MINIMAL RESULTANT LOCUS AND ITS MODULI THEORETIC CHARACTERIZATION IN NON-ARCHIMEDEAN DYNAMICS

YÛSUKE OKUYAMA（奥山裕介）

1. 序

多様体（variety）上の力学系の族の退化および力学系たちのモヂュライのコンパクト化の研究の一つの方法として、$\mathbb{R}$ 樹や建物（building）といった区分的アフィン構造をもつ空間における区分的アフィンな力学系たちを、必要であれば適当な還元操作と併せて、仲間に組み込むことがある。このような考え方を自然に実行する枠組みとして、最近、（特に）完備、代数閉、非自明かつ非アルキメデス的体上の Berkovich 空間の理論 [3] の普遍性と有用性が明らかになってきている。最近の成功例としては、複素射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 上の次数 > 1 の一変数有理関数の力学系の標準平衡測度の有理型退化極限の存在の確立を挙げておく [5, 13][1]：この場合、複素力学系の有理型族自身が、Laurent 級数体 $\mathbb{C}((t))$ 上の Berkovich 射影直線に付随する双曲空間（$\mathbb{R}$ 樹）に区分的アフィンに作用しており、標準平衡測度の退化極限は Berkovich 射影直線上の対応する非アルキメデス的標準平衡測度の（Gauss 点に関する）還元に一致する。

Example 1.1 (複素力学系の有理型族とその（非）退化). 複素パラメーター t に（係数が）有理型に依存する 2 次多項式族

(i) $z^2 + t$
(ii) $z^2 + t^{-1}$
(iii) $tz^2 + 1$
(iv) $tz^2 + z + 1$

を、$t \to 0$ のときに見てみると、

- (i) は $\mathbb{P}^1$ 全体で一様に（2 次有理関数）z^2 に収束している（非退化）一方、
- (ii), (iii), (iv) はそれぞれ（次数 < 2 の有理関数）$\infty, 1, z+1$ に、$\mathbb{C}$ 上広義一様収束している（退化。いずれも、$\{\infty\}$ は収束に関して抜くべき「穴」として、埋めることはできない）。

$\mathbb{P}^1$ 上の力学系（反復合成）としては、例えば（$\mathbb{P}^1$ の）t 倍写像による共役は許すのが自然であるが、その場合 (iii) と (iv) はそれぞれ（(たまたま t に依存しない) 2 次有理関数）$z^2, z^2 + z$ と共役となる（とくに $t \to 0$ のとき非退化）。

実のところ、上の例での $t \to 0$ のときの各極限は、次数 d の有理関数 $f(z) \in \mathbb{C}((t))(z)$ を、f を互いに素な $\mathbb{C}((t))$ 係数多項式の比で表した時の $2d+2$ 個の係数（$\mathbb{C}((t))$ の元）たちの連比と同一視して $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C}((t)))$ の元とみなしたとき、冪級数環 $\mathbb{C}[[t]]$ の極大イデアル $t\mathbb{C}[[t]]$ を法とする、$f(z)$ の還元の被約化 $\tilde{f}$ と同じである。

Question 1.2 (計算代数幾何学から). $\tilde{f}$ が f と同じ次数を持つような、つまり、(上の例と同じような意味での) 極限 $\lim_{t\to 0} f$ が退化しないような、f の $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}((t)))$ 共役たちを決定するアルゴリズムはあるか？

[1]高次元力学系においても混成（hybrid）空間 [4] の枠組みでやや弱いが同様の退化極限が得られている [7]。

Rumely は [14] において、冒頭のような非アルキメデス的体 K（例えば $\mathbb{C}((t))$ の代数閉包の t 進完備化 $\mathbb{L}$）上の（次数 >1 の）有理関数 $f(z)\in K(z)$ に対し Berkovich 射影直線上の区分的アフィン（かつ固有かつ凸）関数である「終結式関数」ordRes_f を導入し上の問題を解決し（実際、終結式関数の最小部分（minimizer）$\mathrm{MinResLoc}_f$ を決定すれば良いことが分かる）、続く [15] において $\mathrm{MinResLoc}_f$ のモヂュライ理論的側面を明らかにした。

講演では講演者による Rumely 理論の（Berkovich）双曲幾何的精密化 [12]、および上記還元概念の内在化 [11] について、Berkovich 射影直線に関する必要事項と併せて解説した。

Convention. 以下、$(K,|\cdot|)$ は、完備、代数閉、非自明かつ非アルキメデス的体とする。K がいわゆる球面的完備でない場合（例えば p 進複素数体 $\mathbb{C}_p$）は注意深く取り扱われてきたが、本校の記述では結局その必要はなくなるため、初めから K の球面的完備性を云々しない。

