでいるのだった。そのような曲線 (の族) の (相対) compactified Jacobian は、Esteves によって以下のように得られている。

C を連結被約曲線とする。 I を C の既約成分の集合として、 C の偏極とは $q = (q_Z)_{Z \in I} \in \mathbb{Q}^I$ であって $|q| := \sum q_Z$ が整数であるようなものである。偏極 q が与えられたとき、部分曲線 $D \subset C$ に対して、 $q_D := \sum_{Z \subset D} q_Z$ とおく (したがって $|q| = q_C$)。 q が一般とは、 C の任意の真の部分曲線 $D \neq \emptyset, C$ に対して $q_D \notin \mathbb{Z}$ となることである。

$\mathcal{F}$ を C 上の単純な torsion free, rank-1 層とする。 $D \subset C$ に対し $\mathcal{F}_D := (\mathcal{F}|_D)/(\text{最大 } 0 \text{ 次元部分層})$ とおく。 $\mathcal{F}$ が q -安定とは、

- $\chi(\mathcal{F}) = |q|$ ($= q_C$) かつ
- 任意の真部分曲線 D に対し $\chi(\mathcal{F}_D) > q_D$

を満たすことである。

定理 3.5 ([E]). q が一般ならば、 C 上の q -安定な単純 torsion free, rank-1 層をパラメータ付けする射影的スキーム $\bar{J}_C^s(q)$ が存在する。(曲線族 $\mathcal{C}/S$ に対する相対版 $\bar{J}_{\mathcal{C}/S}^s(q)$ も (q を適切に一般化すれば) ある。)

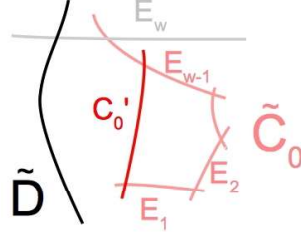
ここでは $\tilde{C}_0 = C'_0 + E_1 + \cdots + E_{w-1}$ 上の偏極を以下のように定める。 χ を整数として、 $0 < \varepsilon \ll 1$ を取り、 $q_{C'_0} = \chi - (w-1)\varepsilon$, $q_{E_i} = \varepsilon$ とおく。このとき q は一般の偏極である。

$\mathcal{F}_0$ を $\tilde{C}_0$ 上の torsion free, rank-1 層で、 $\chi(\mathcal{F}_0) = \chi$ となるものとする。このとき、

$$\mathcal{F}_0 \text{ が単純} \Leftrightarrow \mathcal{F}_0 \text{ は、高々 } 1 \text{ つの node 以外で可逆である}$$

が成り立つ。 $d = \chi + g - 1$ とおき、 $d_0 = \deg \mathcal{F}_{C'_0}$, $d_i = \deg \mathcal{F}_{E_i}$ ($i > 0$) とすると、 $\mathcal{F}_0$ が q -安定となるのは以下の場合である。

- $\mathcal{F}_0$ は可逆、 $(d_0, d_1, \dots, d_{w-1}) = (d, 0, \dots, 0)$,
- $\mathcal{F}_0$ は可逆、 $(d_0, d_1, \dots, d_{w-1}) = (d-1, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, または
- $\mathcal{F}_0$ はある node で可逆でなく、 $(d_0, \dots, d_{w-1}) = (d-1, 0, \dots, 0)$.



スキームの芽 $0 \in S$ に対して、

- $\mathcal{C} \rightarrow S$ を $\tilde{\mathcal{C}}_{\beta,P}/\tilde{\Lambda}_{\beta,P}$ の基底変換で中心ファイバーが $\tilde{C}_0$ であるもの、
- $\mathcal{F}$ を $\mathcal{C}/S$ 上の平坦な層の族で $\mathcal{F}_0$ が上のいずれかであるもの

とする。 $\mathcal{F}$ を $\tilde{X} \times S$ 上の層とも見る。 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ の基底拡大を $\pi_S: \tilde{X} \times S \rightarrow X \times S$ と書く。

