

A geometric interpretation of Krull dimensions of T -algebras

T 代数のクルル次元の幾何学的解釈

宋珠愛*

2024 年 12 月 24 日

本稿は、2024 年 10 月 22 日から 25 日まで京都大学理学研究科セミナーハウスにて開催された「城崎代数幾何学シンポジウム 2024」で筆者が行った同英題の講演の報告である。本稿の内容は中島康仁氏との共同研究 [7] に基づく。

1 背景

表題の T は**トロピカル半体** ($R \cup \{-\infty\}, \oplus := \max, \odot := +$) を表す。本稿の内容はこのトロピカル半体 T (あるいはより一般に、(加法的べき等) 半環) 上の代数幾何学である**トロピカル幾何学**に属する。トロピカル幾何学はここ二十年ほどで発展してきた分野であり、特にその代数的基礎付けを与えようという研究は十年ほど前から進められている。本稿の目的はこのような代数的基礎付けを進める為、クルル次元に着目し、その幾何学的解釈を与えることである。より具体的には、次のよく知られた古典的事実のトロピカル類似を与えることである：

定理 1.1 ([3, Chapter I, Proposition 1.7]). X を代数閉体上のアフィン代数多様体とし、 $A(X)$ を X の座標環とする。このとき、 $A(X)$ のクルル次元は X の位相空間としての次元に等しい。

古典的な代数幾何学とトロピカル幾何学とは密接な関係があり、前者の対象物を後者の対象物に移す操作一般のことを**トロピカル化**という。また、トロピカル化の像として得られた対象物も、元の対象物のトロピカル化という。この意味で、トロピカル幾何学の幾何学的対象物である**トロピカル多様体**は、代数多様体のトロピカル化である。トロピカル多様体の構造定理 ([11, Theorem 3.3.5]) により、トロピカル多様体は豊かな構造を持つ R 有理多面体的複体の台になることが知られている。ここで、 **R 有理多面体的複体**とは有限個の R 有理多面集合から成る複体であり、 **R 有理多面集合**とは定数項以外の項の係数が有理数から成る一次不等式の有限個の共通解集合として表せる集合をいう。トロピカル多様体の持つ豊かな構造により、トロピカル多様体は R

* 京都大学理学研究科, song.juae.8m@kyoto-u.ac.jp

有理多面集合の有限個の和集合であるが、逆は成り立たないことが分かる。本稿ではトロピカル多様体とは限らず、一般の $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合を扱う。このような集合 V には多面体的複体の構造が入り、その次元 $\dim V$ が幾何的直感の通りに定まる。また、この次元は多面体的複体の構造の取り方に依らない。例えば [13] を見よ。

例 1.2. 整数成分のみから成る法線ベクトルを持つ $\mathbf{R}^n$ の閉半空間は $\mathbf{R}$ 有理多面集合である。 $\mathbf{R}$ 有理多面集合は、その定義から、このような閉半空間の有限個の共通部分である。整数成分のみから成る方向ベクトルを持つ半直線や任意の一点も $\mathbf{R}$ 有理多面集合である。本稿で扱う $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合は連結であることを要求しないので、このような $\mathbf{R}$ 有理多面集合を好き勝手に有限個持ってきて和集合を取ればよい。

“ $\mathbf{R}$ 有理”という表現は [11] に倣っている。他に“整アファイン”という表現も同様の意味で使われる。これは「アファイン関数を一次式で書き下すとき、一次の項の係数部分が整数である」という意味である。

トロピカル幾何学の入門書に [11] およびこの日本語訳書 [12] がある。他にも、トロピカル幾何学の様々な話題について入門的な講義を行ったオンラインスクール “Algebraic and Tropical Online Meetings (ATOM)” (2020) の動画が <https://www.youtube.com/@atom5820> にある。さらに、3 章で扱う抽象トロピカル曲線について筆者がまとめたノートが筆者の HP (<https://sites.google.com/site/songjuaeshomepage/%E3%83%9B%E3%83%BC%E3%83%A0?authuser=0>) にて公開されている。これらおよびその参考文献を辿って、沢山の方々がトロピカル幾何学に親しんでいただければ幸いである。