$K^\circ, K^{\circ\circ}$ は、それぞれ K 整数環 $\mathcal{O}_K=\{z\in K:|z|\le 1\}$ とその一意極大イデアル $\{|z|<1\}$ を表す。剰余体 $\tilde{K}=K^\circ/K^{\circ\circ}$ を、K の剰余体と呼ぶ。

Example 1.3. 一般には $\tilde{K}$ は考えにくい（かも知れない）が、K が上述の Levi-Civita 体 $\mathbb{L}$ の場合には、剰余体 $\widetilde{\mathbb{L}}$ は $\mathbb{L}$ 自身の部分体 $\mathbb{C}$ とみなせてわりと考えやすい。

2. Berkovich 射影直線

標準的教科書、サーベイとして [1, 2, 8] を挙げておく。Banach 環 $(A,\|\cdot\|)$ とは、下乗法的（submultiplicative）なノルム $\|\cdot\|$ が備わった非自明環 A であって、ノルム空間として完備であるものとする。このとき A の乗法的スペクトラムを

$$\mathcal{M}(A):=\{|\cdot|:A\text{ の乗法的半ノルムであって }|\cdot|\le\|\cdot\|\}$$

と定めて、各点収束位相を備える。$\mathcal{M}(A)$ は $\emptyset$ でなく、コンパクトなハウスドルフ空間となる。よく知られた例として $(\mathbb{Z},|\cdot|_\infty)$ がある：$|\cdot|_\infty$ はユークリッドノルムを表す。この場合、

$$\mathcal{M}(\mathbb{Z})\cong\big(((\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})\setminus\{0\})\times[0,+\infty]\big)\cup(\{\infty\}\times[0,1]),$$

実際 $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ は（右辺に樹の弱位相を備えれば位相的にも）樹とみなせる。

次に、非アルキメデス的体 K の（非自明とは限らない）閉円板とは K の次のように書ける部分集合とする：

$$B(a,r):=\{z\in K:|z-a|\le r\},\quad a\in K, r\ge 0.$$

K の値群 $|K^\times|$ の元 $R>0$ に対し、一般化された Tate 代数とは、

$$K\langle R^{-1}T\rangle:=\left\{\phi(T)=\sum_{i=0}^{\infty}c_jT^j\in K[[T]]:\lim_{j\to\infty}|c_j|R^j=0(\Leftrightarrow\phi\text{ は }B(0,R)\text{ 上収束})\right\}$$

に上限ノルム

$$|\phi|_{B(0,R)}:=\sup_{B(0,R)}|\phi|=\max_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}|c_j|R^j$$

（K は非アルキメデス的なので乗法的となる）を備えた、Banach 環 $(K\langle R^{-1}T\rangle,|\cdot|_{B(0,R)})$ のこととする。上の convention の下で次がわかる。

Fact 2.1. $\mathcal{M}(K\langle R^{-1}T\rangle)=\{|\cdot|_{B(a,r)}:a\in B(0,R),\,0\le r\le R\}$, ただし $|\phi|_{Ba,r}:=\sup_{B(a,r)}|\phi|$ は $\phi\in K\langle R^{-1}T\rangle$ の、$B(0,R)$ の部分閉円板 $B(a,r)$ 上での上限セミノルム（Kernel が非自明 $\Leftrightarrow r=0$）である。特に閉円板 $B(0,R)$ 自身は $\mathcal{M}(K\langle R^{-1}T\rangle)$ に自然に埋め込まれる。

位相空間として、K 上の Berkovich 射影直線 P^1 は、樹（とくにコンパクトハウスドルフ空間）の逆系 $(\mathcal{M}(K\langle R^{-1}T\rangle))_{R\in|K^\times|}$ の極限として定まる。実際には、（古典）射影直線 $\mathbb{P}^1=\mathbb{P}^1(K)=K\sqcup\{\infty\}$ に、それを Gromov 境界に持つように適当に $\mathbb{R}$ 樹（Berkovich 双曲空間と呼ばれる）$\mathsf{H}^1=\mathsf{H}^1_K=\mathsf{P}^1\setminus\mathbb{P}^1$ を取り付けたものとなっている：H^1 の双曲計量は

$$\rho(\xi_{a,r},\xi_{b,s})=2\log\max\{|a-b|,r,s\}-\log r-\log s$$

により定まる（$\mathbb{R}$ 樹については例えば [1, Appendix B] を参照）。

P^1 の各点 ξ における接空間（または方向空間）$T_\xi\mathsf{P}^1$ とは、ξ を端点とする P^1 の非自明な単射曲線（もしくは ξ と $\xi'\in\mathsf{P}^1\setminus\{\xi\}$ をつなぐ閉区間 $[\xi,\xi']$）の芽全体とし、その各元 $\boldsymbol{v}$ を ξ における P^1 の方向とよぶ（$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{\xi\xi'}$ とも表す）：接空間 $T_\xi\mathsf{P}^1$ は、$\mathsf{P}^1\setminus\{\xi\}$ の連結成分全体と一対一に対応し、方向 $\boldsymbol{v}$ に対応する成分を $U(\boldsymbol{v})$ とも書く。非定数有理関数 $f(z)\in K(z)$ の $\mathbb{P}^1$ への古典的作用は、P^1 の連続、開、上への $(\deg f)$ 対 1 の自己写像へと拡張し、さらに H^1 を保つ。P^1 の閉区間 $[\xi,\xi']$ は、適当に細分すれば、f は小区間毎に、（その内部で）双曲計量 ρ をある自然数定数倍する写像となることも分かる。特に P^1 の点 ξ に対し、f は接写像

