

Combinatorial stratifications of geometric moduli spaces of dynamical systems over $\mathbb{P}^1$

後藤倫* (大阪大学・大阪工業大学・京都大学)

1 導入

本講演の対象は全て $\mathbb{C}$ 上とする。

射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の自己写像のモジュライ空間 Rat_d は、

$$\begin{aligned}\text{Rat}_d &:= \{\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 : d \text{ 次自己射} \} \\ &= \{\varphi \mid \varphi([x : y]) = [f(x, y) : g(x, y)], f, g \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)\}\end{aligned}$$

で与えられ、 $G := \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ がその上に共役作用

$$G \curvearrowright \text{Rat}_d : \gamma \cdot \varphi := \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}$$

によって作用する。以降 $d \geq 2$ とする。このとき、 Rat_d の任意の点の固定群は有限で、商多様体

$$\text{rat}_d := \text{Rat}_d / G$$

は d 次力学系のモジュライ空間と呼ばれる。ここで、次のような問がある。

Problem 1. Rat_d と rat_d の「良い」コンパクト化を構成せよ。

この問いについて、さまざまな解とその変種がある。

1.1 代数的なコンパクト化

Rat_d の代数的なコンパクト化で代表的なものとして、[10] において導入された

$$\overline{\text{Rat}}_d := \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1, d)))$$

がある。

*u661233h@alumni.osaka-u.ac.jp

2変数 n 次斉次多項式のなすベクトル空間 $V_n := \mathbb{C}[x, y]_n = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$ は、 $G \simeq \mathrm{SL}_2$ の $(n+1)$ 次元単純表現である。 SL_2 同変な同型

$$\overline{\mathrm{Rat}}_d \simeq \mathbb{P}(V_{d+1} \oplus V_{d-1})$$

が存在し、[13] において考察されている。特に、 V_{d+1} の因子である $\mathbb{P}^1$ 上の $(d+1)$ 点は、力学系 $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の固定点に等しい。

他の代数的なモジュライ空間として、[9] において、安定写像のモジュライ空間

$$\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (1, d)) := \{\phi: C \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid C: \text{安定有理曲線}, \deg \phi = (1, d)\}$$

が考察された。

これら代数的なモジュライ空間の商の構成として、幾何学的不変式論 (Geometric Invariant Theory, GIT) による商がある。詳しくは後述するが、 G 作用のある射影多様体 X の GIT 商は G 不変な偏極 $\mathcal{L}$ を与えるごとに定まるので、特に $X = \overline{\mathrm{Rat}}_d \simeq \mathbb{P}^{2d+1}$ は GIT 商を 1 種類しか持たないが、 $X = \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (1, d))$ は偏極 $\mathcal{L}$ ごとに商が異なる。

1.2 幾何的なコンパクト化

力学系に固定点のマーキングを与えることは、 $\mathbb{P}(V_{d+1} \oplus V_{d-1})$ への射影について、その点 $f_+ \in V_{d+1} \simeq \mathbb{C}[x, y]_{d+1}$ の因子分解を与えることに等しい。つまり、固定点のマーキング付きの自己写像のモジュライ空間は

$$\mathrm{MRat}_d = \mathrm{Rat}_d \times_{\mathbb{P}(V_{d+1})} (\mathbb{P}^1)^{d+1}$$

である。この商として固定点マーキング付きの力学系のモジュライ空間 $VM_d := \mathrm{MRat}_d / G$ が定義された。

VM_d のコンパクト化として、[2] において $\overline{VM}_d$ が構成された。 $\overline{VM}_d$ は特異点とマーキング付き有理曲線の各成分に、マークされた点を固定点に持つ力学系を付随させたものをパラメータづけている。これらの力学系付き曲線の収束を幾何学的に考察することによって $\overline{VM}_d$ の位相構造は定義されており、代数幾何的な表式は明らかではない。