2 準備

主結果を述べるにあたって必要最小限の準備を本章にて行う。

S を空でない集合とする。 S が **(可換) 半環** であるとは、 S が二つの二項演算 $+, \cdot$ を持ち、次の四条件を満たすことである：(R1) $(S, +)$ は単位元 0_S を持つ可換モノイドである、(R2) $(S, \cdot)$ は単位元 1_S を持つ可換モノイドである、(R3) $(S, +, \cdot)$ は分配法則、すなわち、「 $a, b, c \in S \implies a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ 」を満たす、(R4) 0_S は吸収的零である、すなわち、「 $a \in S \implies a \cdot 0_S = 0_S$ 」を満たす。

S を半環とする。 S が **半体** であるとは、 S が次の二条件を満たすことである：(F1) $0_S \neq 1_S$, (F2) S の任意の非零元は乗法 $\cdot$ に関し可逆である、すなわち、「 $a \in S \setminus \{0_S\} \implies \exists b \in S : a \cdot b = 1_S$ 」を満たす。トロピカル半体 T が半体であることが確かめられる。 $0_T = -\infty$ かつ $1_T = 0 \in \mathbf{R}$ である。 B を $(\{0, -\infty\}, \oplus, \odot)$ とすれば、これは T の部分半体を成す。この半体 B を **ブール半体** という。写像 $T \rightarrow B; -\infty \neq t \mapsto 0; -\infty \mapsto -\infty$ が (明らかに単射でない) 半環準同型写像であることが簡単に確かめられる。これにより、半体は体とは大分異なる代数構造を持つことが推察されるだろう (体から非零な環への環準同型写像は単射であることを思い出せ)。後ほどさらに半体の代数構造が体のそれとは大きく異なる実例を述べる。

半環や半体の上に代数幾何学を構築しようとするとき、古典的な代数幾何学を鑑みて、イデアルに着目しようとするのは自然である。事実、そのような方向性の研究がないわけではない。しかし、実は半環や半体の上ではイデアルはあまり上手く働かない。そもそも環におけるイデアルが「環上の同値関係を定め、かつ剰余集合が自然な演算により環になる」という条件により特徴付けられたことを思い出せば、半環のイデアルがこの条件を満たさないことだけ見れば十分にそれは推察されるだろう。実際、半環において上記「」内の条件により特徴付けられる概念は合同である。次の二つの段落で合同について紹介しよう。

S を再び半環とする。 $S^2 = S \times S$ の部分集合 C が S 上の**合同**であるとは、 C が S 上の同値関係を定め、かつ S^2 の部分半環であることである、すなわち、 C が次の五条件を満たすことである：(C1)「 $a \in S \implies (a, a) \in C$ 」を満たす、(C2)「 $(a, b) \in C \implies (b, a) \in C$ 」を満たす、(C3)「 $(a, b), (b, c) \in C \implies (a, c) \in C$ 」を満たす、(C4)「 $(a, b), (a', b') \in C \implies (a + a', b + b') \in C$ 」を満たす、(C5)「 $(a, b), (a', b') \in C \implies (a \cdot a', b \cdot b') \in C$ 」を満たす。ここで、 S^2 は S から定まる自然な演算で半環の構造を持つことに注意する。

半環 S に対し、 S^2 の部分集合 C が S 上の合同であることと、 C が S 上の同値関係を定め、かつ剰余集合 S/C が自然な演算により半環になることとは必要十分である。また、 $\psi : S_1 \rightarrow S_2$ が半環準同型写像であるとき、 $\text{Ker}(\psi) := \{(a, b) \in S_1^2 \mid \psi(a) = \psi(b)\}$ は S_1 上の合同である。これを ψ の**核合同**という。半環上の合同に対し準同型定理が成り立つため、 C が半環 S 上の合同であるとき、自然な全射半環準同型写像 $\pi : S \rightarrow S/C$ の核合同 $\text{Ker}(\pi)$ は C である。

