# 向井対と K3 曲面

金光 秋博 *

城崎代数幾何学シンポジウム 2024 で話したことをもとに, 向井対の分類や向井対から得られる K3 曲面について紹介する. 詳細は準備中の論文 [Kan] を参考にしていただきたい.

**■指数の大きい Fano 多様体**　滑らかな Fano 多様体 $X$ には重要な 3 つの不変量, 次元 $\dim X$ と Picard 数 $\rho_X$ と指数 $r_X$ がある. この報告では $\rho_X = 1$ の場合に話題を限定する. この場合, Picard 群は基本因子と呼ばれる因子 $H_X$ によって生成されており, 指数 $r_X$ とは $-K_X = r_X H_X$ となる数のことをいうのであった.

Fano 多様体は, その指数が大きいほど, あるいは同じことであるが余指数と呼ばれる値 $c_X = \dim X + 1 - r_X$ が小さいほど, その構造が一般のものと比較して簡単であり, 実際に $c_X \leq 3$ を満たす Fano 多様体の完全な分類が知られている. 本稿の内容と関係する, $c_X = 3$ の Fano 多様体で $\rho_X = 1$ のものの分類 [Muk89] を簡単に復習しよう. このような Fano 多様体は**種数**とよばれる数 $g$ によって 10 種類に分類される. ここで種数とは $H_X^{\dim X} = 2g - 2$ を満たす数 $g$ のことである. 種数 $g$ は 2, 3, . . . , 10 あるいは 12 に値をもつ. 種数 $g$ が $g \leq 5$ であるものは, (重み付き) 射影空間内の完全交叉多様体として記述される. 一方で, 種数 $g$ が $g \geq 6$ であるものは, 等質空間を用いて記述される. 本稿の主題と関係する種数 7 および種数 8 の Fano 多様体の記述を簡単に紹介する.

**例 1** (種数 8 の Fano 多様体)**.** 8 次元の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2, 6)$ は, 余指数 3 の Fano 多様体であって種数 8 のものを与える. この Grassmann 多様体の Plücker 埋め込み $\mathrm{Gr}(2, 6) \subset \mathbf{P}^{14}$ に関する線形切断で次元が 3 以上のものも同様に種数 8 の Fano 多様体となる. 逆に, 種数 8 の Fano 多様体で $\rho_X = 1$ のものはすべてこのように記述できる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}(2,6) \arrow[r, "\text{Plücker}"] & \mathbf{P}^{14} \\
X \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{P}^{\dim X + 6}. \arrow[u, "\text{線形埋め込み}"']
\end{tikzcd}$$

---

城崎代数幾何学シンポジウム 2024 (京都開催) 報告.
Supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 23K12948.
* 東京都立大学, kanemitsu@tmu.ac.jp

**例 2** (種数 7 の Fano 多様体)**.** 10 次元ベクトル空間と, その上の非退化二次形式 $q$ を固定し, この二次形式に関する直交 Grassmann 多様体を考える．このうち $\mathrm{OG}(5,10)$ は, 2 つの連結成分 $\mathrm{OG}_{\pm}(5,10)$ をもち, それぞれは余指数 3 の Fano 多様体であって種数 7 のものを与える．この直交 Grassmann 多様体の線形切断で, 次元が 3 以上のものとして, 種数 7 の Fano 多様体が得られる．逆に, 種数 7 の Fano 多様体で $\rho_X = 1$ であるものはすべてこのように記述できる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{OG}_{\pm}(5,10) \arrow[r, "\text{半スピン埋め込み}"] & \mathbf{P}^{15} \\
X \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{P}^{\dim X+5}. \arrow[u, "\text{線形埋め込み}"']
\end{tikzcd}$$

**■余指数 3 の Fano 多様体と K3 曲面**　余指数 $c_X = 3$ の Fano 多様体の分類は, K3 曲面と深く関連する．実際, $X$ の一般の線形切断 $S$ で曲面であるものは K3 曲面であり, 逆に, 種数の低い一般の K3 曲面はすべてこのようにして得られるということが知られている [Muk88a].