このとき $0 \in S$ の近くで $R^1(\pi_S)_*\mathcal{F} = 0$, $(\pi_S)^*(\pi_S)_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $(\pi_S)_*\mathcal{F}$ は S 上平坦でファイバー上 torsion-free, rank 1 となる。よって、 π_* は射

$$\bar{J}_{\tilde{\mathcal{C}}_{\beta,P}/\tilde{\Lambda}_{\beta,P}}^s(q) \rightarrow \overline{\mathcal{MM}\mathcal{I}}_{\beta}^P(X, D)$$

を定める。 $\tilde{X}$ が $\tilde{C}_0$ の近くで Calabi-Yau であることから、 $\bar{J}_{\tilde{\mathcal{C}}_{\beta,P}/\tilde{\Lambda}_{\beta,P}}^s(q)$ は非特異でシンプレクティック構造を持つことがわかり、 π_* は $[\pi_*\mathcal{F}_0] \in \overline{\mathcal{MM}\mathcal{I}}_{\beta}^P(X, D)$ の近傍でシンプレクティック解消を与えている。

4 余次元 4 の特異点

次のレベルの特異点として、以下のように与えられる余次元 4 の特異点が典型的と思われる。

- $C_0 \in \Lambda_{\beta,P}$ を P で *tacnode* を持つ曲線とする (余次元 2 の条件)。解析的には

$$D: y = 0, \quad C_0: (y - x^2)(y - ux^{w-2}) = 0$$

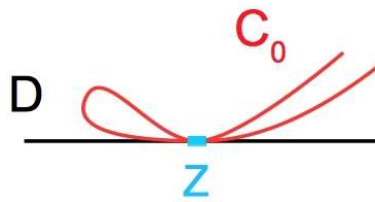
と表される (u は単元)。

- $\mathcal{F}_0$ は C_0 上の torsion free, rank 1 の層で、 $(\mathcal{F}_0)_P \cong (I_{Z \subset C_0})_P$, ただし Z は $\langle y, x^2 \rangle$ で定義される 0 次元閉部分スキーム。

$\overline{\mathcal{MM}\mathcal{I}}_{\beta}^P(X, D)$ は

$$\{[\mathcal{F}] \mid (\mathcal{F})_P \cong (I_{P \subset C})_P, C \text{ は } P \text{ で node または tacnode, それ以外で非特異}\}$$

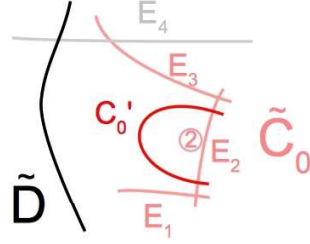
で与えられる余次元 2 の部分集合に沿って $A_{w-1} \times \mathbb{C}^{2g-2}$ 型の特異点を持つが、 $[\mathcal{F}_0]$ はその閉包に含まれる。



まず固定点の解消を用いてモジュライ理論的に特異点を調べる方法については、以下のような理由でまだうまくいっていない。 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を $\Lambda_{\beta,P}$ の固定点解消とすると、 $\tilde{C}_0 := \pi^*(C_0) - \sum \tilde{E}_i$ は被約でない: たとえば $g = 2, w = 4$ とすると、

$$\tilde{C}_0 = C'_0 + E_1 + 2E_2 + E_3, \quad C'_0 \cong \mathbb{P}^1$$

の形になる。



この場合、単純でない層が避けられないようであり、どうすればよいのかまだわかっていない。Stable pair のモジュライ空間を考える手もあるが、今の場合これは特異になっており、どう調べればよいかわからない。

次にヒルベルトスキームを用いる方法について述べる。引き続き $g = 2, w = 4$ の場合を考える。 $\mathcal{H} = \text{Hilb}^2(C_{\beta,P}/\Lambda_{\beta,P})$ として、twisted Abel 写像による局所的な同型 $([\mathcal{F}_0] \in \overline{\mathcal{MMT}}^P_{\beta}(X, D)) \cong ([Z \subset C_0] \in \mathcal{H})$ が存在する。 $\mathcal{H}$ は局所的に $\mathbb{C}^6$ に埋め込むことができ、また定義方程式系も具体的に書くことができる。少し単純化して、曲線族