古典的な代数幾何学において、イデアルと代数的集合との対応は、代数と幾何との双対性を見出す上で基本的である。同様に、トロピカル幾何学においても、合同と合同多様体とを対応付けられる。本稿で必要な分だけ準備する。 $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm] = \mathbf{T}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$ を n 変数トロピカルローラン多項式から成る半環、**トロピカルローラン多項式半環**とする。 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 V に対し、 $\mathbf{E}(V) := \{(f, g) \in \mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]^2 \mid \forall x \in V, f(x) = g(x)\}$ は $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]$ 上の合同を成す。 $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]^2$ の部分集合 E に対し、 $\mathbf{V}(E) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall (f, g) \in E, f(x) = g(x)\}$ を E に付随する**合同多様体**という。同じ半環上の合同同士の共通部分は再び同じ半環上の合同になるため、合同には生成の概念が存在する。いま E で**生成される** $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]$ 上の合同、すなわち、 E を含む最小の合同 (E を含む $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]$ 上の全ての合同の共通部分) を $\langle E \rangle$ で表せば、合同多様体の定義より $\mathbf{V}(E) = \mathbf{V}(\langle E \rangle)$ が成り立つ。これが合同多様体という名前の由来である (と筆者は認識している)。任意の $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合 V に対し、 $V = \mathbf{V}(\{(f, g)\})$ となる $(f, g) \in \mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]^2$ が存在することが示せる。逆に、このような合同多様体が $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合として書けることも簡単に示せる。合同多様体を閉集合であると定めることにより $\mathbf{R}^n$ に位相が定まるが、これはユークリッド位相に等しい。これから、古典的な状況とトロピカルの状況とは大分異なることが伺えるだろう。

表題のクルル次元を定義しよう。環においては素イデアルを用いてクルル次元を定義したが、半環においては素合同を用いる。 S を半環とする。 S^2 の二元 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ および $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ に対し、 $\alpha \times \beta$ を S^2 の元 $(\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2, \alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1)$ と定義する。これを α と β の**ねじれ積**という。 S 上の合同 C が**素**であるとは、 C が次の二条件を満たすことである：(P1) $E \neq S^2$ である、(P2)「 $\alpha \times \beta \in S \implies \alpha \in C$ または $\beta \in C$ 」を満たす。 $\mathbf{V}(\{\alpha \times \beta\}) = \mathbf{V}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{V}(\{\beta\})$

であることが確かめられる． S のクルル次元 $\dim S$ を， S 上の素合同の真の包含の鎖の最大の長さとする．ここで，鎖の長さは包含記号の個数であることに注意する．

体のクルル次元はいつでも 0 であったが，半体に対しては 0 であったりそうでなかったりする．実際， $\dim \mathbf{B} = 0$ であり， $\dim \mathbf{T} = 1$ である．Joó–Mincheva[8] により， $\dim \mathbf{T}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm] = n + 1$ であることが示された．より一般に，Joó–Mincheva[9] により次が示された： A を $\mathbf{B}$ 代数，すなわち，半環であって，かつ半環準同型写像 $\mathbf{B} \rightarrow A$ を備えているものとする． A が有限なクルル次元を持つとき， A 上の n 変数多項式半環およびローラン多項式半環が共に $n + \dim A$ をクルル次元に持つ．この $\mathbf{B}$ 代数という概念がクルル次元の計算において重要である．半環 A が $\mathbf{B}$ 代数であることと，**加法的べき等半環**である，すなわち，「 $a \in A \implies a + a = a$ 」を満たすこととは同値である．この加法的べき等性から $\mathbf{B}$ 代数 A は自然に半順序を持つ，すなわち，「 $a + b = a \iff a \geq b$ 」により A に半順序が定まる． C を A 上の合同とすると，剰余半環 A/C は再び $\mathbf{B}$ 代数であるから同様に定まる半順序を持つ．Joó–Mincheva[8] により， C が素合同であることと， A/C の半順序が全順序であることが同値であることが示された．これより， $A = \mathbf{T}[X^\pm]$ で， C が素であるとき， A の任意の元 f は $(f, m_f) \in C$ となるある項 m_f を含む（一意的である必要はない）．このことから， A/C において A の二元 f, g の像が $[f] \geq [g]$ であることと， $[m_f] \geq [m_g]$ であることは同値である． m_f と m_g は共に単項式なので，その係数と次数を用いて， A/C の全順序を $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}^n$ 上の全半順序（半順序であって，等号部分を潰すと全順序になるような順序）に翻訳できる． $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}^n$ 上の全半順序は行列により記述できることが知られており，この行列の言葉を使って， $\mathbf{B}$ 代数のクルル次元に関する上記の Joó–Mincheva[8], [9] の結果や本稿の主結果，より広く [7] の結果が示された．より詳しくは [7] を参照されたい．