本講演で述べたい結果は、この空間の代数性についてであるが、結果としてはまだ不完全である。

Theorem 1.1. 代数多様体の双有理射 $X \rightarrow Y$ で、連続写像として $X \rightarrow \overline{VM}_d \rightarrow Y$ と分解できるものが存在する。また、 X, Y は有限個の GIT 商たちの間の、双有理射によるファイバー積として定まる。

さらに、自然に組み合わせ論的な対象で添え字づけられた有限な分割を持つ代数多様体 Y_d からの射 $Y_d \rightarrow X$ があり、この分割は $X, \overline{VM}_d, Y$ にも分割を誘導する。

2 様々な商

2.1 GIT 商と VGIT

GIT([8]) は、簡約群 G が作用する射影多様体 X の G 作用付きの偏極 (G 線形化) に依存した商と、それが満たす普遍性を与える。 X を G 線形化 $\mathcal{L}$ によって $X = \text{Proj} \bigoplus_n A_n$, $A_n = H^0(X, \mathcal{L}^n)$ と表したとき、座標環を不変式環に取り替えた $Y = \text{Proj} \bigoplus_n A_n^G$ は、 X の $\mathcal{L}$ 半安定領域 $X^{ss}(\mathcal{L})$ と呼ばれる (Zariski) 開集合の、圏論的商と呼ばれる性質を満たすコンパクト商を与える。これを $Y = X^{ss}(\mathcal{L}) // G$, または $Y = X //_{\mathcal{L}} G$ と表す。

偏極を変えたときの $X^{ss}(\mathcal{L})$ の振る舞いは、論文 [1] に倣って VGIT と呼ばれる。 $\text{Amp}^G(X)$ により、 X の豊富直線束で G 不変なものなす錐を表す。

Theorem 2.1. ([1]) $\text{Amp}^G(X)$ を台とした有理多面体錐からなる有限扇 $\mathcal{F}$ で、次の性質を満たすものが存在する。 X の VGIT 扇という。

- (i) 任意の $\mathcal{F}$ の錐 C について、 $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in C^\circ$ ならば $X^{ss}(\mathcal{L}) \simeq X^{ss}(\mathcal{L}')$. すなわち $X //_{\mathcal{L}} G \simeq X //_{\mathcal{L}'} G$ であり、以降これを $X //_C G$ と表す。
- (ii) 任意の $\mathcal{F}$ の錐 C と、 C の面 F について、 $X^{ss}(C) \subset X^{ss}(F)$ であり、包含写像は全射 $X //_C G \rightarrow X //_F G$ を導く。
- (ii) の射を用いて、 $\mathcal{F}(X)$ の連結な部分錐 $\mathcal{F}'$ について、

$$X //_{\mathcal{F}'} G := \varprojlim_{C \in \mathcal{F}'} X //_C G$$

とする。

2.2 Chow 商と PTS 商

X の他の商として、Chow 商がある。まず、射影多様体 X の代数サイクル類 d に対して、そのサイクル類に属するものをパラメータ付ける空間として Chow 多様体 $Ch(X, d)$ が定義される (例えば [6] 参照)。

Definition 2.2. ([5]) 非特異射影多様体 X に簡約群 G が作用しているとす。 X の一般の軌道の閉包 $\overline{G \cdot x}$ が与えるサイクル類を d_G とおく。

$$X^{gen} := \{x \in X \mid [\overline{G \cdot x}] = d_G\}$$

について、埋め込み $X^{gen}/G \ni Gx \mapsto \overline{G \cdot x} \in Ch(X, d_G)$ についての $Ch(X, d_G)$ 上の閉包

$$X //_{Ch} G := \overline{X^{gen}/G}^{Ch(X, d_G)}$$

により定まる射影多様体を X の Chow 商という。ただし $\overline{U}^{Ch(X, d)}$ は Chow スキームにおける閉包を表す。

サイクル類について、その開集合への制限における同値を用いて、位相的に Chow 商の商位相空間を構成する。また、サイクルの多重度を考えない商を PTS 商と呼び、その制限も定める。