$$(f_*)_\xi: T_\xi\mathsf{P}^1\to T_{f(\xi)}\mathsf{P}^1,\quad \overrightarrow{\xi\xi'}\mapsto\overrightarrow{f(\xi)f(\xi')}$$

（$\xi'\in\mathsf{P}^1\setminus\{\xi\}$ は ξ に十分近くとる）を誘導し、それは次の意味で（f の ξ での局所次数）$(\deg_\xi f)$ 対 1 である：

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in T_\xi\mathsf{P}^1:\, f_*\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}} m_{\boldsymbol{v}}(f)=\deg_\xi f,\quad \xi\in\mathsf{P}^1,\boldsymbol{w}\in T_{f(\xi)}\mathsf{P}^1, \tag{2.1}$$

ここで各 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{\xi\xi'}\in T_\xi\mathsf{P}^1$, 制限 $f:[\xi,\xi']\to[f(\xi),f(\xi')]$ は双曲計量 ρ を $m_{\boldsymbol{v}}(f)$ 倍している（$m_{\boldsymbol{v}}(f)$ を f の $\boldsymbol{v}$ に関する方向次数という）。最後に、f の局所次数関数 $\deg_\cdot f$ については、次の特徴づけがある：P^1 の領域 V と $f^{-1}(V)$ の連結成分 U に対し、V 上の関数

$$\xi\mapsto\sum_{\xi'\in U\cap f^{-1}(\xi)}\deg_{\xi'} f$$

は定値となる。

3. 内在的還元と内在的深さ

非定数有理関数 $f(z)\in K(z)$ の、$K^{\circ\circ}$ を法とする係数還元 $\hat{f}\in\mathbb{P}^{2(\deg f)+1}(\tilde{K})$ およびその被約化 $\tilde{f}(\zeta)\in\tilde{K}(\zeta)$（次数 $\le\deg f$）を f の $\mathrm{PGL}(2,K)$ 共役を許して行うこと、を内在化する概念として以下が考えられる。

Definition 3.1 (内在的還元)**.** $\mathsf{P}^1=\mathsf{P}^1_K$ の点 ζ に関する、f の内在的還元を、$T_\xi\mathsf{P}^1$ の自己写像として

$$\tilde{f}_\xi\begin{cases}:=(f_*)_\xi & \text{if } f(\xi)=\xi,\\ :\equiv\overrightarrow{\xi(f(\xi))} & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定める。

上で、$\xi=\xi_g:=\xi_{B(0,1)}$（P^1 の Gauss 点）の場合には、$T_{\xi_g}\mathsf{P}^1$ と $\mathbb{P}^1(\tilde{K})=\tilde{K}\sqcup\{\tilde{\infty}\}$ との標準的同一視

$$\overrightarrow{\xi_g a}\leftrightarrow\tilde{a}=a+K^{\circ\circ},\quad a\in\mathcal{O}_K=B(0,1),\quad \text{および}\quad \overrightarrow{\xi_g\infty}\leftrightarrow\tilde{\infty}$$

を通じて、ξ_g における f の内在的還元 $\tilde{f}_{\xi_g}$ と f の $K^{\circ\circ}$ を法とする係数還元の被約化 $\tilde{f}$ が本質的に同じものであることが分かる。しかしながら、上の定義のポイントは還元概念を一旦通常の代数的還元操作から切り離せることにある。

さて、$\deg \tilde{f}_\xi < \deg f$ のとき、f は点 ξ において内在的に退化するという。内在的非退化性の障害は次で測られる。以下 P^1 の点 ξ における Dirac 測度 δ_ξ の f による引き戻しは、逆像 $f^{-1}(\xi)$ の各点を局所次数 $\deg_\xi f$ を考慮に入れて数える測度である（特に total$= \deg f$）。

Definition 3.2 (内在的深さ)**.** P^1 の点 ξ における f の内在的還元 $\tilde{f}_\xi$ に対する内在的深さ関数を以下で定める：

$$\mathrm{depth}_{\boldsymbol{v}}\, \tilde{f}_\xi := (f^*\delta_\xi)(U(\boldsymbol{v})), \quad \boldsymbol{v} \in T_\xi \mathsf{P}^1.$$