3 主結果

2 章で定義した素合同について次のことが分かる：

命題 3.1 ([7, Proposition 3.1]). $\mathbf{T}[X^\pm]$ 上の素合同 P に付随する合同多様体 $\mathbf{V}(P)$ は空集合であるか一点から成る．

この命題と定理 1.1 の証明手法から，トロピカルな場合はクルル次元と幾何学的な次元とは関連がないのではと思われるかもしれないが，実はそうではない：

定理 3.2 ([14, Theorem 7.2.1]). K を付値体とし， I を K 上の n 変数ローラン多項式環 $K[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$ のイデアルとする． I が定める代数的集合 $\mathbf{V}(I)$ の位相空間としての次元が d ならば，剰余半環 $\mathbf{T}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]/\text{Bend}(\text{trop}(I))$ のクルル次元は $d + 1$ である．

ここで， $\text{trop}(I)$ は I の適切な意味でのトロピカル化であり， $\mathbf{T}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$ のイデアルである．また， Bend は Bend operator と呼ばれる操作である． $\text{Bend}(\text{trop}(I))$ は I の概型論的トロピカル化と呼ばれ， $\mathbf{T}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm]$ 上の合同を成す ([2])．さらに，これに付随する合同多様体 $\mathbf{V}(\text{Bend}(\text{trop}(I)))$ は $\mathbf{V}(I)$ のトロピカル化に等しく，したがって，定理 3.2 の d は

$V(\text{Bend}(\text{trop}(I)))$ の多面体的複体としての次元に等しい。

本稿の主結果は、定理 3.2 をより一般の合同に対して拡張したものになっている。これを述べる為に、有限合同トロピカル基底の概念を導入する：

定義 3.3. E を $T[X^\pm]^2$ の部分集合とする。このとき、 E の有限部分集合 $\{(f_1, g_1), \dots, (f_l, g_l)\}$ が E の有限合同トロピカル基底であるとは、 $V(E) = \bigcap_{i=1}^l V(\{(f_i, g_i)\})$ が成り立つことである。

上記の $\{(f_1, g_1), \dots, (f_l, g_l)\}$ から、 E の一元から成る有限合同トロピカル基底を作れる。 E が有限合同トロピカル基底を持つとき、付随する合同トロピカル多様体 $V(E)$ は $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合である。有限合同トロピカル基底の概念は有限生成の概念より弱く、したがって一般に、 $T[X^\pm]$ 上の合同 C が有限合同トロピカル基底を持つことは C が合同として有限生成であることを意味しない。また、 $V(C)$ が $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合であることも C が有限合同トロピカル基底を持つことを保証しないことにも注意する。

さて、ようやく本稿の主結果を記述できる：

定理 3.4 ([7, Theorem 1.1]). C を $T[X^\pm]^2$ と異なる $T[X^\pm]$ 上の合同とする。 C が二条件「 C は有限合同トロピカル基底を持つ」、「 C_B は有限合同トロピカル基底を持つ」を満たすならば、等号 $\dim T[X^\pm]/C = \max\{\dim V(C) + 1, \dim V(C_B)\}$ が成り立つ。

ここで、 C_B は $\{(f_B, g_B) \mid (f, g) \in C\}$ を表し、 $f = \bigoplus a_i \odot X^{\odot i}$ に対し、 $f_B = \bigoplus 0 \odot X^{\odot i} = \bigoplus X^{\odot i}$ である。 C が有限合同トロピカル基底を持つとき C_B もそうであることが分かるので、定理 3.4 において $\dim V(C_B)$ は意味を持つことに注意する。