Definition 2.3. 簡約群 G 作用を持つ射影多様体 X について、 U を X の G 不変な開部分集合とする。

(i) U の X における制限 Chow 商とは、商空間

$$U \parallel_{X, Ch} G := (X \parallel_{Ch} G) / \sim, \quad Z \sim Z' \stackrel{\text{def}}{\iff} Z|_U = Z'|_U.$$

(ii) U の X における制限 PTS 商とは、商空間

$$U \parallel_{X, PTS} G := (X \parallel_{Ch} G) / \sim, \quad Z \sim Z' \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{supp}(Z)|_U = \text{supp}(Z')|_U.$$

X が明らかなきときは省略する。

構成から、自然な射 $\pi_U : U \parallel_{X, Ch} G \rightarrow U \parallel_{X, PTS} G$ がある。 $X \parallel_{Ch} G$ 上のサイクルが多重度を持たない場合、 π_U は同型である。また、 $V \subset U$ のとき $U \parallel_{X, *} G \rightarrow V \parallel_{X, *} G$ ($*$ は Ch または PTS) も定まる。これらについて、次の結果が知られている：

Theorem 2.4. ([1], [3]) $\pi_X : X \parallel_{Ch} G \rightarrow X \parallel_{PTS} G$ が同型であるとする。このとき、次が成り立つ。

(i) X の VGIT 扇 $\mathcal{F}$ について、 $X \parallel_{Ch} G \simeq X \parallel_{\mathcal{F}} G$ 。

(ii) VGIT 扇 $\mathcal{F}$ の最大次元の錐 C について、

$$X \parallel_C G \simeq X^{ss}(C) \parallel_{X, PTS} G.$$

(iii) VGIT 扇 $\mathcal{F}$ の、台が最大次元の開部分錐であるような部分扇 $\mathcal{F}'$ について、

$$X^{ss}(\mathcal{F}') := \bigcup_{C \in \mathcal{F}'} X^{ss}(C) \text{ とおくと、} X \parallel_{\mathcal{F}'} G \simeq X^{ss}(\mathcal{F}') \parallel_{X, PTS} G.$$

(iv) 任意の $x(t) \in X^{gen}(\mathbb{C}((t)))$ について、

$$X \parallel_{PTS} G \ni \lim_{t \rightarrow 0} (\text{supp } \overline{G \cdot x(t)}) = \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) \cdot x(t) \mid \exists \gamma(t) \in G(\mathbb{C}((t))) \right\}.$$

Remark 2.5. PTS は perturbing-translating-specializing の略であり、Theorem 2.4 (iv) の主張の、特に $X \parallel_{Ch} G$ の境界成分における場合に当たる

「 $Z \in X \parallel_{PTS} G$ について、 $x_0 \in \text{supp } Z$ で $\dim G \cdot x_0$ が極大なものを取り、 x_0 の一般軌道への適切な摂動

$$x(t) \in X^{gen}(\mathbb{C}((t))) \subset X(\mathbb{C}((t))) = X(\mathbb{C}[[t]]), \quad x(0) = x_0$$

を取ると、任意の $y \in Z$ はその (摂動パラメータ t に依存した) 変換 $\gamma(t) \cdot x(t)$ を $t \rightarrow 0$ に特殊化したものである」という操作から名づけられている。

2.3 $\overline{VM}_d$ の場合

固定点の番号付けが因子分解 $(\mathbb{P}(V_1))^{d+1} \rightarrow \mathbb{P}(V_{d+1})$ を与えることと対応することに注意して、 MRat_d のコンパクト化として

$$\begin{aligned} \overline{\text{MRat}}_d &:= \left\{ (h_1, \dots, h_{d+1}, [f_+, f_-]) \left| \prod_i h_i \text{ は } f_+ \text{ を割り切る} \right. \right\} \\ &\subset (\mathbb{P}(V_1))^{d+1} \times \mathbb{P}(V_{d+1} \oplus V_{d-1}) \end{aligned}$$