$$C_{s,t}: (y^2 - x^4) + sx(y - x^3) + t(y - x^4) = 0$$

を考える。 $\text{Hilb}^2(\mathbb{A}^2)$ のアフィン開集合 $\mathbb{C}^4 \subset \text{Hilb}^2(\mathbb{A}^2)$ が部分スキーム族

$$Z_{k,l,m,n}: y - kx - l = 0, \quad x^2 - mx - n = 0$$

により与えられる。考えている相対ヒルベルトスキームは (局所的に)

$$\mathcal{H} = \{(s, t, k, l, m, n) \mid Z_{k,l,m,n} \subset C_{s,t}\} \subset \mathbb{C}^6$$

であり、その方程式系は、 $C_{s,t}$ の方程式に $y = kx + l$ を代入し、 $x^2 - mx - n$ を法として還元したときの 1, x の係数によって与えられる。結果は

$$\begin{aligned} n(-sm^2 + sk + k^2 - m^2) - tm^2n + tl + l^2 - n^2(1 + s + t) &= 0, \\ m(-sm^2 + sk + k^2 - m^2) - tm^3 + tk + sl + 2kl - 2mn(1 + s + t) &= 0. \end{aligned}$$

である。特異点集合 $\text{Sing}(\mathcal{H})$ は

$$t = l = n = 0, \quad -sm^2 + sk + k^2 - m^2 = 0$$

であり、その一般の点に沿って $\mathcal{H}$ は解析的に $(A_3\text{-特異点}) \times \mathbb{C}^2$ と同型である。 $\text{Sing}(\mathcal{H})$ 自体は原点に A_1 -特異点を持ち、したがってシンプレクティック特異点である。これは $\mathcal{H}$ がシンプレクティック特異点であると予測した場合に Kaledin の定理から導かれる通りである。

4 次元の特異点で、特異点集合が既約で A_1 特異点をもつようなものは、 A_3 特異点の 2 次のヒルベルトスキームに現れる。 A_3 特異点 $S = (yz - x^4 = 0)$ と、 $\langle z, y, x^2 \rangle$ で定まるその部分スキーム Z' を考えると、実は $(0 \in \mathcal{H})$ は $([Z'] \in \text{Hilb}^2(S))$ と解析的に同型である。このことを、まず直接計算により見てみよう。

$[Z'] \in \text{Hilb}^2(\mathbb{A}^3)$ の近傍は $\langle z - ax - b, y - cx - d, x^2 - mx - n \rangle$ で与えられる。 $yz - x^4 \in \langle z - ax - b, y - cx - d, x^2 - mx - n \rangle$ となることと

$$\begin{aligned} n(ac - m^2) + bd - n^2 &= 0, \\ m(ac - m^2) + ad + bc - 2mn &= 0 \end{aligned}$$

は同値であり、これが $[Z'] \in \text{Hilb}^2(S)$ の近傍の定義多項式を与える。適当に変数変換を行うと、上に与えた $\mathcal{H}$ の方程式系がこの形になる。

これは、ある種の (すなわち D との交わりが一定の) 曲線族の相対ヒルベルトスキームがある曲面のヒルベルトスキームと局所的に同型ということであり、なかなか興味深い現象に思われる (どこかですでに知られていることかもしれないが)。この事実は、以下のような「トリック」で説明することができる。

条件 $Z_{k,l,m,n} \subset C_{s,t}$ は

$$y^2 - x^4 + sx(y - x^3) + t(y - x^4) \in \langle y - kx - l, x^2 - mx - n \rangle$$

と表されるが、この左辺を $y(y + sx + t) - (1 + s + t)x^4$ と書くと、以下と同値であることがわかる:

$$y\{(s + k)x + (t + l)\} - (1 + s + t)x^4 \in \langle y - kx - l, x^2 - mx - n \rangle.$$

($s = t = 0$) の近傍では、これは

$$y\{(1 + s + t)^{-1}(s + k)x + (1 + s + t)^{-1}(t + l)\} - x^4 \in \langle y - kx - l, x^2 - mx - n \rangle$$