定理 3.4 において、 $\dim T[X^\pm]/C$ が $\dim V(C)$ に一致しないのは、クルル次元の定義に由来する。 $T[X^\pm]/C$ は B 代数であるから、2 章の最後の段落で述べたように、そのクルル次元は行列の言葉で調べられる。実は素合同の成す鎖には二種類存在し、これらは行列の言葉で明確に区別される。一方が $V(C)$ に、もう一方が $V(C_B)$ に対応する。 $V(C)$ の次元に一が足され、 $V(C_B)$ の次元に一が足されないのは、丁度 T と B のクルル次元がそれぞれ 1 と 0 であることに対応する。これから、前者にあたるもののみを用いてクルル次元を定義する場合があります、これを (T 上の) **相対次元** という ([1]). $\dim V(C) + 1$ と $\dim V(C_B)$ との大小関係は与えられた C に依存し、いずれの場合 ($>, =, <$) も起こりうる。例えば [7, Examples 3.8, 3.9, 3.10] を見よ。

C が有限生成系 $\{(f_1, g_1), \dots, (f_l, g_l)\}$ を持つとき、 $\{((f_1)_B, (g_1)_B), \dots, ((f_l)_B, (g_l)_B)\}$ が C_B の有限合同トロピカル基底を成すことが分かるから、次の系を得る：

系 3.5 ([7, Corollary 3.22]). C が $T[X^\pm]$ 上の有限生成な合同ならば、等号 $\dim T[X^\pm]/C = \max\{\dim V(C) + 1, \dim V(C_B)\}$ が成り立つ。

定理 3.4 における $V(C_B)$ は時として $V(C)$ の後退扇 $\text{rec}(V(C))$ 、すなわち、 $V(C)$ に含まれる全ての半直線を $\mathbf{R}^n$ の原点に平行移動することにより得られる集合（“扇”と付いているが、特定の扇構造を指すわけではない、例えば [11, Subsection 3.5] を見よ）に等しく、時として等しくない。前者の場合、明らかに $\dim V(C) \geq \dim \text{rec}(V(C)) = \dim V(C_B)$ が成り立つ為、定理 3.4

の等号の右辺は $\dim \mathbf{V}(C) + 1$ となる．一般の C に対していつ $\text{rec}(\mathbf{V}(C)) = \mathbf{V}(C_B)$ となるかを判別するのは簡単ではないが，次の補題は示せる：

補題 3.6 ([7, Lemma 3.29]). V が $\mathbf{R}^n$ の空でない $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合であるとき，等号 $\text{rec}(V) = \mathbf{V}(\mathbf{E}(V)_B)$ が成り立つ．

したがって，次の系を得る：

系 3.7. V が $\mathbf{R}^n$ の空でない $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合であるとき，等号 $\dim \mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]/\mathbf{E}(V) = \dim V + 1$ が成り立つ．

定理 3.2 における $\text{trop}(I)$ を全て含み，さらに広い $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]$ のイデアルのクラスに**トロピカルイデアル**というものがある ([10])．トロピカルイデアル I に対し， $\mathbf{V}(\text{Bend}(I))$ は $\mathbf{R}$ 有理多面集合の有限個の和集合であり，次元 $\dim I$ を持ち，しかもこれは $\mathbf{V}(\text{Bend}(I))$ の次元に一致する．定理 3.4 から次が成り立つことが示せる：

系 3.8 ([7, Corollary 3.23]). I が $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]$ の真のトロピカルイデアルとする．このとき，等号 $\dim \mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]/\text{Bend}(I) = \dim I + 1$ が成り立つ．