例えば種数 8 の K3 曲面 $S$ で一般のものは, $\mathrm{Gr}(2,6)$ の線形切断として得られる．$\mathrm{Gr}(2,6)$ の線形切断をパラメーター付けする Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(9,15)$, あるいは, それを $\mathrm{Gr}(2,6)$ の自己同型群である $\mathrm{PGL}(6)$ で割ったもの $\mathrm{Gr}(9,15)/\mathrm{PGL}(6)$ を考えよう．この空間から, 種数 8 の K3 曲面のモジュライ $\mathcal{F}_8$ へ写像が誘導されるが, この写像は稠密部分集合への単射である:

$$\mathrm{Gr}(9,15)/\mathrm{PGL}(6) \hookrightarrow \mathcal{F}_8.$$

同様に, 種数 7 の K3 曲面 $S$ で一般のものは, $\mathrm{OG}_+(5,10)$ の線形切断として得られる．$\mathrm{OG}_+(5,10)$ の線形切断をパラメーター付けする Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(8,16)$ や, それを $\mathrm{OG}_+(5,10)$ の自己同型群である $\mathrm{PSO}(10)$ で割ったもの $\mathrm{Gr}(8,16)/\mathrm{PSO}(10)$ を考えよう．この空間から, 種数 7 の K3 曲面のモジュライ $\mathcal{F}_7$ へ写像が誘導されるが, この写像も稠密部分集合への単射である:

$$\mathrm{Gr}(8,16)/\mathrm{PSO}(10) \hookrightarrow \mathcal{F}_7$$

**■向井対の定義**　シンポジウムでは, 上述の Fano 多様体を用いた K3 曲面の記述の類似を, 向井対の場合に考えた．

まず向井対の定義を復習する [Muk88b]．滑らかな射影代数多様体 $X$ とベクトル束 $E$ の対が**向井対**であるとは $E$ が豊富であり, $c_1(X) = c_1(E)$ を満たすときをいうのであった．条件 $c_1(X) = c_1(E)$ は $-K_X = \det E$ ということと同じである．豊富ベクトル束 $E$ の $\det E$ は再び豊富であるから $X$ は Fano 多様体であることが従う．

逆に $X$ を Fano 多様体とし, その指数を $r_X$ とすると $E \coloneqq \mathcal{O}(H_X)^{\oplus r_X}$ と定めることで向井対 $(X,E)$ を得る．したがって向井対は Fano 多様体のある種の一般化とみなすことができる．この観点からみると, 向井対 $(X,E)$ に対して与えられる不変量 $\operatorname{rank} E$ は, Fano 多様体の

不変量 $r_X$ の一般化とみなせる．Fano 多様体のときと同じように, $\operatorname{rank} E \leq \dim X + 1$ が成り立つことが知られており, 向井対の余階数を $c_{(X,E)} = \dim X + 1 - \operatorname{rank} E$ として定める．

**■余階数 3 の向井対**　向井対は元々 [Muk88b] において, 指数の大きい Fano 多様体の分類問題との関係の中で導入されていた．余指数 $c_X \leq 3$ をみたす Fano 多様体が分類されているように, 現在までに $c_{(X,E)} \leq 3$ を満たす向井対も分類されている．ここでは, $c_{(X,E)} = 3$ かつ $\rho_X = 1$ を満たすもので「極大」な場合の分類をまず復習する (注意 4 を見よ):

**定理 3** ([Kan19a, Kan19b])**.** $c_{(X,E)} = 3$ かつ $\rho_X = 1$ を満たす向井対は次の対から「線形切断」を取ることで得られる．

(1) $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}(1))$.
(2) $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$.
(3) $(\mathrm{Gr}(2,5), \mathcal{K}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2})$.
(4) $(\mathrm{Gr}(2,5), \mathcal{Q}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$.
(5) $(W_4, p^*\mathcal{S}(1))$.

ここで

- $\mathcal{S}$ は二次超曲面 $\mathbf{Q}^n$ 上のスピノル束 (の一つ) である [Ott88].
- $\mathcal{G}$ は次のように定義される: $\mathbf{Q}^6$ は 6 次元スピン多様体 $\mathrm{OG}(3,7)$ と同型である．この同型のもとで $\mathcal{G} \simeq \mathcal{K}^\vee$ (普遍束の双対) である (Ottaviani 束と呼んでいる [Ott88]).
- $\mathcal{Q}$ や $\mathcal{K}$ は Grassmann 多様体上の普遍商束, 普遍部分束である．
- $W_4$ は $\mathbf{Q}^4$ の $B \in |\mathcal{O}(2)|$ で分岐する二重被覆 $p\colon W_4 \to \mathbf{Q}^4$ として得られる指数 2 の 4 次元 Fano 多様体である (4 次 del Pezzo 多様体).