を取る。 $\mathbb{P}(V_{d+1} \oplus V_{d-1}) \simeq \overline{\text{Rat}}_d$ により、 $[f_+, f_-]$ は力学系 $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\varphi([x: y]) = [f(x, y): g(x, y)]$ に対応するとする。 f と g に共通因子がある場合は、それで割ったものを特に $\overline{\varphi}$ で表す。

$\overline{VM}_d$ は、各点が有理曲線上のマーキング付き力学系の有限族 $\{(P_{j,i}; \varphi_j)\}_j$ からなっている。力学系の $(P_{i,t}; \varphi_t) \in \text{MRat}_d^{\text{gen}}(\mathbb{C}((t)))$ が $t \rightarrow 0$ で

$$\left\{ (Q_i; \psi) \left| \exists (\gamma_t)_t: \gamma_t \in G, \overline{\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_t \cdot \varphi_t} = \psi \neq \text{id}_{\mathbb{P}^1}, \lim_{t \rightarrow 0} P_{i,t} = Q_i \right. \right\}$$

に収束する、という構成によって境界成分の幾何的構造が与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} U &:= \{(h_1, \dots, h_{d+1}; [f_+, f_-]) \in \overline{\text{MRat}}_d \mid \overline{\varphi} \neq \text{id}\} \\ &= \{(h_1, \dots, h_{d+1}; [f_+, f_-]) \in \overline{\text{MRat}}_d \mid f_+ \neq 0\} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\overline{VM}_d \simeq U //_{PTS, \overline{\text{MRat}}_d} G$$

である。

ここで、定理にある双有理射 $X \rightarrow \overline{VM}_d \rightarrow Y$ の構成として、

$$M := \overline{\text{MRat}}_d \xrightarrow{\text{open}} U \xrightarrow{\text{open}} V := M^{ss}(\exists \mathcal{F}')$$

と取って、その PTS 商を取ればいい、と見えるが、 $\overline{\text{MRat}}_d$ の Chow 商は多重サイクルを含むため、 $\overline{\text{MRat}}_d$ に対して直接は定理 2.4 の内容は使えない。

これを回避するために、 f_- の方にもマーキングを付ける。記法を簡単にするために、一般の $\mathbb{P}(V_m \oplus V_n)$ に対して類似の空間を考える。

$$\begin{aligned} X_{m,n} &:= \left\{ [h_i; h'_j; (f_m, f_n)] \left| \prod_i h_i \text{ は } f_m \text{ を、} \prod_j h'_j \text{ は } f_n \text{ を割り切る} \right. \right\} \\ &\subset (\mathbb{P}(V_1))^m \times (\mathbb{P}(V_1))^n \times \mathbb{P}(V_m \oplus V_n) \end{aligned}$$

とする。 $(m, n) = (d+1, d-1)$ のときが今考えている場合だった。 $X_d := X_{d+1, d-1}$ とする。 X_d の点を $(h_i; h'_j; [f_+, f_-])$ で表す。

X_d には h'_j の入れ替えによる $\mathfrak{S}_{d-1}$ 作用を持つ。この作用についての商は X_d 上の $f_- = 0$ の領域を除いて $\overline{\text{MRat}}_d$ に同型である。

したがって、 X_d について

$$X_d \setminus (\{f_+ = 0\} \cup \{f_- = 0\}) \supset X_d^{ss}(\mathcal{F}')$$

となる VGIT 扇の部分扇 $\mathcal{F}'$ を取り、その $\mathfrak{S}_{d-1}$ による商を取ることで Y を構成できる。

3 木による領域分割

3.1 系統樹

PTS 商の構成の上で、群 $G(\mathbb{C}((t)))$ の作用と、その収束が表れる。このような非アルキメデス体上の線形簡約群とその作用を理解する方法として、古典的には Bruhat-Tits 理論 ([4]) があり、Berkovich 空間という形で整理されたものが数論力学系ではよく用いられる ([11])。