よって，定理 3.4 が定理 3.2 の真の一般化となっていることが分かる．

$\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]$ 上の $\mathbf{E}(V)$ 型の合同は，**トロピカル有理関数半体**，すなわち，トロピカル多項式関数半環の商半体 $\overline{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$ 上の同様の型の合同（を定義できて，それ）と密接に関係している．特に， $\mathbf{R}^n$ の部分集合 V に対し， $\mathbf{T}[\mathbf{X}^\pm]/\mathbf{E}(V)$ のクルル次元は $\overline{\mathbf{T}(\mathbf{X})}/\mathbf{E}(V)$ のクルル次元に等しい．**抽象トロピカル曲線** Γ ，すなわち，ユークリッド位相の一点コンパクト化で位相を入れた $\mathbf{T}$ の有限個の閉区間（一点であることを許す）を，有限な端点同士で張り合わせた連結な拡張距離空間に対し，その上の**有理関数**を，定数関数 $-\infty$ または有限個の区分を持つ連続な区分的 $\mathbf{Z}$ アファイン関数で定める． Γ 上の全ての有理関数の集合を $\text{Rat}(\Gamma)$ と表し，これに点毎の $\max$ と $+$ を取る操作で演算を定めると，これは半体を成す．この半体 $\text{Rat}(\Gamma)$ を Γ の**有理関数半体**という． $\text{Rat}(\Gamma)$ は $\mathbf{T}$ 上の半体として有限生成であり ([4, Theorem 1.1])，したがって，ある $\overline{\mathbf{T}(\mathbf{X})}$ からの全射 $\mathbf{T}$ 代数準同型写像 ψ が存在する ([5, Lemma 3.11])． $\text{Ker}(\psi) = \mathbf{E}(\mathbf{V}(\text{Ker}(\psi))) (\overline{\mathbf{T}(\mathbf{X})})^2$ の部分集合 E に対しても同様に合同多様体 $\mathbf{V}(E)$ が付随する）であることや， $\mathbf{V}(\text{Ker}(\psi))$ が $\mathbf{R}^n$ 内の合同多様体としての Γ の実現になっていることが示せる ([5, Proposition 3.12])．これらから，次の結果が従う：

定理 3.9 ([7, Theorem 1.2]). Γ を抽象トロピカル曲線とする．このとき， $\dim \text{Rat}(\Gamma)$ は Γ が一点のみから成る時 1，それ以外の時 2 である．

この定理は抽象トロピカル曲線の有理関数半体を特徴付ける為の一条件を成す．体の拡大に対する超越次数の半体版は [1] にて最近導入されたようであるが，本研究の段階においては未発表だった為クルル次元を用いている．抽象トロピカル曲線の有理関数半体を特徴付けについては [6, Corollary 3.19] や [7] の後半部分を参照されたい．

参考文献

- [1] Netanel Friedenberg and Kalina Mincheva, *Tropical adic spaces I: The continuous spectrum of a topological semiring*, Research in the Mathematical Sciences **11**(3): 55, 2024.
- [2] Jeffrey Giansiracusa and Noah Giansiracusa, *Equations of tropical varieties*, Duke Mathematical Journal **165**(18):3379–3433, 2016.
- [3] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [4] Song JuAe, *Rational function semifields of tropical curves are finitely generated over the tropical semifield*, International Journal of Algebra and Computation **32**(08):1575–1594, 2022.
- [5] Song JuAe, *Congruences on tropical rational function semifields and tropical curves*, arXiv:2305.04204v2.
- [6] Song JuAe, *Finitely generated congruences on tropical rational function semifields*, arXiv:2405.14087.
- [7] Song JuAe and Yasuhito Nakajima, *A geometric interpretation of Krull dimensions of $\mathbf{T}$ -algebras*, arXiv:2408.02366v2.
- [8] Dániel Joó and Kalina Mincheva, *Prime congruences of additively idempotent semirings and a Nullstellensatz for tropical polynomials*, Selecta Mathematica **24**(3):2207–2233, 2018.
- [9] Dániel Joó and Kalina Mincheva, *On the dimension of polynomial semirings* Journal of Algebra 507:103-119, 2018.
- [10] Diane Maclagan and Felipe Rincón, *Tropical ideals*, Compositio Mathematica **154**(3):640–670, 2018.
- [11] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 161. American Mathematical Soc., Providence, RI, 2015.
- [12] D. マクラガン, B. シュツルムフェルズ著, 石川剛郎, 梶原健, 小林正典, 前野俊昭訳. (2023). トロピカル幾何学入門. 丸善出版.
- [13] Grigory Mikhalkin and Johannes Rau, *Tropical geometry*, Vol. 8. MPI for Mathematics, 2009.
- [14] Kalina Mincheva, *Semiring congruences and tropical geometry*, Johns Hopkins University, PhD thesis, 2016.