**注意 4.** $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$ という対はベクトル束 $E$ が直線束 $\mathcal{O}(1)$ を直和因子にもつ．ここから超平面切断を取ることで $(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}(1))$ という向井対が得られる．このようにして得られるものがすべてである, というのが定理中の “「線形切断」を取ることで得られる” という記述の意味である．

**■余階数 3 の向井対と K3 曲面**　$c_X = 3$ の Fano 多様体の場合と同様に, $c_{(X,E)} = 3$ をみたす向井対もまた K3 曲面と関連する．実際 $s \in H^0(E)$ を一般の切断とすると, その零点集合 $(s)_0$ は K3 曲面である (また逆も従う [Lan96, Corollary 1.3])．したがって (余指数 3 の Fano 多様体から得られる K3 曲面の場合と同様に) 次のようなモジュライ写像が得られる:

$$\varphi\colon U/G \to \mathcal{F}_g$$

ここで $U \subset H^0(E)$ は $\{s \in H^0(E) \mid (s)_0$ は滑らかな K3 曲面 $\}$ として定義される開集合であり, また $G$ は $(X,E)$ の自己同型群である. つまり $(g,\psi) \in G$ は自己同型 $g\colon X \to X$ と同型 $\psi\colon g^*E \to E$ の対である. 偏極 K3 曲面のモジュライ $\mathcal{F}_g$ は次の部分集合を含む:

$$\mathcal{F}_g^0 \coloneqq \{[S] \in \mathcal{F}_g \mid S \text{ は余指数 3 かつ Picard 数 1 の Fano 多様体の切断として書ける } \}$$

向井の結果から, 例えば $g = 7,\ 8$ の場合には, $\mathcal{F}_g^0$ は $\mathrm{Gr}(2,6)$ や $\mathrm{OG}_+(5,10)$ の切断として書ける K3 曲面全体のなす稠密部分集合に一致する.

城崎シンポジウムではこの写像 $\varphi$ の構造について, 現在までにわかったことを紹介した.

**定理 5.** $(X,E)$ を定理 3 の向井対であって, (5) 以外のものとする. このとき次が成り立つ.

(1) $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathcal{F}_g^0$ である.
(2) $\varphi$ のファイバー $F$ は表 1 のようになる. ファイバー $F$ の詳細な記述は例 7 や例 8 で与える.

表 1　向井対と K3 曲面

| $X$ | $E$ | $g$ | $\dim U/G$ | ファイバー $F$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{Q}^6$ | $\mathcal{S}(1)$ | 7 | $27 = 19 + 8$ | $\mathbf{Q}^8 \setminus (D \in \lvert\mathcal{O}(4)\rvert)$ |
| $\mathbf{Q}^6$ | $\mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ | 7 | $26 = 19 + 7$ | $\mathbf{P}^7 \setminus \mathrm{Sec}(S)$ |
| $\mathrm{Gr}(2,5)$ | $\mathcal{K}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$ | 7 | $21 = 19 + 2$ | $S^\vee$ (種数 7 の K3 曲面の双対) |
| $\mathrm{Gr}(2,5)$ | $\mathcal{Q}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ | 8 | $24 = 19 + 5$ | $\mathbf{P}^5 \setminus$ (K3 scroll) |

**注意 6.** 定理 5 の結果は, 部分的にはすでに知られている. [IMOU20] においては, (1) の向井対について, $\varphi$ が支配的となることが示されている. また [Muk06] や [KR22] では (2), (3) の向井対について, $\varphi$ が支配的であることやその一般ファイバーが $F$ と双有理であることが示されている. 定理は, (この 3 つの場合については) これらの結果の精密化とみることもできる. 証明手法は [IMOU20] やそこで使われている命題 [IIM19, Proposition 4.1] に依る.

**■ファイバーの記述**　定理 5 に現れるファイバー $F$ の記述を与えておく.

**例 7.** $S$ を種数 7 の K3 曲面であって, $\mathcal{F}_7^0$ に属するものとする. 向井の定理から $S$ は 10 次元直交 Grassmann 多様体 $\mathrm{OG}_\pm(5,10)$ の連結成分のひとつ $\mathrm{OG}_+(5,10)$ の部分多様体となる.

$\mathrm{OG}_+(5,10)$ は半スピン表現によって $\mathbf{P}^{15}$ に埋め込まれ, $S$ はその線形切断になっている.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{OG}_+(5,10) & \xrightarrow{\text{半スピン埋め込み}} & \mathbf{P}^{15} \\ \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \text{線形埋め込み}} \\ S & \longrightarrow & \mathbf{P}^7. \end{array}$$

とくに, $S$ は 16 次元のスピン表現 $V_+$ の 8 次元部分空間 $W_8 \subset V_+$ を定めている.

(1) 直交 Grassmann 多様体 $\mathrm{OG}(1,10)$ を考えよう. この多様体は定義から二次超曲面 $\mathbf{Q}^8$ である. $\mathbf{Q}^8$ 上には, 半スピン表現に対応して 2 つの階数 8 のベクトル束 $\mathcal{S}_\pm$ があった (スピノル束 [Ott88]). ここでは $H^0(\mathcal{S}_\pm) \simeq V_\pm$ がそれぞれ 16 次元半スピン表現となるようにスピノル束 $\mathcal{S}_\pm$ を定義する. K3 曲面 $S$ を定める 8 次元部分空間 $W_8 \subset V_+$ は $\mathbf{Q}^8$ 上のベクトル束の間の射 $\mathcal{O}^{\oplus 8} \to \mathcal{S}_+$ を定める. この写像の外積を取ることで $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(4)$ という射を得る. この射の定める因子が $D \in |\mathcal{O}(4)|$ である.