しかし、今回は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}((t)))$ の作用を扱うだけなので、簡単な系統樹モデル ([12], [7]) を導入する。Berkovich 射影直線から見ると、type I, II, III の点のみを見るモデルになっている。

Definition 3.1. $\mathbb{C}((t))$ の系統樹 T とは、位相空間

$$T := ([-\infty, \infty] \times \mathbb{C}((t))) / \sim, \\ (f, r) \sim (g, s) : \iff s = r, f - g \in O(t^r).$$

ただし、 $[-\infty, \infty]$ は拡張実数に通常の位相を入れたもの、 $\mathbb{C}((t))$ は離散位相、 O はランダウの O 記号。 T 上の点 (f, r) を $f + O(t^r)$ で表す。

通常の射影直線 $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{C}((t))$ 点、すなわち $\mathbb{C}((t)) \sqcup \{\infty\}$ は $\mathbb{C}((t)) \ni f \mapsto f + O(t^\infty)$, $\infty \mapsto O(t^{-\infty})$ によって T の「端点」へと埋め込まれる。

$\mathbb{C}((t)) \cup \{\infty\}$ の有限部分集合 S に対して、 S を含む最小の T の連結部分空間を S の系統樹と呼び、 T_S で表す。 T_S は有限個の線分を端点で貼り合わせた、閉路を持たないグラフ ($\mathbb{R}$ -tree) になる (例として、図 3.1)。 T_S のうち、直線が 3 本以上集まっている点を T_S の節という。

3.2 等高線付き木

X_d の、軌道閉包が一般のコホモロジー類を与える点からなる開集合

$$X_d^{gen} := \{(h_i; h'_j; [f_+, f_-]) \in X_d \mid \#\{h_i, h'_j\} = 2d, f_+ \neq 0, f_- \neq 0\}$$

について、その $\mathbb{C}((t))$ 点 $x(t) = (h_i(t); h'_j(t); [f_+(t) : f_-(t)])$ の $t \rightarrow 0$ 極限として与えられる極大次元の軌道は、主に木 T_H , $H := \{h_i(t), h'_j(t)\}$ の節からなる。すなわち、 T_H と、その上の $f_+ = 0, f_- = 0$ を表すための情報から

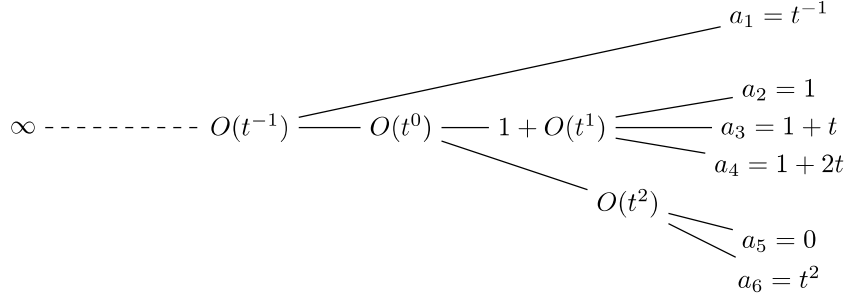


図 3.1: $S = \{t^{-1}, 1, 1+t, 1+2t, 0, t^2\}$ の T_S の図。破線は含まない。
節は $O(t^0)$, $1 + O(t^1)$, $O(t^2)$ の 3 点。

マーキング付き力学系の有限族が、節に対応する $\gamma(t)$ についての極限を取ることで与えられる。ここで、極限を与えるために必要なのが $f_+ = 0, f_- = 0$ を表すための情報だが、これは木の上の「等高線」として、 T_H の節に対応する頂点のみを持つグラフに対応付けることができる。

Definition 3.2. 等高線付き木とは、次のような条件を満たすグラフ $G = (V, E)$ と、マーキング $\partial : A \sqcup B \rightarrow V$ と、 $\sigma : V \rightarrow \{+, 0, -\}$ の組 (G, ∂, σ) である。