と同値である。そこで、

$$c = (1 + s + t)^{-1}(s + k), \quad d = (1 + s + t)^{-1}(t + l)$$

を s, t のかわりの座標として

$$yz - x^4 \in \langle y - kx - l, z - cx - d, x^2 - mx - n \rangle$$

と表す。(つまり、 z 方向への「持ち上げ」を曲線のパラメータなどから決めている。) これはちょうど $S = (yz - x^4 = 0)$ に対する $\text{Hilb}^2(S)$ を表している。よって $\mathcal{H}$ は $\text{Hilb}^2(S)$ のある点と解析的に同型である。

同じ方法で、以下のようなことが示せたと思っている: $g := p_a(\beta) = \dim \Lambda_{\beta,P}$, $w := \beta \cdot D \geq g + 2$ として、また D 上で $wP \sim \beta|_D$ とする。一方で S を A_{w-1} -特異点とする。 $Z = gP \subset D$ として、 $C_0 \in \Lambda_{\beta,P}$ を取ると $Z \subset C_0$ となっている。このとき、 C_0 の近くでの $\Lambda_{\beta,P}$ に対するある一般性条件の下で、 $([Z] \subset C_0) \in \text{Hilb}^g(\mathcal{C}_{\beta,P}/\Lambda_{\beta,P})$ は、 $\text{Hilb}^g(S)$ のある点と解析的に同型である。もう少し違う形の Z についても試しているが、だいたい同様のことが成り立つようである。

有理二重点の 0 次元部分スキームをパラメータ付けするヒルベルトスキームはシンプレクティック特異点解消を持つことが Craw-Yamagishi により証明されている ([CY]) から、いま考えている相対ヒルベルトスキームや $\overline{\mathcal{MM}}_{\beta}^P(X, D)$ の点もシンプレクティック特異点解消を持つことになる。

謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の皆様に心よりお礼を申し上げます。本研究は JSPS 科研費 22K03229 の助成を受けたものです。

参考文献

- [BG] I. Biswas, T. L. Gómez, *Poisson structure on the moduli spaces of sheaves of pure dimension one on a surface*, Geom. Dedicata **207**, 157–165 (2020).
- [Bot] F. Bottacin, *Poisson structure of moduli spaces of sheaves over Poisson surfaces*, Invent. Math. **121**, 421–436 (1995).
- [CGKT] J. Choi, M. van Garrel, S. Katz, N. Takahashi, *Sheaves of maximal intersection and multiplicities of stable log maps*, Selecta Math. (N.S.) **27**, no. 4, Paper No. 61 (2021).
- [CY] A. Craw, R. Yamagishi, *The Le Bruyn-Procesi theorem and Hilbert schemes*, arXiv:2312.08527.
- [D] S. Das, *Relative log-symplectic structure on a semi-stable degeneration of moduli of Higgs bundles*, Adv. Math. **410**, Paper No. 108756, 61 pp. (2022).
- [E] E. Esteves, *Compactifying the relative Jacobian over Families of reduced curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **353**, no. 8, 3045–3095 (2001).
- [FGS] B. Fantechi, L. Göttsche, D. van Straten, *Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of rational curves*, J. Alg. Geom. **8**, 115–133 (1999).
- [LW] J. Li, B. Wu, *Good degeneration of Quot-schemes and coherent systems*, Comm. Anal. Geom. **23**, no. 4, 841–921 (2015).
- [MPT] D. Maulik, R. Pandharipande, R. P. Thomas, *Curves on K3 surfaces and modular forms*, With an appendix by A. Pixton, J. Topol. **3**, no. 4, 937–996 (2010).
- [MRV] M. Melo, A. Rapagnetta, F. Viviani, *Fine compactified Jacobians of reduced curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **369**, no. 8, 5341–5402 (2017).
- [Mu] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math. **77**, 101–116 (1984).
- [Tyu] A. N. Tyurin, *Symplectic structures on the moduli spaces of vector bundles on algebraic surfaces with $p_g > 0$* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52**, no.4, 813–852, 896 (1988); translation in Math. USSR-Izv. **33**, no.1, 139–177 (1989).