特に、

$$\sum_{\boldsymbol{v} \in T_\xi \mathsf{P}^1} \mathrm{depth}_{\boldsymbol{v}}\, \tilde{f}_\xi = \deg f - \deg_\xi f. \tag{3.1}$$

やはり $\xi = \xi_g$ の場合には、上の内在的深さ関数は f の $K^{\circ\circ}$ を法とする係数還元 $\hat{f}$ から代数的に定まるものと本質的に同じであることが示せる（[6, 9]）が、上の定義のポイントも深さ概念を一旦通常の代数操作から切り離せることにある。以下の写像性質が基本的となる。

Proposition 3.3 ([6, Proposition 3.10])**.** P^1 の点 ξ, ξ' と、ξ における方向 $\boldsymbol{v} \in T_\xi \mathsf{P}^1$ に対し、

$$(f^*\delta_{\xi'})(U(\boldsymbol{v})) = \mathrm{depth}_{\boldsymbol{v}}\, \tilde{f}_\xi + \begin{cases} m_{\boldsymbol{v}} f & \text{if } \xi' \in U(f_* \boldsymbol{v}), \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases} \tag{3.2}$$

特に、$f(U(\boldsymbol{v}))$ は、P^1 全体でなければ、$U(f_*\boldsymbol{v})$ に等しい。

講演では双曲空間 H^1 上の区分的アフィン（かつ固有かつ凸）関数である Rumely の終結式関数 ordRes_f, 従って双曲的終結式関数 hypRes_f[2], の各点での各方向に関する傾きが上述の内在的深さを用いて簡明に書かれること（還元理論的傾き公式）、およびそれら関数の最小部分（minimizer）$\mathrm{MinResLoc}_f$ が f の潜在的 GIT 半安定還元部分に一致することの直接証明についても述べた。これらの詳細については [11] を参照のこと。[11] では冒頭で例示した、複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の次数 > 1 の一変数有理関数の有理型退化する族に対する標準平衡測度族の $\mathbb{P}^1$ 上での弱極限の存在の直接証明についても取り扱われている。

Acknowledgement. 世話人の方々には、伝統ある城崎代数幾何学シンポジウム 2024 におきましてこの度このような話題で講演させて頂く機会を頂けましたこと、および代数幾何学の研究者の皆様と研究交流する機会を頂けましたことに深く感謝申し上げます。

References

[1] Matthew Baker and Robert Rumely. *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, volume 159 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[2] Robert L. Benedetto. *Dynamics in one non-archimedean variable*, volume 198 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.

[3] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[2] この関数は [12] では $\mathrm{Crucial}_f$, [10] では hypRes_f と書かれている。前者は Rumely による関連する用語に寄せている。

[4] Sébastien Boucksom and Mattias Jonsson. Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms. *J. Éc. polytech. Math.*, 4:87–139, 2017.
[5] Laura DeMarco and Xander Faber. Degenerations of complex dynamical systems. *Forum Math. Sigma*, 2:e6, 36, 2014.
[6] Xander Faber. Topology and geometry of the berkovich ramification locus for rational functions, i. *Manuscripta Mathematica*, 142(3-4):439–474, 2013.
[7] Charles Favre. Degeneration of endomorphisms of the complex projective space in the hybrid space. *J. Inst. Math. Jussieu*, 19(4):1141–1183, 2020.
[8] Mattias Jonsson. Dynamics of Berkovich spaces in low dimensions. In *Berkovich spaces and applications*, volume 2119 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 205–366. Springer, Cham, 2015.
[9] Jan Kiwi and Hongming Nie. Indeterminacy loci of iterate maps in moduli space. *Indiana Univ. Math. J.*, 72(3):969–1026, 2023.
[10] Hongming Nie and Yûsuke Okuyama. Crucial curvatures and minimal resultant loci for non-archimedean polynomials. *arXiv e-prints*, page arXiv:2005.05804, 2020.
[11] Yûsuke Okuyama. The intrinsic reductions and the intrinsic depths in non-archimedean dynamics. page arXiv:2408.04415, 2024.
[12] Yûsuke Okuyama. Geometric formulas on Rumely's weight function and crucial measure in non-archimedean dynamics. *Mathematische Annalen*, 376(3-4):913–956, 2020.
[13] Yûsuke Okuyama. On a degenerating limit theorem of DeMarco-Faber. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 60(1):71–107, 2024.
[14] Robert Rumely. The minimal resultant locus. *Acta Arith.*, 169(3):251–290, 2015.
[15] Robert Rumely. A new equivariant in nonarchimedean dynamics. *Algebra Number Theory*, 11(4):841–884, 2017.

Division of Mathematics, Kyoto Institute of Technology, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585 JAPAN

E-mail address: okuyama@kit.ac.jp