- G は木グラフ、すなわち回路、多重辺、ループを持たない連結グラフ。
- 任意の頂点 $v \in V$ について、 $\#\partial^{-1}(v) + \deg v \geq 3$.
- $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ で、次を満たすものが存在する。
 - $\sigma = \text{sgn} \circ f$.
 - G の各辺 e について、次が成り立つ: G を辺 $e = [v_1, v_2]$ において分割して、 v_i を含む連結成分の頂点集合を G_i とおく。このとき、 $w(G_i) := \#(\partial^{-1}(G_i) \cap A) - \#(\partial^{-1}(G_i) \cap B)$ について

$$w(G_1) < w(G_2) \iff f(v_1) < f(v_2).$$

特に、 $\#A = m$, $\#B = n$ のとき、等高線付き (m, n) 木という。

Proposition 3.3. $X_{m,n} //_{Ch} G$ の点は、 $X_{m,n}^{gen}(\mathbb{C}((t)))$ 上の摂動が与える系統樹と、その上の適切なウェイト付けによって、等高線付き (m, n) 木に対応付けることができる。これが $X_{m,n} //_{Ch} G$ の領域分割を与える。

$(m, n) = (d+1, d-1)$ が今回の場合である。

$X_d //_{PTS} G$ の対応する部分サイクルが $U \times_{\overline{\text{MRat}}_d} X_d$ や $X_d^{ss}(\mathcal{F}')$ 上に入るかどうかについても、この木の構造や等高線に関する情報のみを用いて記述することができる。また、 $\mathfrak{S}_{d-1}$ 作用はこの木のマーキングの付け替えを誘

導することも明らか。これらの事実から、 $X \rightarrow \overline{VM}_d \rightarrow Y$ の組み合わせ論的な分割を与えられる。

謝辞

今回は城崎代数幾何学シンポジウムという歴史あるシンポジウムにお招きいただいたこと、誠にありがとうございます。講演において説明をもたついで長引かせたこと、またこの講義録についても大変遅くなりまして、運営の先生方には大変ご迷惑をおかけいたしました。申し訳ございませんでした。

この講演における問いの主題となっている空間 $\overline{VM}_d$ については、奥山先生にお問い合わせ頂いたのが最初でした。実りある議論のきっかけをいただいたこと、大変感謝しております。ありがとうございます。また、講演をお聞きくださったこと、コメントを下さったことに関しまして、この場をお借りして重ねて感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Igor V. Dolgachev and Yi Hu. Variation of geometric invariant theory quotients. (With an appendix: “An example of a thick wall” by Nicolas Ressayre). *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 87:5–56, 1998.
- [2] Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi. Rational functions with nodes. *Journal of Analysis*, (21):85–100, 2013.
- [3] Yi Hu. Topological aspects of Chow quotients. *J. Differ. Geom.*, 69(3):399–440, 2005.
- [4] Tasho Kaletha and Gopal Prasad. *Bruhat-Tits theory. A new approach*, volume 44 of *New Math. Monogr.* Cambridge: Cambridge University Press, 2023.
- [5] M. M. Kapranov. Chow quotients of Grassmannians. I. In *I. M. Gelfand seminar. Part 2: Papers of the Gelfand seminar in functional analysis held at Moscow University, Russia, September 1993*, pages 29–110. Providence, RI: American Mathematical Society, 1993.
- [6] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge.* Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [7] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015.

- [8] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [9] Johannes Schmitt. A compactification of the moduli space of self-maps of $\mathbb{CP}^1$ via stable maps. *Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society*, 21(11):273–318, 2017.
- [10] Joseph H Silverman. The space of rational maps on $\mathbb{P}^1$. *Duke mathematical journal*, 94:41–77, 1998.
- [11] Joseph H Silverman. The arithmetic of dynamical systems. *Graduate Texts in Mathematics*, 241, 2007.
- [12] David Speyer and Bernd Sturmfels. The tropical Grassmannian. *Adv. Geom.*, 4(3):389–411, 2004.
- [13] Lloyd William West. *The moduli space of rational maps*. PhD thesis, City University of New York, 2015.