(2) $S \subset \mathbf{P}^7$ という埋め込みに関する secant 多様体が $\mathrm{Sec}(S)$ である.

(3) $V_+$ と $V_-$ は互いに双対の関係であったことに注意せよ. したがって $S$ の定める 8 次元部分空間 $W_8 \subset V_+$ は, その双対を取ることで, $V_-$ の 8 次元部分空間 $W_8' \subset V_-$ を定める. この 8 次元部分空間 $W_8' \subset V_-$ が定める $\mathrm{OG}_-(5,10) \subset \mathbf{P}^{15}$ の線形切断は再び $g = 7$ の K3 曲面であり, これを $S^\vee$ と書いている.

**例 8.** $S$ を種数 8 の K3 曲面であって, $\mathcal{F}_8^0$ に属するものとする. $S$ は 8 次元 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2,6)$ の部分多様体となる. $\mathrm{Gr}(2,6)$ は $\mathbf{P}^{14}$ に埋め込まれ, $S$ はその線形切断になっているのであった.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(2,6) & \xrightarrow{\text{Plücker}} & \mathbf{P}^{14} \\ \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \text{線形埋め込み}} \\ S & \longrightarrow & \mathbf{P}^8. \end{array}$$

$\mathrm{Gr}(2,6)$ に含まれる $\mathbf{P}^4$ は $\mathrm{Gr}(1,6) \simeq \mathbf{P}^5$ によってパラメーター付けされている. また旗多様体 $\mathrm{Fl}(1,2;6)$ を考えることで次の普遍族が得られる:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Fl}(1,2;6) & & \\ & \swarrow^{p_1} & & \searrow^{p_2} & \\ \mathrm{Gr}(1,6) \simeq \mathbf{P}^5 & & & & \mathrm{Gr}(2,6). \end{array}$$

$V = p_1(p_2^{-1}(S))$ と定めると, これは K3 曲面上の $\mathbf{P}^1$ 束の像となっている. 表 1 に現れる K3 scroll とはこの $V$ のことである. $\mathbf{P}^5$ 内の 3 次元の scroll は Ottaviani によって分類されており, 4 種類あることが知られている [Ott92]. この $V$ はそのうちの一つである.

## 参考文献


[IIM19] Daisuke Inoue, Atsushi Ito, and Makoto Miura. Complete intersection Calabi-Yau manifolds with respect to homogeneous vector bundles on Grassmannians. *Math. Z.*, Vol. 292, No. 1-2, pp. 677–703, 2019.

[IMOU20] Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda. Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties: the case of K3 surfaces of degree 12 and abelian varieties. *Selecta Math. (N.S.)*, Vol. 26, No. 3, pp. Paper No. 38, 27, 2020.

[Kan] Akihiro Kanemitsu. K3 surfaces from Mukai pairs of corank 3. In preparation.

[Kan19a] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with corank 3. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 69, No. 1, pp. 231–282, 2019.

[Kan19b] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with dimension 4 and rank 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 372, No. 9, pp. 6629–6653, 2019.

[KR22] Michał Kapustka and Marco Rampazzo. Mukai duality via roofs of projective bundles. *Bull. Lond. Math. Soc.*, Vol. 54, No. 2, pp. 694–717, 2022.

[Lan96] Antonio Lanteri. Ample vector bundles with sections vanishing on surfaces of Kodaira dimension zero. *Matematiche (Catania)*, Vol. 51, No. suppl., pp. 115–125 (1997), 1996.

[Muk88a] Shigeru Mukai. Curves, $K3$ surfaces and Fano 3-folds of genus $\leq 10$. In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, pp. 357–377. Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[Muk88b] Shigeru Mukai. Problems on characterization of the complex projective space. In *Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Katata*, pp. 57–60. the 23rd Int'l Symp., Taniguchi Foundation, 1988.

[Muk89] Shigeru Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 86, No. 9, pp. 3000–3002, 1989.

[Muk06] Shigeru Mukai. Polarized $K3$ surfaces of genus thirteen. In *Moduli spaces and arithmetic geometry*, Vol. 45 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 315–326. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[Ott88] Giorgio Ottaviani. Spinor bundles on quadrics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 307, No. 1, pp. 301–316, 1988.

[Ott92] Giorgio Ottaviani. On 3-folds in $\mathbf{P}^5$ which are scrolls. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, Vol. 19, No. 3, pp. 451–471, 1992.